

А. Г. Мерзляк  
В. М. Поляков

# АЛГЕБРА

**7**  
класс

Углублённый уровень

Учебник

*Под редакцией В. Е. Подольского*

Допущено  
Министерством просвещения  
Российской Федерации

*8-е издание, стереотипное*

Москва  
«Просвещение»  
2022

УДК 373.167.1:512+512(075.3)

ББК 22.141я721

М52

Учебник допущен к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, в соответствии с Приказом Министерства просвещения Российской Федерации № 254 от 20.05.2020 (в редакции приказа № 766 от 23.12.2020).

Под редакцией профессора кафедры математического анализа  
механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова,  
доктора физико-математических наук В. Е. Подольского

**Мерзляк, Аркадий Григорьевич.**

М52 Алгебра : 7-й класс : углублённый уровень : учебник /  
А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков ; под ред. В. Е. Подольского. —  
8-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2022. — 336 с. : ил.  
ISBN 978-5-09-087879-1.

Учебник предназначен для углублённого изучения алгебры в 7 классе и входит в комплект учебников: «Алгебра. 7 класс», «Алгебра. 8 класс», «Алгебра. 9 класс» (авт. А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков).

Содержание учебника соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

УДК 373.167.1:512+512(075.3)

ББК 22.141я721

---

### Дорогие семиклассники!

Вы сделали серьёзный шаг в своей жизни: решили продолжать образование в классе с углублённым изучением математики. Мы поздравляем вас с этим выбором и надеемся, что вы не разочаруетесь в своём решении.

Учиться в математическом классе не просто. Надо быть настойчивым и увлечённым, внимательным и аккуратным, при этом самое главное — не быть безразличным к математике, а любить эту красивую науку.

Вы начинаете изучать новый школьный предмет — **алгебру**.

Алгебра — очень древняя и мудрая наука. С её азами вам предстоит познакомиться. Знать алгебру чрезвычайно важно. По-видимому, нет сегодня такой области знаний, в которой не применялись бы достижения этой науки: физики и химики, астрономы и биологи, географы и экономисты, даже языковеды и историки используют «алгебраический инструмент».

Алгебра — не только полезный, но и очень интересный предмет, развивающий сообразительность и логическое мышление. И мы надеемся, что вы в этом скоро убедитесь с помощью учебника, который держите в руках. Познакомьтесь, пожалуйста, с его структурой.

Учебник разделён на пять глав, каждая из которых состоит из параграфов. В параграфах изложен теоретический материал. Особое внимание обращайте на текст, выделенный **жирным шрифтом**. Также обращайте внимание на слова, выделенные *курсивом*.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи.

Кроме того, в учебнике вы сможете прочитать рассказы об истории алгебры.

Держайте! Желаем успеха!

## Условные обозначения



---

Простые задачи



---

Задачи среднего уровня сложности



---

Сложные задачи



---

Задачи высокой сложности

■ Окончание доказательства теоремы

■ Окончание решения задачи

🖥️ Задачи, которые можно решать с помощью компьютера

**1.7.** Задания для устной работы

**1.11.** Задания, рекомендуемые для домашней работы

## § 1 Введение в алгебру

Алгебра — это новый для вас школьный предмет. Тем не менее вы уже знакомы с «азбукой» этой науки. Так, когда вы записывали формулы и составляли уравнения, вам приходилось обозначать числа буквами, конструируя **буквенные выражения**. Например, записи  $a^2$ ,  $(x + y)^2$ ,  $2(a + b)$ ,  $\frac{x - y + z}{2}$ ,  $abc$ ,  $\frac{m}{n}$  являются буквенными выражениями.

Подчеркнём, что не всякая запись, состоящая из чисел, букв, знаков арифметических действий и скобок, является буквенным выражением. Например, запись  $2x + ) - ($  представляет собой бессмысленный набор символов.

Выражение, составленное из одной буквы, считают буквенным выражением.

Рассмотрим буквенное выражение  $2(a + b)$ . Вы знаете, что с его помощью можно найти периметр прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$ . Если, например, буквы  $a$  и  $b$  заменить соответственно числами 3 и 4, то получим **числовое выражение**  $2(3 + 4)$ . В этом случае периметр прямоугольника будет равен 14 единицам длины. Число 14 называют **значением числового выражения**  $2(3 + 4)$ .

Понятно, что вместо букв  $a$  и  $b$  можно подставлять и другие числа, получая каждый раз новое числовое выражение.

Поскольку буквы можно заменять произвольными числами, то эти буквы называют **переменными**, а само буквенное выражение — **выражением с переменными** (или с переменной, если она одна).

Рассмотрим выражение  $2x + 3$ . Если переменную  $x$  заменить, например, числом  $\frac{1}{2}$ , то получим числовое выражение  $2 \cdot \frac{1}{2} + 3$ . При этом говорят, что  $\frac{1}{2}$  — **значение переменной**  $x$ , а число 4 — **значение выражения**  $2x + 3$  при  $x = \frac{1}{2}$ .

Числовые выражения и выражения с переменными называют **алгебраическими выражениями**.

Алгебраические выражения

Числовые выражения

Выражения с переменными

- В этой главе вы познакомитесь с дробями, числитель и знаменатель которых -- выражения с переменными; научитесь складывать, вычитать, умножать и делить такие дроби, познакомитесь с уравнениями, содержащими такие дроби.
- Вы расширите свои представления о понятии «степень», научитесь возводить числа в степень с целым отрицательным показателем.
- Вы научитесь строить математические модели процессов, в которых увеличение (уменьшение) одной величины в несколько раз приводит к уменьшению (увеличению) другой величины в то же количество раз.

## § 34 Рациональные дроби

В главе 2 были рассмотрены целые выражения, т. е. такие, которые составлены из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения и деления на отличное от нуля число.

Вот примеры целых выражений:  $x - y$ ,  $\frac{a+b}{5}$ ,  $m^2 + 2m + n^2$ ,  $\frac{1}{3}x - 4$ ,  $x^n - y^n$ ,  $\frac{c}{4} + \frac{d}{7}$ ,  $x : 5$ ,  $y$ ,  $7$ .

В этой главе рассмотрим **дробные выражения**.

Дробные выражения отличаются от целых тем, что они *содержат деление на выражение с переменными*.

Приведём примеры дробных выражений:  $2x + \frac{a}{b}$ ;  $(x - y) : (x + y)$ ;  
 $\frac{a}{\frac{b}{c}}$ ;  $\frac{5}{x}$ ;  
 $\frac{a}{d}$ .

Объединением множеств целых и дробных выражений является множество **рациональных выражений**.

Если в рациональном выражении заменить переменные числами, то получим числовое выражение. Однако *эта замена возможна только тогда, когда она не приводит к делению на нуль*.

Например, выражение  $2 + \frac{a+2}{a-1}$  при  $a = 1$  не имеет смысла, т. е. числового значения этого выражения при  $a = 1$  не существует. При всех других значениях  $a$  это выражение имеет смысл.

**Областью определения выражения с одной переменной называют множество значений переменной, при которых это выражение имеет числовое значение.**

**Элементы этого множества называют допустимыми значениями переменной.**

Например, в рассмотренном выше примере областью определения выражения является множество всех чисел, кроме  $a = 1$ .

Подмножеством множества рациональных выражений является множество **рациональных дробей**. Это дроби, числителями и знаменателями которых являются многочлены<sup>1</sup>. Так, рациональные выражения  $\frac{x}{7}$ ;  $\frac{x^2 - 2xy}{x + y}$ ;  $\frac{12}{a}$ ;  $\frac{a + b}{5}$  являются примерами рациональных дробей.

Заметим, что рациональная дробь может быть как целым выражением, так и дробным.

Знаменатель рациональной дроби не может быть **нулевым многочленом**, т. е. многочленом, тождественно равным нулю.

Схема, изображённая на рисунке 34.1, иллюстрирует связь между понятиями, рассмотренными в этом параграфе.

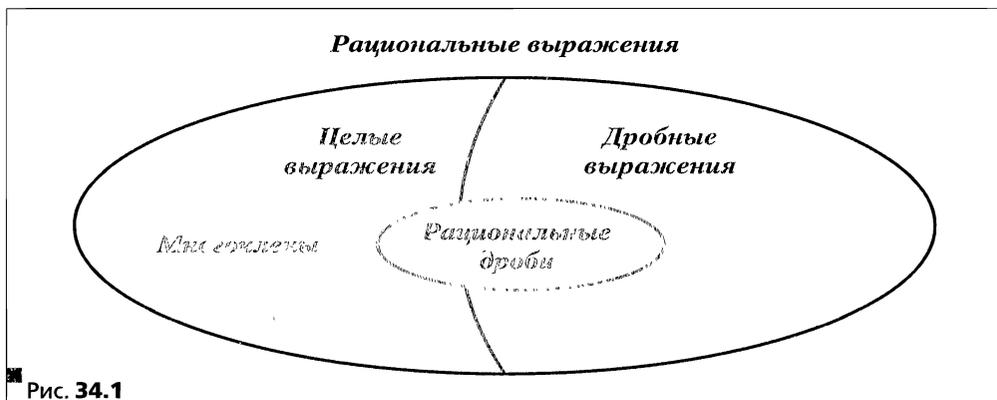


Рис. 34.1

**Пример.** Найдите область определения выражения  $\frac{1}{x} + \frac{3}{x - 5}$ .

**Решение.** Дробь  $\frac{1}{x}$  имеет смысл при всех значениях  $x$ , кроме  $x = 0$ , а дробь  $\frac{3}{x - 5}$  имеет смысл при всех значениях  $x$ , кроме  $x = 5$ .

<sup>1</sup> Напомним, что числа и одночлены считают отдельными видами многочленов.

Следовательно, областью определения выражения является множество всех чисел, кроме  $x = 0$  и  $x = 5$ .

- ? 1. Чем отличаются дробные выражения от целых?  
 2. Какое множество является объединением множеств целых и дробных выражений?  
 3. Что называют областью определения выражения?  
 4. Опишите, что представляет собой множество рациональных дробей.  
 5. Какой многочлен не может быть знаменателем рациональной дроби?

### Упражнения

34.1. Какие из выражений  $\frac{3a^2}{4b^3}$ ,  $\frac{5x^2}{4} + \frac{x}{7}$ ,  $\frac{8}{6n+1}$ ,  $3a - \frac{b^2}{c^4}$ ,  $\frac{t^2 - 6t + 15}{2t}$ ,  $\frac{x-2}{x+2}$ ,  $\frac{1}{6}m^3n^5$ ,  $(y-4)^3 + \frac{1}{y}$ ,  $\frac{m^2 - 3mn}{18}$  являются:

1) целыми выражениями; 2) дробными выражениями; 3) рациональными дробями?

34.2. Найдите область определения выражения:

1)  $\frac{x-5}{9}$ ;      4)  $\frac{5}{x^2-4}$ ;      7)  $\frac{x+4}{x(x-6)}$ ;

2)  $\frac{9}{x-5}$ ;      5)  $\frac{5}{|x|-4}$ ;      8)  $\frac{x}{|x|+1}$ ;

3)  $\frac{1}{x^2+4}$ ;      6)  $\frac{2}{x-2} + \frac{3x}{x+1}$ ;      9)  $\frac{7}{x^3-25x}$ .

34.3. Найдите область определения выражения:

1)  $\frac{9}{y}$ ;      3)  $\frac{m-1}{m^2-9}$ ;      5)  $\frac{4}{x-8} + \frac{1}{x-1}$ ;

2)  $\frac{x+7}{x+9}$ ;      4)  $\frac{x}{|x|-3}$ ;      6)  $\frac{2x-3}{(x+2)(x-10)}$ .

34.4. Найдите область определения функции:

1)  $y = \frac{1}{4 - \frac{4}{x}}$ ;      3)  $y = \frac{1}{x - \frac{1}{x}}$ ;      5)  $y = \frac{2}{|x| + x}$ ;

2)  $y = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$ ;      4)  $y = \frac{9}{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-2}}$ ;      6)  $y = \frac{2}{x^2 + \frac{1}{x}}$ .

**34.5.** При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1)  $\frac{x}{x - \frac{9}{x}}$ ;

2)  $\frac{x+2}{|x|-x} + \frac{1}{x+1}$ ;

3)  $\frac{1}{x^2 - \frac{1}{x}}$ ?

**34.6.** Докажите, что при всех допустимых значениях переменной  $x$  значение дроби:

1)  $\frac{x^2+1}{6x-9-x^2}$  отрицательное;

3)  $\frac{1}{2x-x^2-2}$  отрицательное;

2)  $\frac{2}{x^2+2x+2}$  положительное;

4)  $\frac{x^2+6x+9}{x^2+x+1}$  неотрицательное.

**34.7.** Докажите, что при всех допустимых значениях переменной  $x$  значение дроби:

1)  $\frac{-x^2}{x^2+5}$  неположительное;

2)  $\frac{x^2+4x+4}{x^2-2x+1}$  неотрицательное;

3)  $\frac{x^4+4x^2+4}{x^2-14x+49}$  положительное;

4)  $\frac{1}{x-|x|}$  отрицательное.

**34.8.** Известно, что  $5x - 15y = 1$ . Найдите значение выражения:

1)  $x - 3y$ ;

3)  $\frac{18y-6x}{11}$ ;

2)  $\frac{7}{2x-6y}$ ;

4)  $\frac{1}{x^2-6xy+9y^2}$ .

**34.9.** Известно, что  $4a + 8b = 10$ . Найдите значение выражения:

1)  $2b + a$ ;

2)  $\frac{5}{a+2b}$ ;

3)  $\frac{a^2+4ab+4b^2}{2a+4b+5}$ .

### Упражнения для повторения

**34.10.** В коробке лежат 42 карандаша, из них 14 карандашей — красные, 16 карандашей — синие, а остальные — зелёные. Какова вероятность того, что наугад взятый карандаш не будет ни красным, ни синим?

**34.11.** Благодаря мероприятиям по экономии электроэнергии за первый месяц её расход был уменьшен на 20 %, за второй — на 10 % по сравнению с предыдущим, а за третий — на 5 % по сравнению с предыдущим. На сколько процентов в итоге был уменьшен расход электроэнергии?

**34.12.** Из пункта  $A$  в пункт  $B$  автомобиль ехал со скоростью  $60$  км/ч, а возвращался из пункта  $B$  в пункт  $A$  со скоростью  $70$  км/ч другой дорогой, которая на  $15$  км короче первой. На обратный путь автомобиль затратил на  $30$  мин меньше, чем на путь из пункта  $A$  в пункт  $B$ . За какое время он доехал из пункта  $A$  в пункт  $B$ ?

## § 35 Основное свойство рациональной дроби

Равенство  $3a - 1 + 2a + 5 = 5a + 4$  является тождеством, так как оно выполняется при любых значениях  $a$ .

Равенство  $\frac{3a - 1 + 2a + 5}{a + 1} = \frac{5a + 4}{a + 1}$  также естественно считать тождеством. Но оно выполняется не при любых значениях  $a$ . При  $a = -1$  рациональные дроби, входящие в данное равенство, не имеют числового значения.

Уточним принятые в главе 2 определения тождества и тождественно равных выражений.

□ □ ⇨ "

**Равенство, которое выполняется при любых допустимых значениях входящих в него переменных, называют тождеством.**

□ □ ⇨ "

**Выражения, соответствующие значения которых равны при любых допустимых значениях входящих в них переменных, называют тождественно равными.**

Например, равенство  $\frac{a - 2}{a - 2} = 1$  является тождеством, так как оно выполняется при всех допустимых значениях  $a$ , т. е. при всех  $a$ , кроме  $a = 2$ .

В главе 2 рассматривались тождественные преобразования целых выражений. Теперь рассмотрим тождественные преобразования дробных выражений.

Как вы знаете, основное свойство отношения выражается следующим равенством:

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}, \text{ где } a, b \text{ и } m \text{ — некоторые числа, причём } b \neq 0 \text{ и } m \neq 0.$$

Рациональные дроби обладают свойством, аналогичным основному свойству отношения.

□□⇨ Если числитель и знаменатель рациональной дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получим дробь, тождественно равную данной.

Это свойство называют **основным свойством рациональной дроби** и записывают:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C},$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — многочлены, причём многочлены  $B$  и  $C$  ненулевые.

Согласно этому свойству выражение  $\frac{A \cdot C}{B \cdot C}$  можно заменить на тождественно равную дробь  $\frac{A}{B}$ . Такое тождественное преобразование называют **сокращением дроби** на множитель  $C$ .

**Пример 1.** Сократите дробь:

$$1) \frac{6a^3b^2}{24a^2b^4}; \quad 2) \frac{3x + 15y}{3x}; \quad 3) \frac{y^2 + 4y + 4}{y^2 + 2y}.$$

**Решение.**

1) Одночлены  $6a^3b^2$  и  $24a^2b^4$  имеют общий множитель  $6a^2b^2$ . Получаем:

$$\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4} = \frac{a \cdot 6a^2b^2}{4b^2 \cdot 6a^2b^2} = \frac{a}{4b^2}.$$

2) Разложим числитель данной дроби на множители:

$$\frac{3x + 15y}{3x} = \frac{3(x + 5y)}{3x}.$$

Следовательно, числитель и знаменатель данной дроби имеют общий множитель 3, сократив на который получаем:

$$\frac{3(x + 5y)}{3x} = \frac{x + 5y}{x}.$$

3) Разложив предварительно числитель и знаменатель данной дроби на множители и сократив на общий множитель  $y + 2$ , получаем:

$$\frac{y^2 + 4y + 4}{y^2 + 2y} = \frac{(y + 2)^2}{y(y + 2)} = \frac{y + 2}{y}. \blacksquare$$

Из основного свойства дроби следует, что

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} \text{ и } \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}.$$

Каждую из дробей  $\frac{-A}{B}$  и  $\frac{A}{-B}$  можно записать в виде выражения  $-\frac{A}{B}$ , т. е.

$$\frac{-A}{B} = \frac{A}{-B} = -\frac{A}{B}.$$

**Пример 2.** Сократите дробь  $\frac{4a - 20}{5a - a^2}$ .

**Решение.** Имеем:

$$\frac{4a - 20}{5a - a^2} = \frac{4(a - 5)}{a(5 - a)} = \frac{4(a - 5)}{-a(a - 5)} = -\frac{4}{a}.$$

**Пример 3.** Приведите к общему знаменателю дроби:

$$1) \frac{2m}{9a^2b^6} \text{ и } \frac{5n^2}{6a^4b^3}; \quad 2) \frac{1}{a+b} \text{ и } \frac{1}{a-b}; \quad 3) \frac{4a^2}{a^2-36} \text{ и } \frac{6}{a^2+6a}.$$

**Решение.**

1) Произведение знаменателей данных дробей, равно  $9a^2b^6 \cdot 6a^4b^3 = 54a^6b^9$ , можно принять за их общий знаменатель. Однако удобнее в качестве общего знаменателя взять одночлен  $18a^4b^6$ , полученный таким образом: его коэффициент 18 является наименьшим общим кратным коэффициентов 9 и 6 данных знаменателей, а каждая из переменных  $a$  и  $b$  взята в степени с наибольшим показателем степени из тех, с которыми она входит в знаменатели данных дробей.

Так как  $18a^4b^6 = 9a^2b^6 \cdot 2a^2$ , то дополнительным множителем для дроби  $\frac{2m}{9a^2b^6}$  является одночлен  $2a^2$ . Учитывая, что  $18a^4b^6 = 6a^4b^3 \cdot 3b^3$ , получаем, что дополнительным множителем для дроби  $\frac{5n^2}{6a^4b^3}$  является одночлен  $3b^3$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{2m}{9a^2b^6} &= \frac{2m \cdot 2a^2}{9a^2b^6 \cdot 2a^2} = \frac{4a^2m}{18a^4b^6}; \\ \frac{5n^2}{6a^4b^3} &= \frac{5n^2 \cdot 3b^3}{6a^4b^3 \cdot 3b^3} = \frac{15b^3n^2}{18a^4b^6}. \end{aligned}$$

2) Общий знаменатель данных дробей равен произведению их знаменателей. Имеем:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} = \frac{a-b}{a^2-b^2},$$

$$\frac{1}{a-b} = \frac{a+b}{(a-b)(a+b)} = \frac{a+b}{a^2-b^2}.$$

3) Для нахождения общего знаменателя рациональных дробей целесообразно предварительно разложить их знаменатели на множители:

$$a^2 - 36 = (a + 6)(a - 6), \quad a^2 + 6a = a(a + 6).$$

Следовательно, общим знаменателем данных дробей служит выражение  $a(a + 6)(a - 6)$ .

$$\text{Тогда } \frac{4a^2}{a^2 - 36} = \frac{4a^2 \cdot a}{(a+6)(a-6)} = \frac{4a^3}{a(a+6)(a-6)} = \frac{4a^3}{a^3 - 36a};$$

$$\frac{6}{a^2 + 6a} = \frac{6 \cdot a^{-6}}{a(a+6)} = \frac{6a - 36}{a(a+6)(a-6)} = \frac{6a - 36}{a^3 - 36a}.$$

**Пример 4.** Известно, что  $\frac{3a+4b}{2a-b} = 2$ . Найдите значение дроби  $\frac{a^3 - 6a^2b - ab^2 + 12b^3}{18b^3 + a^3 - 6a^2b}$ .

**Решение.** Если  $b = 0$ , то  $\frac{3a+4b}{2a-b} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2}$ , что противоречит условию. Следовательно,  $b \neq 0$ .

Из условия  $\frac{3a+4b}{2a-b} = 2$  следует, что  $3a + 4b = 4a - 2b$ ;  $a = 6b$ . Тогда  $\frac{a^3 - 6a^2b - ab^2 + 12b^3}{18b^3 + a^3 - 6a^2b} = \frac{216b^3 - 216b^3 - 6b^3 + 12b^3}{18b^3 + 216b^3 - 216b^3} = \frac{1}{3}$ .

**Пример 5.** Постройте график функции  $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ .

**Решение.** Областью определения данной функции является множество всех чисел, кроме  $x = 1$ . Имеем:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1, \text{ т. е. } y = x + 1,$$

где  $x \neq 1$ .

Следовательно, искомым графиком является прямая  $y = x + 1$ , за исключением одной точки  $(1; 2)$  (рис. 35.1).

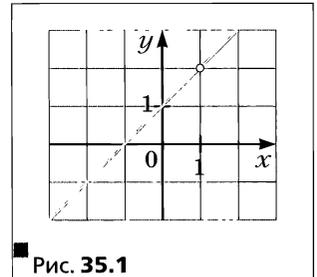


Рис. 35.1

**Пример 6.** Для каждого значения  $a$  решите уравнение  $(a^2 - 9)x = a + 3$ .

**Решение.** Запишем данное уравнение в виде  $(a + 3)(a - 3)x = a + 3$  и рассмотрим три случая.

1)  $a = -3$ .

В этом случае получаем уравнение  $0x = 0$ , корнем которого является любое число.

2)  $a = 3$ .

Тогда получаем уравнение  $0x = 6$ , не имеющее корней.

3)  $a \neq -3$  и  $a \neq 3$ .

$$\text{Тогда } x = \frac{a + 3}{(a + 3)(a - 3)} = \frac{1}{a - 3}.$$

**Ответ:** если  $a = -3$ , то корнем является любое число; если  $a = 3$ , то уравнение не имеет корней; если  $a \neq 3$  и  $a \neq -3$ , то  $x = \frac{1}{a-3}$ . ■



1. Какие выражения называют тождественно равными?
2. Что называют тождеством?
3. Сформулируйте основное свойство рациональной дроби.

## Упражнения

**35.1.** Сократите дробь:

- |                              |                                     |                                 |
|------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------|
| 1) $\frac{14a^3}{21a}$ ;     | 3) $\frac{4abc}{16ab^4}$ ;          | 5) $\frac{-10n^{10}}{5n^4}$ ;   |
| 2) $\frac{24x^2y^2}{32xy}$ ; | 4) $\frac{56m^5n^7}{42m^5n^{10}}$ ; | 6) $\frac{3p^4q^6}{-9p^8q^7}$ . |

**35.2.** Сократите дробь:

- |                        |                                  |                                   |
|------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $\frac{3x}{21y}$ ;  | 3) $\frac{5c^4}{10c^5}$ ;        | 5) $\frac{12a^8}{-42a^2}$ ;       |
| 2) $\frac{5x^2}{6x}$ ; | 4) $\frac{63x^5y^4}{42x^4y^5}$ ; | 6) $\frac{-13a^5b^5}{26a^4b^3}$ . |

**35.3.** Восстановите равенства:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $\frac{a}{3} = \frac{\quad}{6a} = \frac{\quad}{9a^3} = \frac{\quad}{5b} = \frac{4a^2c^3}{\quad}$ ; | 2) $\frac{m}{n} = \frac{4m}{\quad} = \frac{\quad}{2n^2} = \frac{\quad}{mnp} = \frac{3m^4n^3}{\quad}$ . |
|---|--|

**35.4.** Сократите дробь:

- |                                 |                               |                                     |
|---------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\frac{2a+2b}{7(a+b)}$ ;     | 5) $\frac{a-5b}{a^2-5ab}$ ;   | 9) $\frac{m^2-5mn}{15n-3m}$ ;       |
| 2) $\frac{4(a-6)^2}{(a-6)^3}$ ; | 6) $\frac{c^2-6c+9}{c^2-9}$ ; | 10) $\frac{7a^4-a^3b}{b^4-7ab^3}$ ; |
| 3) $\frac{12a+18b}{12a}$ ;      | 7) $\frac{m^3+1}{m^2-m+1}$ ;  | 11) $\frac{x^2-25}{5x^2-x^3}$ ;     |
| 4) $\frac{7x-21y}{5x-15y}$ ;    | 8) $\frac{3x-6y}{4y-2x}$ ;    | 12) $\frac{y^2-12y+36}{36-y^2}$ .   |

**35.5.** Сократите дробь:

- |                                 |                                  |                                |
|---------------------------------|----------------------------------|--------------------------------|
| 1) $\frac{3m-3n}{7m-7n}$ ;      | 4) $\frac{x^2-49}{6x+42}$ ;      | 7) $\frac{b^5-b^4}{b^5-b^6}$ ; |
| 2) $\frac{5a+25b}{2a^2+10ab}$ ; | 5) $\frac{12a^2-6a}{3-6a}$ ;     | 8) $\frac{7m^2+7m+7}{m^3-1}$ ; |
| 3) $\frac{4x-16y}{16y}$ ;       | 6) $\frac{-9b^2-1}{9b^2+6b+1}$ ; | 9) $\frac{64-x^2}{3x^2-24x}$ . |

**35.6.** Представьте данные дроби в виде дробей с одинаковыми знаменателями:

1)  $\frac{1}{8ab}$  и  $\frac{1}{2a^3}$ ;

5)  $\frac{x}{2x+1}$  и  $\frac{x}{3x-2}$ ;

2)  $\frac{3x}{7m^3n^3}$  и  $\frac{4y}{3m^2n^4}$ ;

6)  $\frac{a-b}{3a+3b}$  и  $\frac{a}{a^2-b^2}$ ;

3)  $\frac{a+b}{a-b}$  и  $\frac{2}{a^2-b^2}$ ;

7)  $\frac{3a}{4a-4}$  и  $\frac{2a}{5-5a}$ ;

4)  $\frac{3d}{m-n}$  и  $\frac{8p}{(m-n)^2}$ ;

8)  $\frac{7a}{b-3}$  и  $\frac{c}{9-b^2}$ .

**35.7.** Приведите к общему знаменателю дроби:

1)  $\frac{4}{15x^2y^2}$  и  $\frac{1}{10x^3y}$ ;

5)  $\frac{x+1}{x^2-xy}$  и  $\frac{y-1}{xy-y^2}$ ;

2)  $\frac{c}{6a^4b^5}$  и  $\frac{d}{9ab^2}$ ;

6)  $\frac{6a}{a-2b}$  и  $\frac{3a}{a+b}$ ;

3)  $\frac{x}{y-5}$  и  $\frac{z}{y^2-25}$ ;

7)  $\frac{1+c^2}{c^2-16}$  и  $\frac{c}{4-c}$ ;

4)  $\frac{m+n}{m^2-mn}$  и  $\frac{2m-3n}{m^2-n^2}$ ;

8)  $\frac{2m+9}{m^2+5m+25}$  и  $\frac{m}{m-5}$ .



**35.8.** Сократите дробь:

1)  $\frac{(3a+3b)^2}{a+b}$ ;

3)  $\frac{xy+x-5y-5}{4y+4}$ ;

2)  $\frac{(6x-18y)^2}{x^2-9y^2}$ ;

4)  $\frac{a^2-ab+2b-2a}{a^2-4a+4}$ .

**35.9.** Сократите дробь:

1)  $\frac{2m^2-72n^2}{(4m+24n)^2}$ ;

2)  $\frac{a^3-8}{ab-a-2b+2}$ ;

3)  $\frac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^3-ab^2}$ .

**35.10.** Сократите дробь ( $n$  — натуральное число):

1)  $\frac{100^n}{2^{2n+3} \cdot 5^{2n+1}}$ ;

2)  $\frac{2^{2n+1} \cdot 7^{n+1}}{6 \cdot 28^n}$ ;

3)  $\frac{5^{n+1}-5^n}{2 \cdot 5^n}$ .

**35.11.** Сократите дробь ( $n$  — натуральное число):

1)  $\frac{18^n}{3^{2n+2} \cdot 2^{n+1}}$ ;

2)  $\frac{41 \cdot 9^n}{9^{n+2} + 9^n}$ .

**35.12.** Приведите к общему знаменателю дроби:

1)  $\frac{2p}{5p-15}$  и  $\frac{1}{p^3-27}$ ;

$$2) \frac{3a+1}{9a^2-6a+1} \text{ и } \frac{a-2}{9a^2-1};$$

$$3) \frac{a}{a^2-7a} \text{ и } \frac{a+3}{a^2-14a+49};$$

$$4) \frac{2x}{x^2-1}, \frac{3x}{x^2-2x+1} \text{ и } \frac{4}{x^2+2x+1};$$

$$5) \frac{a^2}{a^2-ab-ac+bc}, \frac{b}{2a-2b} \text{ и } \frac{ab}{4a-4c}.$$

**35.13.** Запишите в виде дробей с одинаковыми знаменателями дроби:

$$1) \frac{3a}{3a-2}, \frac{a}{9a+6} \text{ и } \frac{a^2}{9a^2b-4b};$$

$$2) \frac{1}{a-5b}, \frac{1}{a^2+7ac} \text{ и } \frac{1}{a^2+7ac-5ab-35bc}.$$

**35.14.** Найдите значение выражения  $\frac{2xy-y^2}{3xy+x^2}$ , если  $\frac{x}{y} = 2$ .

**35.15.** Найдите значение выражения  $\frac{4a^2-ab}{ab+14b^2}$ , если  $\frac{a}{b} = 5$ .

**35.16.** Известно, что  $2a - 6b = 1$ . Найдите значение выражения:

$$1) \frac{8}{a-3b}; \quad 2) \frac{a^2-9b^2}{0,5a+1,5b}.$$

**35.17.** Найдите значение выражения  $\frac{2m-1,5n}{32m^2-18n^2}$ , если  $4m+3n=8$ .

**35.18.** Найдите значение выражения:

$$1) \frac{a^2-3ab-b^2}{a^2-b^2}, \text{ если } \frac{3a+2b}{4a-b} = 1; \quad 2) \frac{m^3+2m^2n}{n^3-mn^2}, \text{ если } \frac{5m-n}{3m+2n} = 2.$$

**35.19.** Какая фигура является графиком функции  $y = \frac{x^3-2x^2+4x-8}{x^2+4}$ ?

**35.20.** Постройте график функции:

$$1) y = \frac{x^2-4}{x+2}; \quad 3) y = \frac{x^2-10x+25}{x-5} - \frac{2x^2-4x}{x};$$

$$2) y = \frac{x-3}{3-x}; \quad 4) y = \frac{2}{x+4} - \frac{2}{x+4}.$$

**35.21.** Постройте график функции:

$$1) y = \frac{x^2-8x+16}{x-4}; \quad 2) y = x - \frac{x}{x}; \quad 3) y = \frac{x^2-3x}{x} - \frac{2x^2-2}{x^2-1}.$$

**35.22.** Постройте график функции:

$$1) y = \frac{|x|}{x}; \quad 2) y = \frac{x^2-1}{|x|-1}.$$

**35.23.** Решите уравнение:

1)  $\frac{x+1}{x+1} = 1;$

2)  $\frac{x^2-25}{x-5} = 10;$

3)  $\frac{x+6}{|x|-6} = 0.$

**35.24.** Решите уравнение:

1)  $\frac{x^2-16}{x+4} = -8;$

2)  $\frac{|x|-7}{x-7} = 0.$



**35.25.** Для каждого значения  $a$  решите уравнение:

1)  $ax = 1;$

2)  $ax = a;$

3)  $(a-6)x = a^2 - 12a + 36;$

4)  $(a^2-4)x = a-2.$

**35.26.** Для каждого значения  $a$  решите уравнение:

1)  $(a+3)x = 3;$

2)  $(a^2-9a)x = a^2 - 18a + 81.$

**35.27.** Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение дроби:

1)  $\frac{a^3 - a^2 - a + 1}{a^3 + a^2 + a + 1}$  неотрицательное;

2)  $\frac{2x-4}{x^3-2x^2+x-2}$  положительное;

3)  $\frac{(x-1)^3}{x^3-x^2+4x-4}$  неотрицательное;

4)  $\frac{x^2-4}{12+x^2-x^4}$  отрицательное.

**35.28.** Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение дроби:

1)  $\frac{x-1}{x^3-x^2+2x-2}$  положительное;

2)  $\frac{(x-2)^3}{x^3-2x^2+x-2}$  неотрицательное;

3)  $\frac{x^2-1}{4-3x^2-x^4}$  отрицательное.

**35.29.** Известно, что  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = k$ . Докажите, что если  $b_1 + b_2 + \dots +$

$+ b_n \neq 0$ , то  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = k$ .

**35.30.** Сократите дробь:

1)  $\frac{2x + 4}{x^2 + x - 2}$ ;

2)  $\frac{a^2 - 4a + 3}{a^2 + 2a - 3}$ ;

3)  $\frac{2b^3 + 3b^2 + 3b + 1}{2b + 1}$ ;

4)  $\frac{x + 3}{x^3 + 6x^2 + 12x + 9}$ ;

5)  $\frac{a^4 + 4}{a^2 + 2a + 2}$ ;

6)  $\frac{n^4 + 4n^3 + 8n^2}{n^4 + 64}$ ;

7)  $\frac{y^4 + y^2 + 1}{y^2 - y + 1}$ ;

8)  $\frac{m^2 + m + 3}{m^4 + 5m^2 + 9}$ ;

9)  $\frac{b^{47} + b^{46} + \dots + b + 1}{b^{23} + b^{22} + \dots + b + 1}$ ;

10)  $\frac{a^{38} - a^{37} + a^{36} - \dots - a + 1}{a^{12} - a^{11} + a^{10} - \dots - a + 1}$ .

**35.31.** Сократите дробь:

1)  $\frac{3y + 9}{y^2 + y - 6}$ ;

2)  $\frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 3x + 2}$ ;

3)  $\frac{2x^3 - 9x^2 + 27x - 27}{4x^2 - 9}$ ;

4)  $\frac{z^4 + 7z^2 + 16}{z^2 + z + 4}$ ;

5)  $\frac{y^{55} + y^{54} + \dots + y + 1}{y^{27} + y^{26} + \dots + y + 1}$ ;

6)  $\frac{a^{59} - a^{58} + a^{57} - \dots + a - 1}{a^{19} - a^{18} + a^{17} - \dots + a - 1}$ .



**35.32.** Известно, что  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4}$ . Докажите, что  $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_2 + x_3 + x_4}\right)^3 = \frac{x_1}{x_4}$ .

**35.33.** Для положительных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  выполняется равенство  $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b}$ . Найдите значение выражения  $\frac{(a+b)^2}{c^2} + \frac{(a+c)^2}{b^2} + \frac{(b+c)^2}{a^2}$ .

**35.34.** Для положительных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  выполняется равенство  $\frac{a}{b+c+d} = \frac{b}{a+c+d} = \frac{c}{a+b+d} = \frac{d}{a+b+c}$ . Найдите значение выражения  $\frac{a+b+c}{d} + \frac{a+b+d}{c} + \frac{a+c+d}{b} + \frac{b+c+d}{a}$ .

**35.35.** Известно, что  $a^3 + 7a - 9 = 0$ . Найдите значение выражения:

1)  $\frac{2a^3 + 3a}{11a - 18}$ ;

2)  $\frac{2a^4 + 14a^2 - 17a + 3}{2a + 6}$ .

35.36. Сократите дробь  $\frac{x^5 + x + 1}{x^2 + x + 1}$ .

35.37. Разложите на множители многочлен  $a^8 + a^6 + a^4 + a^2 + 1$ .



### Упражнения для повторения

35.38. Упростите выражение:

- 1)  $(a + 5)(a - 2) + (a + 4)(a - 5)$ ;
- 2)  $(y - 8)(2y + 1) - (3y + 1)(y - 6)$ ;
- 3)  $(2x - 3y)(2x + 3y) + (3x + 2y)(3x - 2y)$ ;
- 4)  $(x + 1)^2 - (x - 3)(x + 3)$ ;
- 5)  $(y - 4)(y + 3) - (y - 6)^2$ .

35.39. Какое наименьшее значение и при каких значениях  $a$  и  $b$  принимает выражение  $(a - 2)(a + 2) + 4b(b - a)$ ?

35.40. Расстояние от села Вишнёвое до железнодорожной станции на 14 км меньше расстояния от села Яблоневого до той же станции. Время, за которое автобус преодолевает расстояние от села Вишнёвое до станции, составляет 45 мин, а время, за которое легковой автомобиль проезжает от села Яблоневого до станции, на 5 мин больше, причём скорость автомобиля на 12 км/ч больше скорости автобуса. Найдите скорость автобуса и скорость легкового автомобиля.



## 36 Сложение и вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями

Вы знаете правила сложения и вычитания обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями. Их можно выразить такими равенствами:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}, \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}.$$

Аналогично складывают и вычитают рациональные дроби с одинаковыми знаменателями.

■ ➔ Суммой двух рациональных дробей с одинаковыми знаменателями является рациональная дробь, числитель которой равен сумме числителей данных дробей, а знаменатель — знаменателю этих дробей.

■ ➔ Разностью двух рациональных дробей с одинаковыми знаменателями является рациональная дробь, числитель которой равен разности числителей данных дробей, а знаменатель — знаменателю этих дробей.

**Пример 1.** Выполните вычитание:

$$1) \frac{y^2 + 2y}{y^2 - 25} - \frac{12y - 25}{y^2 - 25}; \quad 2) \frac{4}{2a - 1} - \frac{2a - 3}{1 - 2a}.$$

**Решение.** 1)  $\frac{y^2 + 2y}{y^2 - 25} - \frac{12y - 25}{y^2 - 25} = \frac{y^2 + 2y - (12y - 25)}{y^2 - 25} =$   
 $= \frac{y^2 + 2y - 12y + 25}{y^2 - 25} = \frac{y^2 - 10y + 25}{y^2 - 25} = \frac{(y - 5)^2}{(y + 5)(y - 5)} = \frac{y - 5}{y + 5}.$

$$2) \frac{4}{2a - 1} - \frac{2a - 3}{1 - 2a} = \frac{4}{2a - 1} - \frac{2a - 3}{-(2a - 1)} = \frac{4}{2a - 1} + \frac{2a - 3}{2a - 1} = \frac{4 + 2a - 3}{2a - 1} =$$
$$= \frac{2a + 1}{2a - 1}.$$

**Пример 2.** Известно, что  $\frac{m}{n} = -3$ . Найдите значение выражения  $\frac{2m + n}{m}$ .

**Решение.** Представим данную дробь в виде суммы целого и дробного выражений:

$$\frac{2m + n}{m} = \frac{2m}{m} + \frac{n}{m} = 2 + \frac{n}{m}.$$

Если  $\frac{m}{n} = -3$ , то  $\frac{n}{m} = -\frac{1}{3}$ . Следовательно,  $\frac{2m + n}{m} = 2 + \frac{n}{m} = 2 - \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$ .

**Ответ:**  $1\frac{2}{3}$ .

**Пример 3.** Найдите все натуральные значения  $n$ , при которых значение выражения  $\frac{2n^2 + 3n - 15}{n}$  является целым числом.

**Решение.** Представим данную дробь в виде разности целого и дробного выражений:

$$\frac{2n^2 + 3n - 15}{n} = \frac{2n^2}{n} + \frac{3n}{n} - \frac{15}{n} = 2n + 3 - \frac{15}{n}.$$

Выражение  $2n + 3$  принимает натуральные значения при любом натуральном  $n$ . Поэтому выражение  $2n + 3 - \frac{15}{n}$  принимает целые значения, если значения выражения  $\frac{15}{n}$  являются целыми числами. Это возможно только при таких натуральных значениях  $n$ : 1, 3, 5, 15.

**Ответ:** {1, 3, 5, 15}.

**Пример 4.** При каких целых значениях  $n$  значение дроби  $\frac{3n^2 + 5n - 13}{n + 2}$  является целым числом?

**Решение.** Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{3n^2 + 5n - 13}{n + 2} &= \frac{3n^2 + 6n - n - 2 - 11}{n + 2} = \frac{3n(n + 2) - (n + 2) - 11}{n + 2} = \\ &= \frac{3n(n + 2)}{n + 2} - 1 - \frac{11}{n + 2} = 3n - 1 - \frac{11}{n + 2}. \end{aligned}$$

Дробь  $\frac{11}{n + 2}$  принимает целые значения только тогда, когда её знаменатель принимает одно из четырёх значений:  $-1, 1, -11, 11$ . Отсюда  $n$  принимает такие значения:  $-3, -1, -13, 9$ .

**Ответ:**  $\{-3, -1, -13, 9\}$ .

Выполненные в примерах 2–4 преобразования рациональной дроби называют **выделением целой части из дроби**.

- ? 1. Какая дробь является суммой двух рациональных дробей с одинаковыми знаменателями?
2. Какая дробь является разностью двух рациональных дробей с одинаковыми знаменателями?

## Упражнения

**36.1.** Выполните действия:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{x}{6} + \frac{y}{6}; & 3) \frac{m}{n} + \frac{4m}{n}; & 5) \frac{2a - 3b}{6ab} + \frac{9b - 2a}{6ab}; \\ 2) \frac{a}{3} - \frac{b}{3}; & 4) \frac{m + n}{6} - \frac{m - 2n}{6}; & 6) \frac{8m + 3}{10m^2} - \frac{2m + 3}{10m^2}. \end{array}$$

**36.2.** Представьте в виде дроби выражение:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{a - b}{2b} - \frac{a}{2b}; & 3) \frac{10a + 6b}{11a^3} - \frac{6b - a}{11a^3}; \\ 2) -\frac{a - 12b}{27a} + \frac{a + 15b}{27a}; & 4) \frac{x^2 - xy}{x^2y} + \frac{2xy - 3x^2}{x^2y}. \end{array}$$

**36.3.** Упростите выражение:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{a^2}{a + 3} - \frac{9}{a + 3}; & 3) \frac{m^2}{(m - 5)^2} - \frac{25}{(m - 5)^2}; \\ 2) \frac{t}{t^2 - 16} - \frac{4}{t^2 - 16}; & 4) \frac{b^2}{b + 10} + \frac{20b + 100}{b + 10}. \end{array}$$

**36.4.** Упростите выражение:

1)  $\frac{c^2}{c-9} - \frac{81}{c-9}$ ;

3)  $\frac{3x+5}{x^2-4} - \frac{2x+7}{x^2-4}$ ;

2)  $\frac{a^2}{(a-6)^2} - \frac{36}{(a-6)^2}$ ;

4)  $\frac{y^2}{y-2} - \frac{4y-4}{y-2}$ .

**36.5.** Выполните действия:

1)  $\frac{a+b}{c-7} + \frac{a}{7-c}$ ;

3)  $\frac{81b^2}{9b-a} + \frac{a^2}{a-9b}$ ;

2)  $\frac{2x-4y}{x-3y} - \frac{4x-14y}{3y-x}$ ;

4)  $\frac{y^2}{y-1} - \frac{1-2y}{1-y}$ .

**36.6.** Упростите выражение:

1)  $\frac{3c}{c-d} + \frac{3d}{d-c}$ ;

2)  $\frac{b^2}{2b-14} + \frac{49}{14-2b}$ .

**36.7.** Найдите значение выражения:



1)  $\frac{a^2-48}{a-8} - \frac{16}{a-8}$  при  $a=32$ ;

2)  $\frac{c^2+3c+7}{c^3-8} + \frac{c+3}{8-c^3}$  при  $c=-3$ .

**36.8.** Найдите значение выражения:



1)  $\frac{5x+3}{x^2-16} + \frac{6x-1}{16-x^2}$  при  $x=-4,1$ ;

2)  $\frac{a^2+a}{a^2-9} - \frac{7a-9}{a^2-9}$  при  $a=7$ .



**36.9.** Упростите выражение:

1)  $\frac{5n-1}{20n} - \frac{7n-8}{20n} - \frac{8n+7}{20n}$ ;

3)  $\frac{3k}{k^3-1} + \frac{4k+1}{1-k^3} + \frac{k^2}{1-k^3}$ .

2)  $\frac{9m+2}{m^2-4} - \frac{m-9}{4-m^2} + \frac{1-7m}{m^2-4}$ ;

**36.10.** Упростите выражение:

1)  $\frac{6a-1}{16a-8} + \frac{4a-7}{16a-8} + \frac{-2a-2}{8-16a}$ ;

2)  $\frac{2a^2+12a}{a^2-25} + \frac{8a-9}{25-a^2} - \frac{a^2+14a-16}{a^2-25}$ .

**36.11.** Выполните действия:

1)  $\frac{15-8a}{(a-1)^2} - \frac{14-7a}{(1-a)^2}$ ;

3)  $\frac{m^2-8n}{(m-2)(n-5)} - \frac{2m-8n}{(2-m)(5-n)}$ ;

2)  $\frac{3b^2+12}{(b-2)^3} + \frac{12b}{(2-b)^3}$ ;

4)  $\frac{x^2}{(x-3)^2} - \frac{6x-9}{(3-x)^2}$ .

**36.12.** Представьте в виде дроби выражение:

1)  $\frac{x^2-16x}{(x-7)^4} + \frac{2x+49}{(7-x)^4}$ ;

3)  $\frac{y^2+y}{(y-6)(y+2)} + \frac{y+36}{(6-y)(2+y)}$ ;

2)  $\frac{a^3}{(a-2b)^3} + \frac{8b^3}{(2b-a)^3}$ ;

4)  $\frac{2-b^2}{(b-5)^6} - \frac{7-3b}{(b-5)^6} + \frac{7b-20}{(b-5)^6}$ .

**36.13.** Докажите тождество:

$$1) \frac{(a+b)^2}{4ab} - \frac{(a-b)^2}{4ab} = 1; \quad 2) \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} + \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2} = 2.$$

**36.14.** Докажите, что при всех допустимых значениях переменной  $x$  значение выражения  $\frac{12x-25}{20x-15} + \frac{8x+10}{20x-15}$  не зависит от значения  $x$ .

**36.15.** Докажите, что при всех допустимых значениях переменной  $y$  значение выражения  $\frac{17y+5}{21y-3} - \frac{9-11y}{21y-3}$  не зависит от значения  $y$ .

**36.16.** Докажите, что при всех допустимых значениях переменной выражение  $\frac{a^2-6}{(a-2)^4} - \frac{7a-4}{(a-2)^4} + \frac{3a+6}{(a-2)^4}$  принимает положительные значения.

**36.17.** Докажите, что при всех допустимых значениях переменной выражение  $\frac{2-b^2}{(b-5)^6} - \frac{7-3b}{(b-5)^6} + \frac{7b-20}{(b-5)^6}$  принимает отрицательные значения.

**36.18.** Представьте данную дробь в виде суммы или разности целого и дробного выражений:

$$1) \frac{x+3}{x}; \quad 2) \frac{a^2-2a-5}{a-2}.$$

**36.19.** Представьте данную дробь в виде суммы или разности целого и дробного выражений:

$$1) \frac{4a-b}{a}; \quad 2) \frac{b^2+7b+3}{b+7}.$$

**36.20.** Известно, что  $\frac{x}{y} = 4$ . Найдите значение выражения:

$$1) \frac{y}{x}; \quad 2) \frac{2x-3y}{y}; \quad 3) \frac{x^2+y^2}{xy}.$$

**36.21.** Известно, что  $\frac{a}{b} = -2$ . Найдите значение выражения:

$$1) \frac{a-b}{a}; \quad 2) \frac{4a+5b}{b}; \quad 3) \frac{a^2-2ab+b^2}{ab}.$$

**36.22.** Найдите все натуральные значения  $n$ , при которых значение выражения является целым числом:

$$1) \frac{n+6}{n}; \quad 2) \frac{3n^2-4n-14}{n}; \quad 3) \frac{4n+7}{2n-3}.$$

**36.23.** Найдите все натуральные значения  $n$ , при которых значение выражения является целым числом:

$$1) \frac{8n-9}{n}; \quad 2) \frac{n^2+2n-8}{n}; \quad 3) \frac{9n-4}{3n-5}.$$



**36.24.** Докажите, что при любом натуральном значении  $n$  значение дроби не является целым числом:

1)  $\frac{n^2 + n + 1}{n + 1}$ ;                      2)  $\frac{n^3 - 2n^2 + n - 1}{n^2 + 1}$ .

**36.25.** При каких целых значениях  $n$  значение дроби является целым числом:

1)  $\frac{2n^2 + 7n - 4}{n + 3}$ ;                      2)  $\frac{4n^2 - 11n + 23}{n - 2}$  ?

**36.26.** Докажите, что при любом натуральном значении  $n$  значение дроби является целым числом:

1)  $\frac{n^3 - 2n + 1}{n^2 + n - 1}$ ;                      2)  $\frac{n^3 - 4n - 3}{n^2 - n - 3}$ .

**36.27.** Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что значения выражений  $a + b + c$  и  $\frac{ab + bc + ac}{a + b + c}$  являются целыми числами. Докажите, что значение выражения  $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}$  также является целым числом.

### Упражнения для повторения

**36.28.** Из двух сёл, расстояние между которыми 9 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста и встретились через 20 мин. Если бы велосипедисты ехали в одном направлении, то один из них догнал бы другого через 3 ч. Найдите скорость каждого велосипедиста.

**36.29.** Докажите, что выражение  $(a + 4)(a - 8) + 4(2a + 9)$  при всех значениях  $a$  принимает неотрицательные значения.

**36.30.** Виктор и Галина ехали в одном поезде. Виктор ехал в седьмом вагоне от головы поезда, а Галина — в восемнадцатом вагоне от хвоста поезда. Однако они ехали в одном вагоне. Сколько вагонов в поезде?

**36.31.** Докажите, что значение выражения  $999 \cdot 1001 \cdot 1002 + 1001 \cdot 1003$  является кубом натурального числа.

Так же как и в случае с обыкновенными дробями, применяя основное свойство рациональной дроби, сложение и вычитание дробей с разными знаменателями можно свести к сложению и вычитанию дробей с одинаковыми знаменателями.

Пусть надо сложить две рациональные дроби  $\frac{A}{B}$  и  $\frac{C}{D}$ .

Можно записать:  $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D}$ ;  $\frac{C}{D} = \frac{C \cdot B}{D \cdot B}$ .

Тогда  $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D} + \frac{C \cdot B}{D \cdot B} = \frac{A \cdot D + C \cdot B}{B \cdot D}$ .

Здесь в качестве **общего знаменателя** выбрано выражение, равное произведению знаменателей данных дробей.

Заметим, что произведение знаменателей данных дробей не всегда является наиболее удобным общим знаменателем.

Напомним, что при нахождении общего знаменателя обыкновенных дробей мы находили наименьшее общее кратное знаменателей, раскладывая их на простые множители. Аналогично для нахождения общего знаменателя рациональных дробей может оказаться удобным предварительно разложить знаменатели на множители.

**Пример 1.** Упростите выражение:

$$1) \frac{b+1}{abc} + \frac{1-a}{a^2c}; \quad 4) \frac{2a}{25-10a+a^2} - \frac{1}{3a-15};$$

$$2) \frac{m}{7m+7n} - \frac{n}{7m-7n}; \quad 5) \frac{x}{x-4} - \frac{x+2}{x-2}.$$

$$3) \frac{10n+14}{n^2-49} + \frac{6}{7-n};$$

**Решение.** 1) Общим знаменателем данных дробей является одночлен  $a^2bc$ . Следовательно,

$$\frac{b+1}{abc} + \frac{1-a}{a^2c} = \frac{ab+a+b-ab}{a^2bc} = \frac{a+b}{a^2bc}.$$

2) Разложив предварительно знаменатели данных дробей на множители, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{m}{7m+7n} - \frac{n}{7m-7n} &= \frac{m}{7(m+n)} - \frac{n}{7(m-n)} = \\ &= \frac{m(m-n) - n(m+n)}{7(m+n)(m-n)} = \frac{m^2 - mn - mn - n^2}{7(m^2 - n^2)} = \frac{m^2 - 2mn - n^2}{7(m^2 - n^2)}. \end{aligned}$$

$$3) \frac{10n+14}{n^2-49} + \frac{6}{7-n} = \frac{10n+14}{(n-7)(n+7)} - \frac{6}{n-7} = \frac{10n+14-6(n+7)}{(n-7)(n+7)} =$$

$$= \frac{10n+14-6n-42}{(n-7)(n+7)} = \frac{4n-28}{(n-7)(n+7)} = \frac{4(n-7)}{(n-7)(n+7)} = \frac{4}{n+7}.$$

$$4) \frac{2a}{25-10a+a^2} - \frac{1}{3a-15} = \frac{2a}{(5-a)^2} - \frac{1}{3(a-5)} = \frac{2a}{(a-5)^2} - \frac{1}{3(a-5)} =$$

$$= \frac{6a-a+5}{3(a-5)^2} = \frac{5a+5}{3(a-5)^2}.$$

5) В этом случае общий знаменатель данных дробей равен произведению их знаменателей. Тогда

$$\frac{x^{x-2}}{x-4} - \frac{x+2}{x-2} = \frac{x(x-2) - (x+2)(x-4)}{(x-4)(x-2)} = \frac{8}{(x-4)(x-2)}. \blacksquare$$

**Пример 2.** Представьте в виде дроби выражение  $\frac{21c^2}{7c-2} - 3c$ .

**Решение.** Представив выражение  $3c$  в виде дроби со знаменателем 1, получаем:

$$\frac{21c^2}{7c-2} - 3c = \frac{21c^2}{7c-2} - \frac{3c}{1} = \frac{21c^2 - 21c^2 + 6c}{7c-2} = \frac{6c}{7c-2}. \blacksquare$$

Заметим, что *сумма и разность двух рациональных дробей являются рациональными дробями.*

? **1.** Как выполнить сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями?

**2.** Что является суммой и разностью двух рациональных дробей?

## Упражнения

**37.1.** Упростите выражение:

$$1) \frac{5m-n}{14m} - \frac{m-6n}{7m}; \quad 3) \frac{k+4}{k} - \frac{3k-4}{k^2}; \quad 5) \frac{2m-3n}{m^2n} + \frac{7m-2n}{mn^2};$$

$$2) \frac{a+b}{ab} + \frac{a-c}{ac}; \quad 4) \frac{x-y}{x^3} - \frac{y-x^2}{x^2y}; \quad 6) \frac{c+d}{cd^4} - \frac{c^2-8d}{c^3d^3}.$$

**37.2.** Выполните вычитание дробей:

$$1) \frac{4d+7}{7d} - \frac{d-6}{6d}; \quad 3) \frac{6a+2}{ab} - \frac{2a+4}{a^2b}; \quad 5) \frac{1}{x^3} - \frac{1+x^2}{x^5};$$

$$2) \frac{m-n}{mn} - \frac{p-n}{np}; \quad 4) \frac{c^2-16}{c^6} - \frac{c-9}{c^5}; \quad 6) \frac{1-ab}{abc} - \frac{1-ad}{acd}.$$

**37.3.** Выполните действия:

1)  $\frac{m}{n} - \frac{m}{m+n}$ ;      3)  $\frac{c}{3c-1} - \frac{c}{3c+1}$ ;

2)  $\frac{a}{a-3} - \frac{3}{a+3}$ ;      4)  $\frac{x}{2y+1} - \frac{x}{3y-2}$ .

**37.4.** Представьте в виде дроби выражение:

1)  $\frac{a}{a-b} + \frac{a}{b}$ ;      2)  $\frac{4}{x} - \frac{5x+4}{x+2}$ ;      3)  $\frac{b}{b-2} - \frac{2}{b+2}$ .

**37.5.** Выполните сложение или вычитание дробей:

1)  $\frac{18}{b^2+3b} - \frac{6}{b}$ ;      3)  $\frac{m+1}{3m-15} + \frac{1-m}{2m-10}$ ;      5)  $\frac{a^2+2}{a^2+2a} - \frac{a+4}{2a+4}$ ;

2)  $\frac{2}{c+1} - \frac{c-1}{c^2+c}$ ;      4)  $\frac{m-2n}{6m+6n} - \frac{m-3n}{4m+4n}$ ;      6)  $\frac{3x-4y}{x^2-2xy} + \frac{x-3y}{xy-2y^2}$ .

**37.6.** Упростите выражение:

1)  $\frac{2}{m} - \frac{16}{m^2+8m}$ ;      3)  $\frac{a^2+b^2}{2a^2+2ab} + \frac{b}{a+b}$ ;

2)  $\frac{a-2}{2a-6} - \frac{a-1}{3a-9}$ ;      4)  $\frac{b+4}{ab-b^2} - \frac{a+4}{a^2-ab}$ .

**37.7.** Выполните действия:

1)  $\frac{3}{x+3} + \frac{x+4}{x^2-9}$ ;      3)  $\frac{3a+b}{a^2-b^2} + \frac{1}{a+b}$ ;

2)  $\frac{6b}{9b^2-4} - \frac{1}{3b-2}$ ;      4)  $\frac{b}{a+b} - \frac{b^2}{a^2+b^2+2ab}$ .

**37.8.** Упростите выражение:

1)  $\frac{4x-y}{x^2-y^2} + \frac{1}{x-y}$ ;      3)  $\frac{10a}{25a^2-9} - \frac{1}{5a+3}$ ;

2)  $\frac{y^2}{y^2-81} - \frac{y}{y+9}$ ;      4)  $\frac{n}{n-7} - \frac{n^2}{n^2-14n+49}$ .

**37.9.** Представьте в виде дроби выражение:

1)  $\frac{x}{y} - x$ ;      3)  $\frac{9}{p^2} - \frac{4}{p} + 3$ ;      5)  $6m - \frac{12m^2+1}{2m}$ ;

2)  $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} + 2$ ;      4)  $\frac{3b+4}{b-2} - 3$ ;      6)  $\frac{20b^2+5}{2b-1} - 10b$ .

**37.10.** Выполните действия:

1)  $a - \frac{4}{a}$ ;      3)  $\frac{m}{n^3} - \frac{1}{n} + m$ ;      5)  $3n - \frac{9n^2-2}{3n}$ ;

2)  $\frac{1}{x} + x - 2$ ;      4)  $\frac{2k^2}{k-5} - k$ ;      6)  $5 - \frac{4y-12}{y-2}$ .

◇ ◇  
**37.11.** Упростите выражение:

$$1) \frac{a^2 + 1}{a^2 - 2a + 1} + \frac{a + 1}{a - 1};$$

$$5) \frac{a}{a^2 - 4a + 4} - \frac{a + 4}{a^2 - 4};$$

$$2) \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \frac{a - b}{a + b};$$

$$6) \frac{2p}{p - 5} - \frac{5}{p + 5} + \frac{2p^2}{25 - p^2};$$

$$3) \frac{c + 7}{c - 7} + \frac{28c}{49 - c^2};$$

$$7) \frac{1}{y} - \frac{y + 8}{16 - y^2} - \frac{2}{y - 4};$$

$$4) \frac{5a + 3}{2a^2 + 6a} + \frac{6 - 3a}{a^2 - 9};$$

$$8) \frac{2b - 1}{4b + 2} + \frac{4b}{4b^2 - 1} + \frac{2b + 1}{3 - 6b}.$$

**37.12.** Упростите выражение:

$$1) \frac{m + n}{m - n} - \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2};$$

$$4) \frac{b - 2}{b^2 + 6b + 9} - \frac{b}{b^2 - 9};$$

$$2) \frac{x - y}{x + y} + \frac{y^2}{2xy + x^2 + y^2};$$

$$5) \frac{x - 6}{x^2 + 3x} + \frac{x}{x + 3} - \frac{x - 3}{x};$$

$$3) \frac{2a}{4a^2 - 1} - \frac{a + 4}{2a^2 + a};$$

$$6) \frac{y + 2}{y - 2} - \frac{y - 2}{y + 2} - \frac{16}{y^2 - 4}.$$

**37.13.** Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение данного выражения не зависит от значения переменной:

$$1) \frac{2x + 1}{2x - 4} + \frac{2x - 1}{6 - 3x} - \frac{x + 7}{6x - 12};$$

$$2) \frac{24 - 2a}{a^2 - 16} - \frac{a}{2a - 8} + \frac{4}{a + 4}.$$

**37.14.** Представьте в виде дроби выражение:

$$1) 1 - a + \frac{a^2 - 2}{a + 2};$$

$$3) \frac{c^2 + 9}{c - 3} - c - 3;$$

$$2) \frac{a^2 - b^2}{3a + b} + 3a - b;$$

$$4) \frac{8m^2}{4m - 3} - 2m - 1.$$

**37.15.** Упростите выражение:

$$1) b + 7 - \frac{14b}{b + 7};$$

$$2) 5c - \frac{10 - 29c + 10c^2}{2c - 5} + 2.$$

**37.16.** Докажите тождество:

$$1) \frac{a + b}{a} - \frac{a}{a - b} + \frac{b^2}{a^2 - ab} = 0;$$

$$2) \frac{a + 3}{a + 1} - \frac{a + 1}{a - 1} + \frac{6}{a^2 - 1} = \frac{2}{a^2 - 1}.$$

**37.17.** Докажите тождество:

$$1) \frac{1}{6a - 4b} - \frac{1}{6a + 4b} - \frac{3a}{4b^2 - 9a^2} = \frac{1}{3a - 2b};$$

$$2) \frac{c + 2}{c^2 + 3c} - \frac{1}{3c + 9} - \frac{2}{3c} = 0.$$

**37.18.** Найдите разность дробей:

$$1) \frac{a+1}{a^3-1} - \frac{1}{a^2+a+1}; \quad 2) \frac{1}{b+3} - \frac{b^2-6b}{b^3+27}.$$

**37.19.** Упростите выражение:

$$1) \frac{9m^2 - 3mn + n^2}{3m - n} - \frac{9m^2 + 3mn + n^2}{3m + n};$$

$$2) 1 - \frac{2b-1}{4b^2-2b+1} - \frac{2b}{2b+1}.$$

**37.20.** Докажите тождество:  $\frac{3a^2+24}{a^3+8} - \frac{6}{a^2-2a+4} - \frac{1}{a+2} = \frac{2}{a+2}.$

**37.21.** Упростите выражение:

$$1) \frac{4b}{a^2-b^2} + \frac{a-b}{a^2+ab} + \frac{a+b}{b^2-ab};$$

$$2) \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} - \frac{x}{x^2-4} + \frac{x^2+4}{8x-2x^3};$$

$$3) \frac{1}{(a-5b)^2} - \frac{2}{a^2-25b^2} + \frac{1}{(a+5b)^2};$$

$$4) \frac{x^2+9x+18}{xy+3y-2x-6} - \frac{x+5}{y-2}.$$

**37.22.** Докажите тождество:

$$1) \frac{a+3}{a^2-3a} + \frac{a-3}{3a+9} + \frac{12}{9-a^2} = \frac{a-3}{3a};$$

$$2) \frac{b-4}{2a-1} - \frac{b^2-2b-24}{2ab-4-b+8a} = \frac{2}{2a-1};$$

$$3) \frac{1}{a^2+12a+36} + \frac{2}{36-a^2} + \frac{1}{a^2-12a+36} = \frac{144}{(a^2-36)^2}.$$



**37.23.** Докажите тождество:

$$1) \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0;$$

$$2) \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

**37.24.** Докажите тождество:

$$1) \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ac}{(b-a)(b-c)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} = 1;$$

$$2) \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = a+b+c.$$

**37.25.** Докажите, что при любом натуральном  $n$  выполняется равенство

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Воспользовавшись этим равенством, найдите значение суммы:

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \frac{9}{4^2 \cdot 5^2} + \frac{11}{5^2 \cdot 6^2}.$$

**37.26.** Докажите, что при любом натуральном  $n$  выполняется равенство:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

**37.27.** Упростите выражение:

$$1) \frac{1}{(a-1)(a-2)} + \frac{1}{(a-2)(a-3)} + \frac{1}{(a-3)(a-4)};$$

$$2) \frac{1}{a(a+3)} + \frac{1}{(a+3)(a+6)} + \frac{1}{(a+6)(a+9)} + \frac{1}{(a+9)(a+12)}.$$

**37.28.** Упростите выражение:

$$1) \frac{1}{(a-1)(a-3)} + \frac{1}{(a-3)(a-5)} + \frac{1}{(a-5)(a-7)};$$

$$2) \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)}.$$

**37.29.** Докажите тождество:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x^2-1} + \frac{4}{x^2-4} + \frac{6}{x^2-9} + \frac{8}{x^2-16} = \\ & = 5 \left( \frac{1}{(x-1)(x+4)} + \frac{1}{(x-2)(x+3)} + \frac{1}{(x-3)(x+2)} + \frac{1}{(x-4)(x+1)} \right). \end{aligned}$$

**37.30.** Докажите тождество:

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} + \frac{16}{1+a^{16}} = \frac{32}{1-a^{32}}.$$

**37.31.** Докажите тождество:

$$\frac{3}{1-a^2} + \frac{3}{1+a^2} + \frac{6}{1+a^4} + \frac{12}{1+a^8} + \frac{24}{1+a^{16}} = \frac{48}{1-a^{32}}.$$

**37.32.** Докажите, что если  $\frac{a-c}{b+c} + \frac{b-a}{a+c} + \frac{c-b}{a+b} = 1$ , то  $\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+c} + \frac{a+c}{a+b} = 4$ .

**37.33.** Докажите, что если  $\frac{a+b+c}{a+b-c} = \frac{a-b+c}{a-b-c}$ , то  $b=0$  или  $c=0$ .



**37.34.** Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что  $\frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ . Докажите, что

$$\frac{1}{a^3+b^3+c^3} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}.$$

**37.35.** Найдите значение выражения  $\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{2}{xy+1}$ , если  $\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = \frac{2}{xy+1}$  и  $x \neq y$ .

**37.36.** Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что  $\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} = 0$ . Докажите, что одно из слагаемых в левой части равенства равно 0.

**37.37.** Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что  $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = -\frac{1}{30}$ . Найдите значение выражения:

1)  $\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a}$ ;      2)  $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ .

**37.38.** Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что  $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = \frac{3}{2}$ . Найдите значение выражения  $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}$ .

**37.39.** Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ . Докажите, что  $\frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} = 3$ .

**37.40.** Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что  $\frac{b+c-a}{a} = \frac{a+c-b}{b} = \frac{b+a-c}{c}$ . Какие значения может принимать выражение  $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ ?

**37.41.** Найдите значение выражения  $\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}$ , если  $xyz = 1$ .

### ■ ■ ■ Упражнения для повторения ■ ■ ■

**37.42.** Решите систему уравнений:

1)  $\begin{cases} x+y=8, \\ 3x-2y=9; \end{cases}$       2)  $\begin{cases} 2x+5y=13, \\ 3x-5y=-13. \end{cases}$

**37.43.** За первый день трёхдневной гонки велосипедисты проехали  $\frac{4}{15}$  всего маршрута, за второй день —  $\frac{2}{5}$  всего маршрута, а за третий — остальные 90 км. Какое расстояние проехали велосипедисты за 3 дня?

**37.44.** (Из болгарского фольклора.) Пятеро братьев хотели разделить 20 овец так, чтобы каждый из них получил нечётное количество овец. Возможно ли это?

**37.45.** Верно ли утверждение, что при любом натуральном  $n$  значение выражения  $(5n + 7)^2 - (n - 1)^2$  делится нацело на 48?

**37.46.** Докажите, что если  $xy + z = yz + x = zx + y$ , то  $(x - y)(y - z)(z - x) = 0$ .

## § 38 Умножение и деление рациональных дробей. Возведение рациональной дроби в степень

Вы знаете правила умножения и деления обыкновенных дробей. Их можно выразить следующими равенствами:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Аналогично выполняют умножение и деление рациональных дробей.

- ➤ Произведением двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель — произведению их знаменателей.
- ➤ Частным двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителя делимого и знаменателя делителя, а знаменатель — произведению знаменателя делимого и числителя делителя.

**Пример 1.** Выполните действия:

1)  $(2x - 12) \cdot \frac{4x}{x^2 - 12x + 36}$ ;

2)  $\frac{a^2 + 2ab}{a + 9} : \frac{a^2 - 4b^2}{3a + 27}$ ;

3)  $\frac{5c^2 - 35c}{c + 2} : (c - 7)$ .

**Решение.** 1) Представив многочлен  $2x - 12$  в виде дроби со знаменателем 1, получаем:

$$(2x - 12) \cdot \frac{4x}{x^2 - 12x + 36} = \frac{2x - 12}{1} \cdot \frac{4x}{x^2 - 12x + 36} = \frac{2(x - 6) \cdot 4x}{(x - 6)^2} = \frac{8x}{x - 6}.$$

2)  $\frac{a^2 + 2ab}{a + 9} : \frac{a^2 - 4b^2}{3a + 27} = \frac{a(a + 2b)}{a + 9} \cdot \frac{3(a + 9)}{(a - 2b)(a + 2b)} = \frac{3a}{a - 2b}.$

3)  $\frac{5c^2 - 35c}{c + 2} : (c - 7) = \frac{5c^2 - 35c}{c + 2} : \frac{c - 7}{1} = \frac{5c(c - 7)}{c + 2} \cdot \frac{1}{c - 7} = \frac{5c}{c + 2}.$

Правило умножения двух дробей можно обобщить для нахождения произведения трёх и более рациональных дробей. Например, для трёх дробей имеем:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{A \cdot C \cdot P}{B \cdot D \cdot Q} = \frac{A \cdot C \cdot P}{B \cdot D \cdot Q}.$$

**Пример 2.** Упростите выражение  $\frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} : \frac{4a^2}{9bc^3}$ .

**Решение.** Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} : \frac{4a^2}{9bc^3} &= \frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} \cdot \frac{9bc^3}{4a^2} = \frac{2a^5 \cdot 10b^2 \cdot 9bc^3}{15b^3 \cdot 7c^4 \cdot 4a^2} = \\ &= \frac{2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot a^5 b^3 c^3}{15 \cdot 7 \cdot 4 \cdot a^2 b^3 c^4} = \frac{3a^3}{7c}. \end{aligned}$$

Применяя правило умножения дробей, можно получить правило возведения рациональных дробей в степень. Для натурального  $n$ ,  $n > 1$ , имеем:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \underbrace{\frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} \cdot \dots \cdot \frac{A}{B}}_{n \text{ множителей}} = \frac{\overbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}^{n \text{ множителей}}}{\underbrace{B \cdot B \cdot \dots \cdot B}_{n \text{ множителей}}} = \frac{A^n}{B^n}.$$

Для  $n = 1$  договорились, что  $\left(\frac{A}{B}\right)^1 = \frac{A}{B}$ .

Следовательно,

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}, \text{ где } n \text{ — натуральное число.}$$

■ Чтобы возвести рациональную дробь в степень, надо возвести в эту степень числитель и знаменатель. Первый результат записать как числитель, а второй — как знаменатель дроби.

**Пример 3.** Представьте в виде дроби выражение  $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3$ .

**Решение.**  $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3 = -\frac{(3a^2)^3}{(2bc^4)^3} = -\frac{27a^6}{8b^3c^{12}}.$

- ❓
1. Какая дробь является произведением двух рациональных дробей?
  2. Какая дробь является частным двух рациональных дробей?
  3. Как возвести рациональную дробь в степень?

## Упражнения

**38.1.** Выполните умножение:

$$1) \frac{2a}{b} \cdot \frac{b}{8a}; \quad 3) 14m^9 \cdot \frac{n^2}{7m^3}; \quad 5) \frac{21c^3}{13p^2} \cdot \frac{39p}{28c^2};$$

$$2) \frac{x}{yz} \cdot \frac{y^4}{5x}; \quad 4) \frac{15a^4}{b^{12}} \cdot \frac{b^6}{10a^2}; \quad 6) \frac{25a^2c}{64b^4} \cdot \frac{77b^6}{10ac^3}.$$

**38.2.** Упростите выражение:

$$1) \frac{4m^2}{k^5} \cdot \frac{mk^5}{12}; \quad 3) 15x^{12} \cdot \frac{y^2}{5x^4};$$

$$2) \frac{a}{2b} \cdot 2a; \quad 4) \frac{7k^8}{9mp} \cdot \frac{27m^3}{56k^6p^2}.$$

**38.3.** Упростите выражение:

$$1) \frac{2mn + n^2}{6m} \cdot \frac{2m}{n}; \quad 3) \frac{m-2}{m^2-49} \cdot \frac{m+7}{m-2}; \quad 5) \frac{4a^2-4a+1}{3a+3} \cdot \frac{a+1}{2a-1};$$

$$2) \frac{7a+7b}{b^6} \cdot \frac{b^3}{a+b}; \quad 4) (a+4) \cdot \frac{a}{2a+8}; \quad 6) \frac{a^2-25}{4a} \cdot \frac{4a^2}{a^2-5a}.$$

**38.4.** Выполните умножение:

$$1) \frac{ab-b^2}{8} \cdot \frac{4a}{b^4}; \quad 3) \frac{6}{m^2-9n^2} \cdot (m-3n);$$

$$2) \frac{5x-5y}{x^6} \cdot \frac{x^3}{x-y}; \quad 4) \frac{3c-9}{9c^2+6c+1} \cdot \frac{3c+1}{c-3}.$$

**38.5.** Выполните деление:

$$1) \frac{3b}{8} : b; \quad 3) -\frac{9a}{b^5} : \frac{18a^4}{b^3}; \quad 5) \frac{36a}{c^3} : (4a^2c);$$

$$2) \frac{6a}{5b} : \frac{3a^2}{20b^2}; \quad 4) a^2 : \frac{a}{b^2c}; \quad 6) \frac{16x^3y^8}{33z^5} : \left(-\frac{12x^2}{55z^6}\right).$$

**38.6.** Найдите частное:

$$1) \frac{b^9}{8} : \frac{b^3}{48}; \quad 2) \frac{27}{m^6} : \frac{36}{m^7n^2}; \quad 3) \frac{6x^{10}}{y^8} : (30x^5y^2).$$

**38.7.** Упростите выражение:

$$1) \frac{x^2-y^2}{x^2} : \frac{6x+6y}{x^5}; \quad 4) \frac{a^2-4a+4}{a+2} : (a-2);$$

$$2) \frac{c-5}{c^2-4c} : \frac{c-5}{5c-20}; \quad 5) (p^2-16k^2) : \frac{p+4k}{p};$$

$$3) \frac{x-y}{xy} : \frac{x^2-y^2}{3xy}; \quad 6) \frac{a^2-ab}{a^2} : \frac{a^2-2ab+b^2}{ab}.$$

**38.8.** Выполните деление:

1)  $\frac{p+3}{p^2-2p} : \frac{p+3}{4p-8}$ ;

3)  $\frac{y-9}{y-8} : \frac{y^2-81}{y^2-16y+64}$ ;

2)  $\frac{a^2-16}{a-3} : \frac{a+4}{a-3}$ ;

4)  $(x^2-49y^2) : \frac{x-7y}{x}$ .

**38.9.** Выполните возведение в степень:

1)  $\left(\frac{c}{2d}\right)^5$ ;

3)  $\left(-\frac{3m^4}{2n^3}\right)^3$ ;

2)  $\left(\frac{5a^6}{b^5}\right)^2$ ;

4)  $\left(-\frac{6a^6}{b^7}\right)^2$ .

**38.10.** Представьте в виде дроби выражение:

1)  $\left(\frac{a^6}{b^3}\right)^{10}$ ;

3)  $\left(-\frac{10c^7}{3d^5}\right)^3$ ;

2)  $\left(-\frac{4m}{9n^3}\right)^2$ ;

4)  $\left(\frac{2m^3n^2}{kp^8}\right)^6$ .

**38.11.** Выразите переменную  $x$  через переменные  $a$  и  $b$ , если:

1)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{a} = b$ ;

2)  $\frac{a}{b} + \frac{x}{4} = \frac{b}{a}$ .

**38.12.** Выразите переменную  $x$  через переменные  $m$  и  $n$ , если:

1)  $2x - \frac{m}{n} = 2$ ;

2)  $\frac{1}{m} - \frac{1}{x} = \frac{1}{n}$ .



**38.13.** Упростите выражение:

1)  $\frac{33m^8}{34n^8} : \frac{88m^4}{51n^4} : \frac{21m^6}{16n^2}$ ;

3)  $\left(\frac{2a^5}{y^6}\right)^4 : \left(\frac{4a^6}{y^8}\right)^3$ ;

2)  $\frac{36x^6}{49y^5} : \frac{24x^9}{25y^4} : \frac{7x^2}{30y}$ ;

4)  $\left(-\frac{27x^3}{16y^5}\right)^2 \cdot \left(\frac{8y^3}{9x^2}\right)^3$ .

**38.14.** Упростите выражение:

1)  $\frac{3a^4b^3}{10c^5} \cdot \frac{4b^4c^2}{27a^7} : \frac{5b^7}{9a^3c^3}$ ;

3)  $\left(\frac{5a^3}{b^4}\right)^4 \cdot \frac{b^{18}}{50a^{16}}$ ;

2)  $\frac{3a^2}{2b^2c^2} : \frac{7c^8}{6b^3} : \frac{9ab}{14c^{12}}$ ;

4)  $\left(\frac{3x^7}{y^{10}}\right)^4 : \left(\frac{3x^6}{y^8}\right)^3$ .

**38.15.** Замените переменную  $x$  таким выражением, чтобы получилось тождество:

1)  $\left(\frac{4a^2}{b^3}\right)^2 \cdot x = \frac{6a}{b^2}$ ;

2)  $\left(\frac{2b^4}{3c}\right)^3 : x = \frac{b^6}{12}$ .

**8.16.** Выполните умножение и деление дробей:

$$1) \frac{4c - d}{c^2 + cd} \cdot \frac{2c^2 - 2d^2}{4c^2 - cd};$$

$$5) \frac{m + 2n}{2 - 3m} : \frac{m^2 + 4mn + 4n^2}{3m^2 - 2m};$$

$$2) \frac{b^2 - 6b + 9}{b^2 - 3b + 9} \cdot \frac{b^3 + 27}{5b - 15};$$

$$6) \frac{a^3 + 8}{16 - a^4} : \frac{a^2 - 2a + 4}{a^2 + 4};$$

$$3) \frac{a^3 - 16a}{3a^2b} \cdot \frac{12ab^2}{4a + 16};$$

$$7) \frac{x^2 - 12x + 36}{3x + 21} \cdot \frac{x^2 - 49}{4x - 24};$$

$$4) \frac{a^3 + b^3}{a^2 - b^2} \cdot \frac{7a - 7b}{a^2 - ab + b^2};$$

$$8) \frac{3a + 15b}{a^2 - 81b^2} : \frac{4a + 20b}{a^2 - 18ab + 81b^2}.$$

**8.17.** Упростите выражение:

$$1) \frac{a^4 - 1}{a^3 - a} \cdot \frac{a}{1 + a^2};$$

$$4) \frac{mn^2 - 36m}{m^3 - 8} : \frac{2n + 12}{6m - 12};$$

$$2) \frac{a^2 - 8ab}{12b} : \frac{8b^2 - ab}{24a};$$

$$5) \frac{a^4 - 1}{a^2 - a + 1} : \frac{a - 1}{a^3 + 1};$$

$$3) \frac{5m^2 - 5n^2}{m^2 + n^2} : \frac{15n - 15m}{4m^2 + 4n^2};$$

$$6) \frac{4x^2 - 100}{6x} : (2x^2 - 20x + 50).$$

**8.18.** Упростите выражение и найдите его значение:

$$1) \frac{x}{4x^2 - 4y^2} : \frac{1}{6x + 6y}, \text{ если } x = 4,2, y = -2,8;$$

$$2) (3a^2 - 18a + 27) : \frac{3a - 9}{4a}, \text{ если } a = 0,5;$$

$$3) \frac{a^6 + a^5}{(3a - 3)^2} : \frac{a^5 + a^4}{9a^2 - 9a}, \text{ если } a = 0,8.$$

**8.19.** Найдите значение выражения:

$$1) \frac{1}{a^2 - ab} : \frac{b}{b^2 - a^2}, \text{ если } a = 2\frac{1}{3}, b = -\frac{3}{7};$$

$$2) \frac{a^2 + 4ab + 4b^2}{a^2 - 9b^2} : \frac{3a + 6b}{2a - 6b}, \text{ если } a = 4, b = -5.$$

**8.20.** Упростите выражение ( $n$  — натуральное число):

$$1) \frac{a^{n+4}b^{3n+2}}{c^{n+5}} : \frac{a^{n+3}b^{3n+1}}{c^{n+8}};$$

$$2) \frac{(a^n + b^n)^2 - 4a^n b^n}{a^{3n} + b^{3n}} : \frac{a^{2n} - b^{2n}}{(a^n - b^n)^2 + 4a^n b^n}.$$

**8.21.** Упростите выражение ( $n$  — натуральное число):

$$1) \frac{x^{n+3}y^{4n-1}}{z^{n+4}} \cdot \frac{z^{2n+5}}{x^{n+1}y^{3n-2}};$$

$$2) \frac{(x^n - 2y^n)^2 + 8x^n y^n}{x^{3n} - 8y^{3n}} : \frac{x^{2n} - 4y^{2n}}{(x^n + 2y^n)^2 - 8x^n y^n}.$$

**38.22.** Известно, что  $x - \frac{1}{x} = 9$ . Найдите значение выражения  $x^2 + \frac{1}{x^2}$ .

**38.23.** Известно, что  $3x + \frac{1}{x} = -4$ . Найдите значение выражения  $9x^2 + \frac{1}{x^2}$ .

**38.24.** Дано:  $x^2 + \frac{16}{x^2} = 41$ . Найдите значение выражения  $x + \frac{4}{x}$ .

**38.25.** Дано:  $x^2 + \frac{1}{x^2} = 6$ . Найдите значение выражения  $x - \frac{1}{x}$ .

**38.26.** Упростите выражение:

1)  $\frac{a^2 - 36}{a^2 + ab - 6a - 6b} : \frac{a^2 + ab + 6a + 6b}{a^2 + 2ab + b^2}$ ;

2)  $\frac{a^2 + a - ab - b}{a^2 + a + ab + b} : \frac{a^2 - a - ab + b}{a^2 - a + ab - b}$ .

**38.27.** Выполните действия:

1)  $\frac{25 - 5a + 5b - ab}{25 + 5a - 5b - ab} \cdot \frac{ab - 5a - 5b + 25}{ab + 5a + 5b + 25}$ ;

2)  $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - ab - 4a + 4b} : \frac{a^2 - ab + 4a - 4b}{a^2 - 16}$ .

**38.28.** Докажите тождество:

1)  $\frac{8a^2}{a - 3b} : \frac{6a^3}{a^2 - 9b^2} \cdot \frac{3a}{4a + 12b} = 1$ ;

2)  $\frac{a^4 - 100ab^3}{a^2 - 2ab + b^2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2b - 100b^3} : \frac{a^3 + 10a^2b + 100ab^2}{ab + 10b^2} = \frac{a + b}{a - b}$ .

**38.29.** Докажите тождество:

$$\frac{a^2 + a}{2a - 12} \cdot \frac{6a + 6}{2a + 12} : \frac{9a^3 + 18a^2 + 9a}{a^2 - 36} = \frac{1}{6}.$$



**38.30.** Упростите выражение:

1)  $\frac{a^2 + 2ab + b^2 - 2a - 2b + 1}{a^2 - 2ab + b^2 + 2a - 2b + 1} : \frac{a + b - 1}{a - b + 1}$ ;

2)  $\frac{x^2 - 4x - 21}{x^2 + 4x - 21} : \frac{x^2 - 14x + 49}{x^2 + 14x + 49}$ .

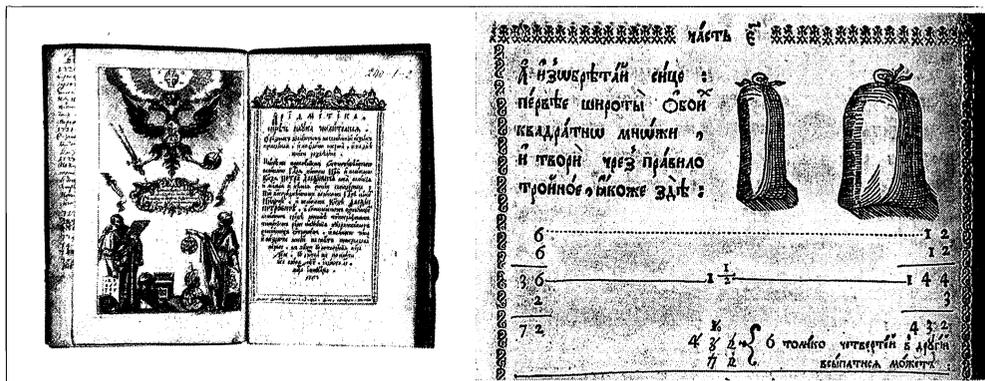
**38.31.** Упростите выражение:

1)  $\frac{n^2 - 9}{n^2 - 1} : \frac{n^2 + 4n + 3}{n^2 - 4n + 3}$ ;

2)  $\frac{a^5 + 1}{a^3 + a^2 + a + 1} : \frac{a^4 - a^3 + a^2 - a + 1}{a^4 - 1}$ .

## Упражнения для повторения

- 38.32.** Из пункта  $A$  в пункт  $B$ , расстояние между которыми равно 192 км со скоростью 60 км/ч выехал мотоциклист. Через 30 мин навстречу ему из пункта  $B$  со скоростью 75 км/ч выехал второй мотоциклист. Сколько времени ехал второй мотоциклист до встречи с первым?
- 38.33.** В двух бидонах находится 80 л молока. Если из одного бидона перелить 20 % молока в другой бидон, то в обоих бидонах молока станет поровну. Сколько литров молока было в каждом бидоне сначала?
- 38.34.** (Из учебника «Арифметика» Л.Ф. Магницкого.) Двенадцатилюдью несут 12 хлебов. Каждый мужчина несёт по 2 хлеба, женщина — по половине хлеба, а ребёнок — по четверти хлеба. Сколько было мужчин, женщин и детей?



- 38.35.** Докажите, что число 1 111 155 556 является квадратом натурального числа.

## § 39 Тождественные преобразования рациональных выражений

Правила действий над рациональными дробями позволяют любое рациональное выражение преобразовать в рациональную дробь.

Рассмотрим примеры.

**Пример 1.** Упростите выражение

$$\left( \frac{3a}{a-2} - \frac{6a}{a^2-4a+4} \right) : \frac{a-4}{a^2-4} - \frac{2a^2+8a}{a-2}.$$

**Решение.** Аналогично нахождению значения числового выражения, содержащего несколько арифметических действий, данное выражение можно упростить, выполняя действия в соответствии с порядком выполнения арифметических действий: сначала — вычитание выражений, стоящих в скобках, затем — деление и наконец — вычитание:

$$1) \frac{3a}{a-2} - \frac{6a}{a^2-4a+4} = \frac{3a \cdot a^{-2}}{a-2} - \frac{6a}{(a-2)^2} = \frac{3a^2-6a-6a}{(a-2)^2} = \frac{3a^2-12a}{(a-2)^2};$$

$$2) \frac{3a^2-12a}{(a-2)^2} : \frac{a-4}{a^2-4} = \frac{3a^2-12a}{(a-2)^2} \cdot \frac{a^2-4}{a-4} = \frac{3a(a-4)}{(a-2)^2} \cdot \frac{(a-2)(a+2)}{a-4} = \\ = \frac{3a(a+2)}{a-2} = \frac{3a^2+6a}{a-2};$$

$$3) \frac{3a^2+6a}{a-2} - \frac{2a^2+8a}{a-2} = \frac{3a^2+6a-2a^2-8a}{a-2} = \frac{a^2-2a}{a-2} = \frac{a(a-2)}{a-2} = a.$$

**Ответ:**  $a$ . ■

Преобразование рационального выражения можно выполнять не по отдельным действиям, а цепочкой. Проиллюстрируем этот приём на следующем примере.

**Пример 2.** Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения  $\frac{3a}{a-3} + \frac{a+5}{18-6a} \cdot \frac{54a}{5a+a^2}$  не зависит от значения  $a$ .

**Решение.** 
$$\frac{3a}{a-3} + \frac{a+5}{18-6a} \cdot \frac{54a}{5a+a^2} = \frac{3a}{a-3} + \frac{a+5}{6(3-a)} \cdot \frac{54a}{a(5+a)} = \\ = \frac{3a}{a-3} + \frac{9}{3-a} = \frac{3a}{a-3} - \frac{9}{a-3} = \frac{3a-9}{a-3} = \frac{3(a-3)}{a-3} = 3.$$

Следовательно, при всех допустимых значениях  $a$  значение данного выражения равно 3. ■

**Пример 3.** Докажите тождество  $\left(\frac{a-7}{3a-1} + \frac{a-7}{a+1}\right) \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} = \frac{4}{a+1}$ .

**Решение.** Для преобразования левой части данного равенства целесообразно раскрыть скобки, применяя распределительное свойство умножения:

$$\left(\frac{a-7}{3a-1} + \frac{a-7}{a+1}\right) \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} = \frac{a-7}{3a-1} \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} + \frac{a-7}{a+1} \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} = \\ = \frac{1 \cdot a^{-1}}{a} + \frac{3a-1}{a(a+1)} = \frac{a+1+3a-1}{a(a+1)} = \frac{4a}{a(a+1)} = \frac{4}{a+1}.$$

Тождество доказано. ■

**Пример 4.** Упростите выражение  $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}}$ .

**Решение.** Записав данное выражение в виде частного от деления числителя на знаменатель, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}} &= \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) : \left( \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \right) = \\ &= \frac{bc + ac + ab}{abc} : \frac{c + a + b}{abc} = \frac{bc + ac + ab}{abc} \cdot \frac{abc}{c + a + b} = \frac{bc + ac + ab}{c + a + b}. \end{aligned}$$

Данное выражение можно упростить иным способом, используя основное свойство дроби, а именно умножить её числитель и знаменатель на одночлен  $abc$ :

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}} &= \frac{\left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) abc}{\left( \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \right) abc} = \frac{\frac{1}{a} \cdot abc + \frac{1}{b} \cdot abc + \frac{1}{c} \cdot abc}{\frac{1}{ab} \cdot abc + \frac{1}{bc} \cdot abc + \frac{1}{ac} \cdot abc} = \\ &= \frac{bc + ac + ab}{c + a + b}. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\frac{bc + ac + ab}{c + a + b}$ .

## Упражнения

**39.1.** Выполните действия:

- 1)  $\frac{a+2}{a^2-2a+1} : \frac{a^2-4}{3a-3} - \frac{3}{a-2}$ ;
- 2)  $\frac{b^2+3b}{b^3+9b} \cdot \left( \frac{b-3}{b+3} + \frac{b+3}{b-3} \right)$ ;
- 3)  $\left( \frac{1}{a^2-4ab+4b^2} - \frac{1}{4b^2-a^2} \right) : \frac{2a}{a^2-4b^2}$ ;
- 4)  $\left( \frac{2x+1}{x^2+6x+9} - \frac{x-2}{x^2+3x} \right) : \frac{x^2+6}{x^3-9x}$ .

**39.2.** Выполните действия:

$$1) \frac{b+4}{b^2-6b+9} : \frac{b^2-16}{2b-6} - \frac{2}{b-4};$$

$$2) \frac{2x}{x^2-y^2} : \left( \frac{1}{x^2+2xy+y^2} - \frac{1}{y^2-x^2} \right);$$

$$3) \left( \frac{2a-3}{a^2-4a+4} - \frac{a-1}{a^2-2a} \right) : \frac{a^2-2}{a^3-4a}.$$

**39.3.** Упростите выражение:

$$1) \left( \frac{15}{x-7} - x - 7 \right) \cdot \frac{7-x}{x^2-16x+64};$$

$$2) \left( \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{a}{b^2} \right) \cdot \frac{ab}{a^2-b^2} + \frac{2}{b-a};$$

$$3) \left( \frac{a}{a-1} - \frac{a}{a+1} - \frac{a^2+1}{1-a^2} \right) : \frac{a^2+a}{(a-1)^2};$$

$$4) \left( \frac{x+2y}{x-2y} - \frac{x-2y}{x+2y} - \frac{16y^2}{x^2-4y^2} \right) : \frac{4y}{x+2y};$$

$$5) \left( \frac{3a-8}{a^2-2a+4} + \frac{1}{a+2} - \frac{4a-28}{a^3+8} \right) \cdot \frac{a^2-4}{4}.$$

**39.4.** Упростите выражение:

$$1) \frac{x^2+14x+49}{x+6} : \left( \frac{13}{x+6} - x + 6 \right);$$

$$2) \left( c - \frac{2c-9}{c+8} \right) : \frac{c^2+3c}{c^2-64} + \frac{24}{c};$$

$$3) \left( \frac{36}{x^2-9} - \frac{x-3}{x+3} - \frac{3+x}{3-x} \right) : \frac{6}{3-x};$$

$$4) \left( \frac{2y-1}{y^2+2y+4} + \frac{9y+6}{y^3-8} + \frac{1}{y-2} \right) \cdot \frac{y^2-4}{18}.$$

**39.5.** Докажите тождество:

$$1) \left( \frac{ab}{a^2-b^2} + \frac{b}{2b-2a} \right) : \frac{2b}{a^2-b^2} = \frac{a-b}{4};$$

$$2) \left( \frac{8a}{4-a^2} - \frac{a-2}{a+2} \right) : \frac{a+2}{a} + \frac{2}{a-2} = -1;$$

$$3) \left( \frac{3}{36-c^2} + \frac{1}{c^2-12c+36} \right) \cdot \frac{(c-6)^2}{2} + \frac{3c}{c+6} = 2.$$

**39.6.** Докажите тождество:

$$1) \left( \frac{b}{a^2 - ab} - \frac{2}{a - b} - \frac{a}{b^2 - ab} \right) : \frac{a^2 - b^2}{4ab} = \frac{4}{a + b};$$

$$2) \frac{(a - b)^2}{a} \cdot \left( \frac{a}{(a - b)^2} + \frac{a}{b^2 - a^2} \right) + \frac{3a + b}{a + b} = 3.$$

**39.7.** Зависит ли значение выражения от значения входящей в него переменной:

$$1) \left( \frac{a + 3}{a^2 - 1} - \frac{1}{a^2 + a} \right) : \frac{3a + 3}{a^2 - a};$$

$$2) \left( \frac{a}{a^2 - 49} - \frac{1}{a + 7} \right) : \frac{7a}{a^2 + 14a + 49} - \frac{2}{a - 7}?$$

**39.8.** Докажите, что значение выражения не зависит от значения входящей в него переменной:

$$1) \frac{3x^2 - 27}{4x^2 + 2} \cdot \left( \frac{6x + 1}{x - 3} + \frac{6x - 1}{x + 3} \right);$$

$$2) \frac{3}{2a - 3} - \frac{8a^3 - 18a}{4a^2 + 9} \cdot \left( \frac{2a}{4a^2 - 12a + 9} - \frac{3}{4a^2 - 9} \right).$$

**39.9.** Упростите выражение:

$$1) \frac{a - \frac{a^2}{a + 1}}{a - \frac{a}{a + 1}}; \quad 3) 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a + 1}}};$$

$$2) \frac{a - \frac{6a - 9}{a}}{1 - \frac{3}{a}}; \quad 4) \frac{\frac{2a - b}{b} + 1}{\frac{2a + b}{b} - 1} + \frac{3 - \frac{b}{a}}{\frac{3a}{b} - 1}.$$

**39.10.** Упростите выражение:

$$1) \frac{\frac{a - b}{a + b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{a + b} - \frac{a - b}{a}}; \quad 2) \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a + 1}}}.$$

**39.11.** Упростите выражение:

$$1) \left( \frac{a^2}{b^3 - ab^2} + \frac{a - b}{b^2} - \frac{1}{b} \right) : \left( \frac{a + b}{b - a} - \frac{b - a}{a + b} + \frac{6a^2}{a^2 - b^2} \right);$$

$$2) \left( \frac{a + 2}{4a^3 - 4a^2 + a} - \frac{2 - a}{1 - 8a^3} \cdot \frac{4a^2 + 2a + 1}{2a^2 + a} \right) : \left( \frac{1}{1 - 2a} \right)^2 - \frac{8a - 1}{2a^2 + a};$$

$$3) (a^2 - b^2) \cdot \left( \frac{2a^2b + 2ab^2}{7a^3 + a^2b + 7ab^2 + b^3} \cdot \frac{7a + b}{a^2 - b^2} + \frac{a - b}{a^2 + b^2} \right).$$

**39.12.** Упростите выражение:

$$1) \left( \frac{18y^2 + 3y}{27y^3 - 1} - \frac{3y + 1}{9y^2 + 3y + 1} \right) : \left( 1 - \frac{3y - 1}{y} - \frac{5 - 6y}{3y - 1} \right);$$

$$2) \left( 3 + \frac{(a + b)^2}{(a - b)^2} \right) : \left( 3 + \frac{(a - b)^2}{(a + b)^2} \right) \cdot \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}.$$

**39.13.** Докажите тождество:

$$1) \frac{16}{(a - 2)^4} : \left( \frac{1}{(a - 2)^2} - \frac{2}{a^2 - 4} + \frac{1}{(a + 2)^2} \right) - \frac{8a}{(a - 2)^2} = 1;$$

$$2) \frac{a + 11}{a + 9} - \left( \frac{a + 5}{a^2 - 81} + \frac{a + 7}{a^2 - 18a + 81} \right) : \left( \frac{a + 3}{a - 9} \right)^2 = 1;$$

$$3) \left( a^2 - b^2 - \frac{4a^2b - 4ab^2}{a + b} \right) : \left( \frac{a}{a + b} - \frac{b}{b - a} - \frac{2ab}{a^2 - b^2} \right) = (a - b)^2.$$

**39.14.** Докажите, что при всех допустимых значениях переменной выражение  $\frac{b^2 + 9}{3b^2 - b^3} + \left( \frac{b + 3}{b - 3} \right)^2 \cdot \left( \frac{1}{b - 3} + \frac{6}{9 - b^2} - \frac{3}{b^2 + 3b} \right)$  принимает положительные значения.



**39.15.** Упростите выражение:

$$1) \left( \frac{1}{2 - a} + \frac{6a - 4 - a^2}{a^3 - 8} - \frac{2 - a}{a^2 + 2a + 4} \right) \cdot \frac{a^3 + 4a^2 + 8a + 8}{4 - 4a + a^2 - a^3};$$

$$2) \left( \frac{x - 2y}{x^3 + y^3} + \frac{y}{x^3 - x^2y + xy^2} \right) : \frac{x^2 + y^2}{x^3 - xy^2} + \frac{2y^2}{x^3 + x^2y + xy^2 + y^3};$$

$$3) \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b - c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b - c}} \cdot \left( 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) : \frac{b - a - c}{abc}.$$

**39.16.** Докажите, что значение выражения положительно при всех допустимых значениях переменных:

$$1) \frac{2}{(a + b)^3} \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{a^2 + b^2 + 2ab} \cdot \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right);$$

$$2) \left( \frac{a^2}{4b^3} + \frac{2}{a} \right) : \left( \frac{a}{2b^2} - \frac{1}{b} + \frac{2}{a} \right) : \frac{(a - 2b)^2 + 8ab}{4 + \frac{2a}{b}}.$$

**39.17.** Упростите выражение

$$\left( \frac{3(x+2)}{2(x^3+x^2+x+1)} + \frac{2x^2-x-10}{2(x^3-x^2+x-1)} \right) : \left( \frac{5}{x^2+1} + \frac{3}{2(x+1)} - \frac{3}{2(x-1)} \right).$$

**39.18.** Докажите тождество

$$\frac{\left( \frac{a^3}{(b-1)^3} + 1 \right) \left( \frac{a}{b-1} - 1 \right)}{\left( \frac{a^2}{(b-1)^2} - 1 \right) \left( \frac{a^2}{(b-1)^2} - \frac{a}{b-1} + 1 \right)} = 1.$$

**39.19.** Упростите выражение

$$\frac{1}{(a+b)^3} \cdot \left( \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \right) + \frac{3}{(a+b)^4} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{6}{(a+b)^5} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

**39.20.** Упростите выражение

$$\frac{1}{(a+b)^3} \cdot \left( \frac{1}{a^4} - \frac{1}{b^4} \right) + \frac{2}{(a+b)^4} \left( \frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} \right) + \frac{2}{(a+b)^5} \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right).$$

**39.21.** Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что  $a + b + c = 7$ ,  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 0,7$ .

Найдите значение выражения  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ .

**39.22.** Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что  $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$ . Докажите, что

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

**39.23.** Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ . Докажите, что

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0.$$

**39.24.** Найдите сумму  $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{n}}}}}}$  +  $\frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{n}}}}}$ .

□♦♦□

### Упражнения для повторения

**39.25.** Докажите, что значение выражения  $2^{14} - 2^{12} - 2^{10}$  делится нацело на 11.

**39.26.** Докажите, что при любом натуральном  $n$  значение выражения  $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$  делится нацело на 10.



Аналогично можно договориться, что, например,  $\frac{1}{5^2} = 5^{-2}$ ,  
 $\frac{1}{(-3)^5} = (-3)^{-5}$ ,  $\frac{1}{0,7} = (0,7)^{-1}$ .

□□⇒

**Для любого числа  $a$ , не равного нулю, и натурального числа  $n$  выполняется равенство**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Из определения следует, что, например,  $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ ,  $(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$ ,  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 16$ ,  $(0,3)^{-1} = \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3}$ .

Итак, вы умеете возводить число в любую целую степень, кроме нуля.

□□⇒

**Для любого числа  $a$ , не равного нулю,  $a^0 = 1$ .**

Например,  $5^0 = 1$ ,  $(-17)^0 = 1$ ,  $\left(-\frac{4}{3}\right)^0 = 1$ ,  $\pi^0 = 1$ .

*Замечание.* Выражение  $0^n$  при целых  $n$ , меньших или равных нулю, не определено.

Из данных определений следует, что при любом  $a \neq 0$  и  $n \in \mathbf{Z}$  числа  $a^n$  и  $a^{-n}$  являются взаимно обратными. Поэтому равенство

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

выполняется при любом целом  $n$ .

Например, при  $n = -2$  имеем  $a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$ .

**Пример 1.** Найдите значение выражения: 1)  $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1}$ ; 2)  $1,2^{-2}$ ; 3)  $3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4,3^0$ .

**Решение.** 1)  $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{4}{7}} = \frac{7}{4}$ .

Вообще, если  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$ , то  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ .

$$2) 1,2^{-2} = \left(\frac{12}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}.$$

$$3) 3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4,3^0 = \frac{1}{3^3} \cdot 15 + \frac{1}{6^2} \cdot 8 - 1 = \frac{1}{27} \cdot 15 + \frac{1}{36} \cdot 8 - 1 = \\ = \frac{5}{9} + \frac{2}{9} - 1 = -\frac{2}{9}.$$

**Пример 2.** Представьте выражение  $(a - b)^{-2}(a^{-2} - b^{-2})$  в виде рациональной дроби.

**Решение.**  $(a - b)^{-2}(a^{-2} - b^{-2}) = \frac{1}{(a - b)^2} \cdot \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{1}{(a - b)^2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} = \\ = \frac{1}{(b - a)^2} \cdot \frac{(b - a)(b + a)}{a^2 b^2} = \frac{b + a}{a^2 b^2 (b - a)} = \frac{b + a}{a^2 b^3 - a^3 b^2}.$

В справочной литературе вы можете найти такую информацию: «Масса Венеры равна  $4,9 \cdot 10^{24}$  кг. Масса Марса равна  $6,423 \cdot 10^{23}$  кг. Площадь поверхности Луны равна  $3,8 \cdot 10^7$  км<sup>2</sup>».

Эти числа записаны в виде, который называют **стандартным видом числа**.

□ ⇨ (См. приложение 1)

**Стандартным видом числа называют его запись в виде произведения  $a \cdot 10^n$ , где  $1 \leq a < 10$  и  $n \in \mathbb{Z}$ .**

Число  $n$  называют **порядком числа**, записанного в стандартном виде. Например, порядок числа, выражающего массу Солнца в килограммах, равен 30, а порядок числа, выражающего массу атома водорода в килограммах, равен -27.

В стандартном виде можно записать любое положительное число. Например,  $171,25 = 1,7125 \cdot 10^2$ ;  $0,00958 = 9,58 \cdot 10^{-3}$ . Однако на практике стандартный вид числа используют для записи больших и малых значений величин. При этом порядок числа даёт представление о величине. Например, если порядок числа  $m$  равен 3, т. е.  $m = a \cdot 10^3$ , то с учётом того, что  $1 \leq a < 10$ , получаем:  $10^3 \leq m < 10^4$ .

**Пример 3.** Запишите в стандартном виде число: 1) 564 000 000; 2) 0,0036.

**Решение.** 1)  $564\,000\,000 = 5,64 \cdot 100\,000\,000 = 5,64 \cdot 10^8$ .

2)  $0,0036 = 3,6 \cdot 0,001 = 3,6 \cdot \frac{1}{1000} = 3,6 \cdot \frac{1}{10^3} = 3,6 \cdot 10^{-3}$ .

- ? 1. Чему равно  $a^{-n}$ , если  $a$  — любое число, отличное от нуля, и  $n \in \mathbb{N}$ ?  
 2. Чему равна нулевая степень любого отличного от нуля числа?  
 3. Что называют стандартным видом числа?  
 4. Как в записи числа в стандартном виде  $a \cdot 10^n$  называют число  $n$ ?

### Упражнения

40.1. Какому из выражений равно выражение  $a^{-6}$ :

- 1)  $-a^6$ ;      2)  $\frac{1}{a^{-6}}$ ;      3)  $\frac{1}{a^6}$ ;      4)  $-\frac{1}{a^6}$ ?

40.2. Представьте степень в виде выражения, не содержащего степеней с отрицательными показателями:

- 1)  $5^{-6}$ ;      2)  $d^{-3}$ ;      3)  $m^{-1}$ ;      4)  $(a - b)^{-2}$ .

40.3. Представьте степень в виде выражения, не содержащего степеней с отрицательными показателями:

- 1)  $14^{-4}$ ;      2)  $p^{-20}$ ;      3)  $(m + n)^{-1}$ ;      4)  $(4c - 5d)^{-10}$ .

40.4. Представьте дробь в виде степени с целым отрицательным показателем или в виде произведения степеней:

- 1)  $\frac{1}{x^5}$ ;      2)  $\frac{m}{n^3}$ ;      3)  $\frac{x^6}{y^7}$ ;      4)  $\frac{(x - y)^2}{x + y}$ .

40.5. Замените дробь степенью с целым отрицательным показателем или произведением степеней:

- 1)  $\frac{1}{k^4}$ ;      2)  $\frac{x^2}{y}$ ;      3)  $\frac{m^6}{n^6}$ ;      4)  $\frac{(2x - y)^3}{(x - 2y)^9}$ .

40.6. Представьте числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{16}$ ,  $\frac{1}{32}$ ,  $\frac{1}{64}$  в виде степени с основанием: 1) 2; 2)  $\frac{1}{2}$ .

40.7. Представьте числа 1, 3, 9, 27, 81,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{9}$ ,  $\frac{1}{27}$ ,  $\frac{1}{81}$  в виде степени с основанием: 1) 3; 2)  $\frac{1}{3}$ .

40.8. Представьте в виде степени однозначного натурального числа дробь:

- 1)  $\frac{1}{49}$ ;      2)  $\frac{1}{216}$ ;      3)  $\frac{1}{625}$ ;      4)  $\frac{1}{128}$ .

40.9. Представьте в виде степени с основанием 10 число:

- 1) 0,1;      2) 0,01;      3) 0,0001;      4) 0,000001.

40.10. Вычислите:

- 1)  $5^{-2}$ ;      3)  $(-9)^{-2}$ ;      5)  $1^{-24}$ ;      7)  $(-1)^{-17}$ ;      9)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ ;  
 2)  $2^{-4}$ ;      4)  $0,2^{-3}$ ;      6)  $(-1)^{-16}$ ;      8)  $\left(\frac{7}{8}\right)^0$ ;      10)  $\left(-1\frac{1}{6}\right)^{-2}$ .

**40.11.** Найдите значение выражения:

1)  $20^{-2}$ ;      3)  $(-6)^{-3}$ ;      5)  $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-3}$ ;

2)  $0,3^{-1}$ ;      4)  $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$ ;      6)  $\left(3\frac{1}{3}\right)^{-2}$ .

**40.12.** Вычислите значение выражения:

1)  $3^{-1} - 4^{-1}$ ;      3)  $0,5^{-2} \cdot 4^{-1}$ ;

2)  $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + (-2,3)^0 - 5^{-2}$ ;      4)  $(2^{-1} - 8^{-1} \cdot 16)^{-1}$ .

**40.13.** Чему равно значение выражения:

1)  $2^{-2} + 2^{-1}$ ;      3)  $0,03^0 + 0,7^0$ ;

2)  $3^{-2} - 6^{-1}$ ;      4)  $(9 \cdot 3^{-3} - 12^{-1})^{-1}$ ?

**40.14.** Какое из данных чисел записано в стандартном виде:

1)  $12 \cdot 10^4$ ;      2)  $1,2 \cdot 10^4$ ;      3)  $0,12 \cdot 10^4$ ?

**40.15.** Запишите число в стандартном виде и укажите порядок числа:

1) 3400;      3) 0,0046;      5) 0,73;      7)  $0,23 \cdot 10^4$ ;

2) 15;      4) 0,000008;      6)  $250 \cdot 10^2$ ;      8)  $9300 \cdot 10^5$ .

**40.16.** Используя стандартный вид числа, запишите:

1) скорость света в вакууме равна 300 000 км/с;

2) длина реки Лены, самой протяжённой реки России, равна 4400 км;

3) площадь озера Байкал составляет 32 000 км<sup>2</sup>;

4) расстояние от Земли до Солнца составляет 149,6 млн км;

5) атмосферное давление на высоте 100 км составляет 0,032 Па;

6) диаметр молекулы воды равен 0,00000028 мм.

**40.17.** Запишите число в стандартном виде и укажите порядок числа:

1) 45 000;      3) 0,00024;      5)  $0,059 \cdot 10^8$ ;

2) 260;      4) 0,032;      6)  $526 \cdot 10^4$ .

**40.18.** Данное число представлено в стандартном виде. Запишите его в виде натурального числа или десятичной дроби:

1)  $1,6 \cdot 10^3$ ;      2)  $5,7 \cdot 10^6$ ;      3)  $2,1 \cdot 10^{-2}$ ;      4)  $1,1 \cdot 10^{-5}$ .

**40.19.** Данное число представлено в стандартном виде. Запишите его в виде натурального числа или десятичной дроби:

1)  $2,4 \cdot 10^2$ ;      2)  $4,8 \cdot 10^5$ ;      3)  $1,4 \cdot 10^{-3}$ ;      4)  $8,6 \cdot 10^{-4}$ .

**40.20.** Докажите, что  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ .

© ЛГ

**40.21.** Найдите значение выражения:

1)  $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot 10^{-1} + 9^0 - (-2)^3 + \left(\frac{2}{9}\right)^{-2} \cdot (-1,5)^{-3}$ ;

2)  $(2,5)^{-2} - (8^5)^0 + \left(1\frac{2}{3}\right)^{-3} + 0,1^{-1}$ .

**40.22.** Расположите в порядке убывания:

1)  $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ ,  $\left(\frac{1}{2}\right)^0$ ,  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ ,  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ ;      2)  $4^{-1}$ ,  $4^3$ ,  $4^0$ ,  $4^{-2}$ .

**40.23.** Расположите в порядке возрастания:

1)  $7^{-2}$ ,  $7^2$ ,  $7^{-1}$ ,  $7^0$ ;      2)  $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ ,  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ ,  $\left(\frac{1}{3}\right)^0$ ,  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ .

**40.24.** Сравните значения выражений:

1)  $12^0$  и  $(-6)^0$ ;      4)  $3^{-1} \cdot 7^{-1}$  и  $21^{-1}$ ;  
2)  $0,2^3$  и  $0,2^{-3}$ ;      5)  $5^{-1} - 7^{-1}$  и  $2^{-1}$ ;  
3)  $4^6$  и  $0,25^{-6}$ ;      6)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$  и  $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)^{-1}$ .

**40.25.** Сравните значения выражений:

1)  $3^{-2}$  и  $(-3)^0$ ;  
2)  $3^{-1} + 2^{-1}$  и  $5^{-1}$ ;  
3)  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$  и  $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)^{-2}$ .

**40.26.** Представьте в виде дроби выражение:

1)  $ab^{-1} + a^{-1}b$ ;      4)  $(a + b)^{-1} \cdot (a^{-1} + b^{-1})$ ;  
2)  $3a^{-1} + ab^{-2}$ ;      5)  $(c^{-2} - d^{-2}) : (c + d)$ ;  
3)  $m^2n^2(m^{-3} - n^{-3})$ ;      6)  $(xy^{-2} + x^{-2}y) \cdot \left(\frac{x^2 - xy + y^2}{x}\right)^{-1}$ .

**40.27.** Представьте в виде дроби выражение:

1)  $a^{-2} + a^{-3}$ ;      3)  $(c^{-1} - d^{-1}) \cdot (c - d)^{-2}$ ;  
2)  $mn^{-4} + m^{-4}n$ ;      4)  $(x^{-2} + y^{-2}) \cdot (x^2 + y^2)^{-1}$ .

**40.28.** Докажите, что при любом  $n \in \mathbf{Z}$ :

©<sub>ИП</sub> 1) если  $a > 0$ , то  $a^n > 0$ ;  
2) если  $a < 0$ , то  $a^n > 0$  при чётном  $n$  и  $a^n < 0$  при нечётном  $n$ .

**40.29.** Верно ли неравенство  $a^n > a^{-n}$ , если:

1)  $a > 1$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ;      2)  $0 < a < 1$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ?

**40.30.** Порядок некоторого натурального числа равен 4. Сколько цифр содержит десятичная запись этого числа?

**40.31.** Десятичная запись некоторого натурального числа состоит из семи цифр. Чему равен порядок этого числа?

**40.32.** Какое число больше:

1)  $9,7 \cdot 10^{11}$  или  $1,2 \cdot 10^{12}$ ;      3)  $2,34 \cdot 10^6$  или  $0,23 \cdot 10^7$ ;  
2)  $3,6 \cdot 10^{-5}$  или  $4,8 \cdot 10^{-6}$ ;      4)  $42,7 \cdot 10^{-9}$  или  $0,072 \cdot 10^{-7}$ ?

**40.33.** Какое число меньше:

1)  $6,1 \cdot 10^{19}$  или  $6,15 \cdot 10^{18}$ ;      2)  $1,5 \cdot 10^{-9}$  или  $0,9 \cdot 10^{-8}$ ?

**40.34.** В таблице приведены расстояния от Солнца до планет Солнечной системы.

Планета	Расстояние, км
Венера	$1,082 \cdot 10^8$
Земля	$1,495 \cdot 10^8$
Марс	$2,280 \cdot 10^8$
Меркурий	$5,790 \cdot 10^7$
Нептун	$4,497 \cdot 10^9$
Сатурн	$1,427 \cdot 10^9$
Уран	$2,871 \cdot 10^9$
Юпитер	$7,781 \cdot 10^8$

1) Какая планета находится на наименьшем расстоянии от Солнца, а какая — на наибольшем?

2) Какая из планет, Марс или Сатурн, находится дальше от Солнца?

3) Составьте таблицу, записав в левом столбце названия планет в порядке увеличения расстояния от них до Солнца, а в правом — расстояния от них до Солнца, выраженные в миллионах километров.

**40.35.** В таблице приведены массы атомов некоторых химических элементов.

Химический элемент	Масса атома, кг	Химический элемент	Масса атома, кг
Алюминий	$4,48 \cdot 10^{-26}$	Медь	$1,05 \cdot 10^{-25}$
Гелий	$6,64 \cdot 10^{-27}$	Олово	$1,97 \cdot 10^{-25}$
Водород	$1,67 \cdot 10^{-27}$	Натрий	$3,81 \cdot 10^{-26}$
Азот	$2,32 \cdot 10^{-26}$	Золото	$3,27 \cdot 10^{-25}$
Железо	$9,28 \cdot 10^{-26}$	Уран	$3,95 \cdot 10^{-25}$

- 1) Масса атома какого из данных элементов наименьшая, а какого — наибольшая?
- 2) У какого из элементов, меди или натрия, масса атома больше?
- 3) Составьте таблицу, упорядочив элементы в порядке уменьшения массы их атомов.

**40.36.** В таблице приведены запасы некоторых веществ в минеральных ресурсах мира.

Вещество	Запасы, т	Вещество	Запасы, т
Алюминий	$1,1 \cdot 10^9$	Никель	$6,8 \cdot 10^7$
Вольфрам	$1,3 \cdot 10^6$	Олово	$4,76 \cdot 10^6$
Железо	$8,8 \cdot 10^{10}$	Ртуть	$1,15 \cdot 10^5$
Золото	$1,1 \cdot 10^4$	Хром	$4,4 \cdot 10^9$
Медь	$2,8 \cdot 10^9$	Цинк	$1,12 \cdot 10^8$

- 1) Запасы какого из данных веществ наибольшие, а какого — наименьшие?
- 2) Запасы какого из веществ, никеля или цинка, больше?
- 3) Составьте таблицу минеральных ресурсов, разместив вещества в порядке уменьшения их запасов.

### Упражнения для повторения

**40.37.** Масса чугунной болванки 16 кг. Какое наименьшее количество болванок потребуется, чтобы отлить 41 деталь массой 12 кг каждая?

**40.38.** В некотором городе на сегодняшний день проживает 88 200 жителей. Сколько жителей было в этом городе два года назад, если ежегодный прирост населения составлял 5 %?

**40.39.** Упростите выражение:

$$\frac{2a^2 + 2}{a^2 - 1} - \frac{a + 1}{a - 1} + \frac{3a - 3}{2a + 2}$$

**40.40.** Можно ли утверждать, что при любом натуральном  $n$  значение выражения  $(5n + 6,5)^2 - (2n + 0,5)^2$  кратно 42?

В главе 2 вы изучили свойства степени с натуральным показателем. Они остаются справедливыми и для степени с любым целым показателем.

□ □ ⇨ Теорема 41.1

Для любого  $a \neq 0$  и любых целых  $m$  и  $n$  выполняются равенства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad (1)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}. \quad (2)$$

□ □ ⇨ Теорема 41.2

Для любых  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$  и любого целого  $n$  выполняется равенство

$$(ab)^n = a^n b^n. \quad (3)$$

Равенство (1) выражает основное свойство степени. Докажем его.

Доказательство.

Для натуральных  $m$  и  $n$  это равенство уже было доказано в главе 2.

Рассмотрим теперь случай, когда  $m$  и  $n$  — целые отрицательные числа.

Если  $m$  и  $n$  — целые отрицательные числа, то  $-m$  и  $-n$  — натуральные числа. Тогда  $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m+(-n)} = a^{-m-n}$ .

$$\text{Имеем: } a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

Для завершения доказательства основного свойства степени следует рассмотреть ещё такие случаи: один из показателей степени  $m$  или  $n$  отрицательный, а другой — положительный; один или оба показателя равны нулю. Рассмотрите эти случаи самостоятельно.

Равенства (2) и (3) доказывают аналогично. □ □

Из основного свойства степени получаем такое важное следствие.

□ □ ⇨ Теорема 41.3

Для любого  $a \neq 0$  и любых целых  $m$  и  $n$  выполняется равенство

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \quad (4)$$

Доказательство.

$$\text{Имеем: } a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}. \quad \square \square$$

Из свойств (2) и (3) можно получить ещё одно свойство степени с целым показателем.

□ □ □ Теорема 4.1.4

Для любых  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$  и любого целого  $n$  выполняется равенство

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \quad (5)$$

Доказательство.

$$\text{Имеем: } \left(\frac{a}{b}\right)^n = (a \cdot b^{-1})^n = a^n \cdot (b^{-1})^n = a^n \cdot b^{-n} = \frac{a^n}{b^n}. \quad \square$$

Свойства (1)–(5) называют свойствами степени с целым показателем.

**Пример 1.** Представьте в виде степени выражение  $(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^6$ .

**Решение.** Применяв последовательно правила возведения степени в степень (свойство (2)), умножения и деления степеней с одинаковыми основаниями (свойства (1) и (4)), получаем:

$$(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^6 = a^{-4 \cdot (-2)} \cdot a^{-7} : a^6 = a^8 \cdot a^{-7} : a^6 = a^{8+(-7)-6} = a^{-5}. \quad \blacksquare$$

**Пример 2.** Найдите значение выражения:

$$1) 16^{-9} \cdot 8^{12}; \quad 2) \frac{6^{-3}}{18^{-3}}; \quad 3) \left(1 \frac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^{-5}.$$

**Решение.** 1) Представив числа 16 и 8 в виде степеней с основанием 2, получаем:

$$16^{-9} \cdot 8^{12} = (2^4)^{-9} \cdot (2^3)^{12} = 2^{-36} \cdot 2^{36} = 2^0 = 1.$$

2) Используя правило возведения дроби в степень (свойство (5)), получаем:

$$\frac{6^{-3}}{18^{-3}} = \left(\frac{6}{18}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27.$$

$$\begin{aligned} 3) \left(1 \frac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^{-5} &= \left(\frac{36}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\left(\frac{6}{5}\right)^2\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \\ &= \left(\frac{6}{5}\right)^{-16} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\frac{5}{6}\right)^{16} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \frac{5}{6}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Пример 3.** Упростите выражение: 1)  $0,6m^2n^{-6} \cdot \frac{1}{3}m^{-4}n^3$ ;

$$2) (a^{-2} + 9)(a^{-2} - 4) - (a^{-2} + 6)(a^{-2} - 6).$$

**Решение.** 1)  $0,6m^2n^{-6} \cdot \frac{1}{3}m^{-4}n^3 = \left(0,6 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot (m^2 \cdot m^{-4}) \cdot (n^{-6} \cdot n^3) = 0,2m^{-2}n^{-3}$ .

2)  $(a^{-2} + 9)(a^{-2} - 4) - (a^{-2} + 6)(a^{-2} - 6) = a^{-4} - 4a^{-2} + 9a^{-2} - 36 - a^{-4} + 36 = 5a^{-2}$ . ■

**Пример 4.** Выполните умножение  $(3,4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8})$  и результат запишите в стандартном виде.

**Решение.**  $(3,4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8}) = (3,4 \cdot 7) \cdot (10^{14} \cdot 10^{-8}) = 23,8 \cdot 10^6 = 2,38 \cdot 10 \cdot 10^6 = 2,38 \cdot 10^7$ . ✎



Сформулируйте свойства степени с целым показателем.

## Упражнения

**41.1.** Найдите значение выражения:

1)  $9^5 \cdot 9^{-7}$ ;      4)  $2^{-9} \cdot 2^{-12} : 2^{-22}$ ;      7)  $3^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ ;

2)  $10^{-8} \cdot 10^{12}$ ;      5)  $(17^4)^{-12} \cdot (17^{-6})^{-8}$ ;      8)  $\frac{14^{-5}}{7^{-5}}$ .

3)  $3^{-18} : 3^{-21}$ ;      6)  $\frac{6^{-5} \cdot (6^{-3})^4}{(6^{-7})^2 \cdot 6^{-3}}$ ;

**41.2.** Найдите значение выражения:

1)  $5^{-7} : 5^{-6} \cdot 5^3$ ;      2)  $\frac{4^{-7} \cdot (4^{-5})^3}{(4^{-3})^7}$ ;      3)  $0,8^{-4} \cdot \left(1\frac{1}{4}\right)^{-4}$ ;      4)  $\frac{11^{-2}}{22^{-2}}$ .

**41.3.** Упростите выражение:

1)  $3a^{-3} \cdot 4a^{-4}$ ;      5)  $\frac{kp^{-6}}{k^4p^4}$ ;      9)  $\frac{13m^{-10}}{12n^{-8}} \cdot \frac{27n}{26m^2}$ ;

2)  $\frac{10b^{-4}}{15b^{-5}}$ ;      6)  $(c^{-6}d^2)^{-7}$ ;      10)  $\frac{18p^{-6}k^2}{7} : \frac{15k^{-2}}{p^6}$ .

3)  $(2c^{-6})^4$ ;      7)  $0,2c^{-3}d^5 \cdot 1,5c^{-2}d^{-5}$ ;

4)  $m^{-2}n \cdot mn^{-2}$ ;      8)  $4x^8 \cdot (-3x^{-2}y^4)^{-2}$ ;

**41.4.** Упростите выражение:

1)  $2a^{-5}b^2 \cdot 3a^{-2}b^{-5}$ ;      4)  $0,8a^{-6}b^8 \cdot 5a^{10}b^{-8}$ ;

2)  $\left(\frac{1}{2}mn^{-3}\right)^{-2}$ ;      5)  $\frac{25x^{-3}}{y^{-4}} \cdot \frac{y^4}{5x^{-7}}$ ;

3)  $\frac{3,6a^2b}{0,9a^3b^{-3}}$ ;      6)  $28c^3d^{-2} \cdot (2cd^{-1})^{-2}$ .

**41.5.** Найдите значение выражения:

1)  $8^{-3} \cdot 2^7$ ;

3)  $25^{-4} : (0,2^{-3})^{-2}$ ;

5)  $\frac{6^{-10}}{81^{-2} \cdot 16^{-3}}$ ;

2)  $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{-3}$ ;

4)  $\frac{(-36)^{-3} \cdot 6^8}{216^{-5} \cdot (-6)^{18}}$ ;

6)  $\frac{14^5 \cdot 2^{-7}}{28^{-2} \cdot 7^8}$ .

**41.6.** Найдите значение выражения:

1)  $9^{-4} \cdot 27^2$ ;

3)  $\left(2\frac{7}{9}\right)^{-7} \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\right)^5$ ;

5)  $\frac{22^6 \cdot 2^{-8}}{44^{-3} \cdot 11^9}$ ;

2)  $32^{-5} : 64^{-4}$ ;

4)  $8^{-2} : 0,5^4$ ;

6)  $\frac{10^{-2} \cdot 15^{-4}}{30^{-6}}$ .

**41.7.** Выполните действия и приведите полученное выражение к виду, не содержащему степени с отрицательным показателем:

1)  $-2,4a^{-4}b^3 \cdot (-2a^{-3}c^{-5})^{-3}$ ;

4)  $\left(-\frac{1}{6}a^{-3}b^{-6}\right)^{-3} \cdot (-6a^2b^9)^{-2}$ ;

2)  $(-10x^{-2}yz^{-8})^{-2} \cdot (0,1yz^{-4})^{-2}$ ;

5)  $\left(\frac{7p^{-3}}{5k^{-1}}\right)^{-2} \cdot 49m^{-6}n^4$ ;

3)  $1\frac{7}{9}m^{-6}n \cdot \left(1\frac{1}{3}m^{-1}n^{-4}\right)^{-3}$ ;

6)  $\left(\frac{4x^{-5}}{3y^{-2}}\right)^{-3} \cdot (16x^{-6}y^4)^2$ .

**41.8.** Выполните действия и приведите полученное выражение к виду, не содержащему степени с отрицательным показателем:

1)  $3,6a^{-8}b^4 \cdot (-3a^{-3}b^{-7})^{-2}$ ;

3)  $\left(\frac{5m^{-4}}{6n^{-1}}\right)^{-3} \cdot 125m^{-10}n^2$ ;

2)  $1\frac{9}{16}x^{-6}y^2 \cdot \left(1\frac{1}{4}x^{-1}y^{-3}\right)^{-3}$ ;

4)  $\left(\frac{7a^{-6}}{b^5}\right)^{-2} \cdot (a^{-4}b)^4$ .

**41.9.** Вынесите за скобки степень с основанием  $a$  и наименьшим из данных показателей:

1)  $a^3 - 2a^4$ ;

2)  $a^{-3} - 2a^{-4}$ ;

3)  $a^3 - 2a^{-4}$ .

**41.10.** Вынесите за скобки степень с основанием  $b$  и наименьшим из данных показателей:

1)  $b^3 + 3b^2$ ;

2)  $b^{-3} + 3b^{-2}$ ;

3)  $b^{-3} + 3b^2$ .

**41.11.** Представьте в виде произведения выражение:

1)  $a^{-2} - 4$ ;

4)  $a^{-3} + b^{-3}$ ;

2)  $a^{-4}b^{-6} - 1$ ;

5)  $m^{-4} - 6m^{-2}p^{-1} + 9p^{-2}$ ;

3)  $25x^{-8}y^{-12} - z^{-2}$ ;

6)  $a^{-8} - 49a^{-2}$ .

**41.12.** Представьте в виде произведения выражение:

1)  $x^{-4} - 25$ ;

3)  $a^{-10} + 8a^{-5}b^{-7} + 16b^{-14}$ ;

2)  $m^{-6} - 8n^{-3}$ ;

4)  $a^{-4} - a^{-2}$ .

**41.13.** Выполните вычисления и результат запишите в стандартном виде:

1)  $(1,8 \cdot 10^4) \cdot (6 \cdot 10^3)$ ;      3)  $\frac{5,4 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^8}$ ;

2)  $(3 \cdot 10^6) \cdot (5,2 \cdot 10^{-9})$ ;      4)  $\frac{1,7 \cdot 10^{-6}}{3,4 \cdot 10^{-4}}$ .

**41.14.** Выполните вычисления и результат запишите в стандартном виде:

1)  $(1,6 \cdot 10^{-5}) \cdot (4 \cdot 10^7)$ ;      3)  $\frac{7 \cdot 10^{-4}}{1,4 \cdot 10^{-6}}$ ;

2)  $(5 \cdot 10^{-3}) \cdot (1,8 \cdot 10^{-1})$ ;      4)  $\frac{6,4 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-2}}$ .

**41.15.** Расстояние от Земли до Солнца равно  $1,5 \cdot 10^8$  км, а скорость света —  $3 \cdot 10^8$  м/с. За сколько минут свет от Солнца дойдёт до Земли? Ответ округлите до единиц.

**41.16.** Плотность меди равна  $8,9 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Найдите массу медной плитки, длина которой  $2,5 \cdot 10^{-1}$  м, ширина — 12 см, а высота — 0,02 м.

**41.17.** Масса Земли равна  $6 \cdot 10^{24}$  кг, а Луны —  $7,4 \cdot 10^{22}$  кг. Во сколько раз масса Луны меньше массы Земли? Ответ округлите до единиц.



**41.18.** Докажите тождество:

$$a^8 - b^8 = (a^4 - b^4)(a^4 + b^4) = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4).$$

**41.19.** Упростите выражение:

1)  $(a^4 + 3)(a^4 - 3) - (a^4 + 2)^2$ ;      3)  $\frac{2x^{-2} + y^{-2}}{3x^{-2} - 3x^{-1}y^{-1}} - \frac{x^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}}$ ;

2)  $\frac{m^{-2} - n^{-2}}{m^{-1} + n^{-1}}$ ;      4)  $\frac{a^{-5} + b^{-5}}{a^{-6}} : \frac{a^{-3}b^{-5} + a^{-8}}{a^{-4}}$ .

**41.20.** Упростите выражение:

1)  $(x^2 - 1)^2 - (x^2 - 4)(x^2 + 4)$ ;      3)  $\frac{5m^{-2} + n^{-2}}{4m^{-3} + 4m^{-1}n^{-2}} - \frac{m^{-1}}{m^{-2} + n^{-2}}$ ;

2)  $\frac{a^2 - 10a^{-1}b^{-1} + 25b^{-2}}{a^{-1} - 5b^{-1}}$ ;      4)  $\frac{b^{-1} + 3c^{-1}}{c^{-2}} \cdot \frac{bc}{b^{-2}c^{-1} + 3b^{-1}c^{-2}}$ .

**41.21.** Постройте график функции:

1)  $y = (x + 3)^0$ ;      3)  $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^0$ ;      5)  $y = x \cdot \left(\frac{x}{x+3}\right)^{-1}$ ;

2)  $y = \left(\frac{1}{x-2}\right)^{-1}$ ;      4)  $y = \left(\frac{x+2}{x^2-4}\right)^{-1}$ ;      6)  $y = \frac{(x^2-1)^0}{x^{-1}}$ .

**41.22.** Постройте график функции:

1)  $y = (x + 2)^0$ ;      2)  $y = \left(\frac{x-3}{x^2-9}\right)^{-1}$ ;      3)  $y = (x - 1) \left(\frac{x-1}{x}\right)^{-1}$ .

**41.23.** Назовите порядок числа  $x$ , если:

- 1)  $100 \leq x < 1000$ ;                      3)  $0,01 \leq x < 0,1$ ;  
2)  $10\,000 \leq x < 100\,000$ ;              4)  $0,0001 \leq x < 0,001$ .

**41.24.** Назовите порядок числа  $x$ , если:

- 1)  $10 \leq x < 100$ ;                      2)  $0,001 \leq x < 0,01$ .

**41.25.** Порядок числа  $a$  равен  $-4$ . Определите порядок числа:

- 1)  $10a$ ;                      3)  $100a$ ;                      5)  $10\,000a$ ;  
2)  $0,1a$ ;                      4)  $0,001a$ ;                      6)  $1\,000\,000a$ .

**41.26.** Порядок числа  $b$  равен  $3$ . Определите порядок числа:

- 1)  $10b$ ;                      2)  $0,01b$ ;                      3)  $0,0001b$ ;                      4)  $1000b$ .

**41.27.** Упростите выражение и запишите результат в виде рационального выражения, не содержащего степени с отрицательным показателем:

- 1)  $\left( \frac{a^{-1}}{a^{-1} + b^{-1}} - \frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-1}} \right) : \left( \frac{b}{a^2} \right)^{-1}$ ;  
2)  $\frac{b^{-2} - 2}{b^{-2}} - \frac{b^{-4} - 4}{b^{-2}} \cdot \frac{1}{b^{-2} - 2}$ ;  
3)  $\frac{5c^{-3}}{c^{-3} - 3} - \frac{c^{-3} + 6}{2c^{-3} - 6} \cdot \frac{90}{c^{-6} + 6c^{-3}}$ ;  
4)  $\left( \frac{m^{-4}}{m^{-4} - 4} - \frac{3m^{-4}}{m^{-8} - 8m^{-4} + 16} \right) \cdot \frac{16 - m^{-8}}{m^{-4} - 7} + \frac{8m^{-4}}{m^{-4} - 4}$ ;  
5)  $\frac{(a + b - 1)^{-1} + (a - b + 1)^{-1}}{2(a + b)} \cdot \left( \frac{1}{a^{-2}} - \frac{1}{(b - 1)^{-2}} \right)$ .

**41.28.** Упростите выражение и запишите результат в виде рационального выражения, не содержащего степени с отрицательным показателем:

- 1)  $\frac{a^{-2} + 5}{a^{-4} - 6a^{-2} + 9} : \frac{a^{-4} - 25}{4a^{-2} - 12} - \frac{2}{a^{-2} - 5}$ ;  
2)  $\left( b^{-1} - \frac{5b^{-1} - 36}{b^{-1} - 7} \right) \cdot \left( 2b^{-1} + \frac{2b^{-1}}{b^{-1} - 7} \right)^{-1}$ ;  
3)  $\frac{(x - 1)(x + 1)^{-2} - 2x(x^2 - 1)^{-1} + (x + 1)(x - 1)^{-2}}{8x(x^4 - 1)^{-1}}$ .

**41.29.** Порядок числа  $a$  равен  $-4$ , а порядок числа  $b$  равен  $3$ . Каким может быть порядок значения выражения:

- 1)  $ab$ ;                      2)  $a + b$ ;                      3)  $a + 10b$ ;                      4)  $10a + 0,1b$ ?

**41.30.** Порядок числа  $m$  равен  $2$ , а порядок числа  $n$  равен  $4$ . Каким может быть порядок значения выражения:

- 1)  $mn$ ;                      2)  $0,01mn$ ;                      3)  $100m + n$ ;                      4)  $0,01m + n$ ?

**41.31.** Докажите тождество:

$$1) \frac{(xy^{-1} + 1)^2}{xy^{-1} - x^{-1}y} \cdot \frac{x^3y^{-3} - 1}{x^2y^{-2} + xy^{-1} + 1} : \frac{x^3y^{-3} + 1}{xy^{-1} + x^{-1}y - 1} = 1;$$

$$2) \frac{a^{-1} + (b + c)^{-1}}{a^{-1} - (b + c)^{-1}} \cdot \left( 1 + \left( \frac{2bc}{b^2 + c^2 - a^2} \right)^{-1} \right) = \frac{(a + b + c)^2}{2bc}.$$

### Упражнения для повторения

**41.32.** Среднее арифметическое двух натуральных чисел равно 18. При делении большего из этих чисел на меньшее получим неполное частное 3 и остаток 4. Найдите эти числа.

**41.33.** Для откачивания воды из затопленного помещения были задействованы три насоса. Первый из них может выкачать всю воду за 12 ч, второй — за 15 ч, а третий — за 20 ч. Сначала в течение 3 ч работали первый и второй насосы, а затем подключили третий насос. За какое время была откачана вся вода?

**41.34.** Тетрадь стоит 19 р. У покупателя имеются монеты только по 5 р., а у продавца — только по 2 р. Может ли покупатель рассчитаться за тетрадь без дополнительного размена денег? В случае утвердительного ответа определите, какое наименьшее количество монет соответствующего достоинства должны иметь покупатель и продавец.

**Область определения выражения**

Областью определения выражения с одной переменной называют множество значений переменной, при которых это выражение имеет смысл. Элементы этого множества называют допустимыми значениями переменной.

**Тождество**

Равенство, которое выполняется при любых допустимых значениях входящих в него переменных, называют тождеством.

**Тождественно равные выражения**

Выражения, соответствующие значения которых равны при любых допустимых значениях входящих в них переменных, называют тождественно равными.

**Основное свойство рациональной дроби**

Если числитель и знаменатель рациональной дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получим дробь, тождественно равную данной.

**Сложение рациональных дробей с одинаковыми знаменателями**

Суммой двух рациональных дробей с одинаковыми знаменателями является рациональная дробь, числитель которой равен сумме числителей данных дробей, а знаменатель — знаменателю этих дробей.

**Вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями**

Разностью двух рациональных дробей с одинаковыми знаменателями является рациональная дробь, числитель которой равен разности числителей данных дробей, а знаменатель — знаменателю этих дробей.

**Умножение рациональных дробей**

Произведением двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель — произведению их знаменателей.

## Деление рациональных дробей

Частным двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителя делимого и знаменателя делителя, а знаменатель — произведению знаменателя делимого и числителя делителя.

## Возведение рациональной дроби в степень

Чтобы возвести рациональную дробь в степень, нужно возвести в эту степень числитель и знаменатель. Первый результат записать как числитель, а второй — как знаменатель дроби.

## Степень с целым отрицательным показателем

Для любого числа  $a$ , не равного нулю, и натурального числа  $n$  выполняется равенство  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ .

Для любого числа  $a$ , не равного нулю,  $a^0 = 1$ .

## Стандартный вид числа

Стандартным видом числа называют его запись в виде произведения  $a \cdot 10^n$ , где  $1 \leq a < 10$  и  $n \in \mathbf{Z}$ .

## Свойства степени с целым показателем

Для любых  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$  и любых целых  $m$  и  $n$  выполняются равенства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \text{ (основное свойство степени);}$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

$$a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

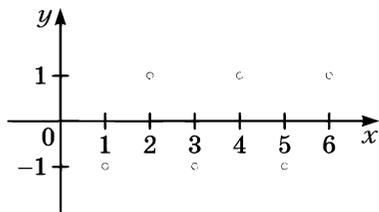


Рис. 1

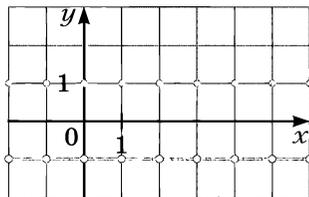


Рис. 2

- 26.20.**  $y = 4x + 1$ . **26.21.**  $y = x^3 + x$ . **26.25.** Рисунок 1. **26.26.** Рисунок 2
- 26.31.** 15 пчёл. **27.25.**  $A\left(\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$ . **27.26.** 1)  $(-10; -27)$ ; 2)  $(-14; 8)$
- 27.27.**  $(3; 5)$ . **27.32.** 1. **27.33.** 3. **27.34.**  $k = 0,5$ ,  $b = 4$ . **27.35.**  $k = \frac{1}{3}$ ,  $b = -1$
- 27.40.** 1)  $n$ ; 2)  $k$ ; 3)  $m$ ; 4)  $p$ . **27.43.**  $k = -1$ . **27.44.**  $b = 11$ . **27.51.** 1)  $y = x + 3$   
2)  $y = -0,5x - 1$ . **27.52.** 1)  $y = -\frac{2}{3}x$ ; 2)  $y = 2x - 4$ . **27.54.** Не могут. *Указание.* Рассмотрите значения данных функций при  $x = 1$ . **27.55.** *Указание.* Из рисунка видно, что  $k + b = 0$ . Это значит, что график функции  $y = bx + k$  пересекает ось ординат в точке  $(0; -b)$ . **27.56.** Можно. *Указание.* Скажите, что при любом  $k$  графики пересекаются в точке  $M(-1; 2)$ .
- 27.58.** 1)  $-39$ ; 2)  $-12$ . **27.59.** 1)  $\frac{5}{8}$ ; 2)  $1,4$ . **27.60.** *Указание.* Пусть второе из этих чисел равно  $n$ , тогда первое число будет равно  $n - 1$ , а третье —  $n + 1$ . Разложите на множители сумму кубов первого и третьего чисел.
- 27.62.**  $a^2 - b^2$ . *Указание.*  $x^4 + x^2y^2 + y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2$ . **27.63.** Из определения модуля следует, что  $|x| \geq x$ , поэтому  $|x| - x \geq 0$ . Вместе с тем  $2x - x^2 - 2 = -x^2 + 2x - 1 = -(x - 1)^2 - 1 < 0$ .
- Глава 4.** **28.9.** 2. **28.10.** 6. **28.13.** 3)  $(-3; 0)$ ;  $(3; 0)$ ;  $(0; -3)$ ;  $(0; 3)$ ; 4)  $(5; 0)$ ;  $(-5; 0)$ ;  $(0; -5)$ . **28.28.**  $(3; 3)$ . **28.29.**  $(4; -4)$ . **28.30.** 1)  $(1; 1)$ ; 2)  $(1; 3)$ ;  $(6; 2)$ ;  $(11; 1)$ . **28.33.** 3 способа. **28.34.** 9 задач по алгебре и 2 по геометрии, или 6 задач по алгебре и 4 по геометрии, или 3 задачи по алгебре и 6 по геометрии. **28.35.** 1)  $(0; 2)$ ; 2)  $(-1; 3)$ ; 3)  $(-0,5; -0,5)$ ; 4) решений нет. **28.36.** 1)  $(5; -5)$ ; 2) решений нет. **28.37.**  $(0; 0)$ ;  $(-1; 0)$ ;  $(1; 0)$ ;  $(0; -2)$ . **28.38.**  $(0; 4)$ ;  $(0; -4)$ ;  $(5; 0)$ ;  $(-5; 0)$ . **28.39.** 5 %. **28.40.** 20 яблок. **28.41.** 1) 6  
2)  $-5$ . **28.42.** 269,5 км. **28.44.** 1) 12; 2)  $-\frac{16}{3}$ . **29.37.**  $-12$ . **29.38.**  $-4$
- 29.39.**  $a = -4$ ,  $b = 2$ . **29.40.**  $a = 7$ ,  $b = -3$ . **29.43.** 1)  $d$ ; 2)  $c$ ; 3)  $b$ ; 4)  $a$
- 29.44.** 1)  $y = 0,5x + 2$ ; 2)  $y = 0,6x - 3$ . **29.45.**  $x + y = 6$ . **29.50.** 1 пара  $(3; 2)$

**29.53.** 1) 5; 2) 3,5. **29.54.** 2)  $(x - 3y - 4)(x - 3y + 4)$ ; 4)  $(c - b - 3)(c + b + 1)$ .  
**30.8.** 1)  $a = 3$ ,  $b = -2,5$ ; 2)  $a = 4$ ,  $b = -6$ . **30.9.**  $a = 2$ ,  $b = 5$ . **30.14.** При  $a \neq 7$ .  
**30.15.** 1) 16; 2) -5. **30.16.** 1) При  $a \neq 14$ ; 2) при  $a = -10$ . **30.19.** 1) (-2; 2);  
2) (-2; 2); (1; 1); 3) решений нет; 4) (1; -1); (3; 3). **30.20.** 1) (1; 1); (-3; 3);  
2) (2; 1); (-2; -1); 3) (2; 0); (-2; 0); (0; 2); (0; -2). **30.21.** 3 кг.  
**30.22.** 60 км/ч. **30.23.** 3; 5; 7; 9. *Указание.* Обозначьте наименьшее из  
этих чисел  $2k - 3$ , где  $k$  — произвольное натуральное число, большее 1.  
**31.3.** 1) (6; 3); 2) (4; 2); 3) (1; 2); 4) (4; -3); 5) (-5; -7); 6) (1,2; -0,7).  
**31.4.** 1) (-5; 20); 2) (-1; 3); 3) (-2; -1); 4) (-3; 4). **31.5.** 1) (0; -6); 2) (8; 6);  
3) (-5; -4); 4) (4; -3). **31.6.** 1) (1; -1); 2) (-2; 0,5); 3) (14; 2). **31.7.** 3 %.  
**31.9.**  $2^{4n} - 1 = (2^4)^n - 1 = 16^n - 1$ . Последней цифрой степени  $16^n$  является  
6. Тогда последней цифрой данного выражения является 5.  
**32.3.** 1) (8; 1); 2) (1,2; 0); 3) (-1; -2); 4) (7; -1); 5) (4; -1); 6) (6; -2);  
7) (2; -2); 8) (5; 6). **32.4.** 1) (1; 2); 2) (3; -1); 3) (4; 2); 4) (6; 5); 5) (1,5; 0,5);  
6) (1; -1). **32.5.** 1) (-3; -4); 2) (1; -0,5); 3)  $\left(5\frac{3}{4}; -\frac{3}{8}\right)$ ; 4) (2; -2).  
**32.6.** 1) (-0,6; -3,2); 2) (1; 3). **32.7.** 1) (1; 1); 2) (-3; 3). **32.8.** 1) (-20; -0,5);  
2) (-2; 3). **32.9.** 1)  $\left(-\frac{1}{7}; 2\frac{3}{7}\right)$ ; 2) (-10; 5). **32.10.** 1) (-5; -6); 2) (1; -6).  
**32.11.**  $a = 5,6$ ,  $b = 0,8$ . **32.12.**  $m = 9$ ,  $n = -12$ . **32.13.** 1)  $y = -0,2x + 1,4$ ;  
2)  $y = -x + 1$ . **32.14.** 1)  $y = -0,5x + 3,5$ ; 2)  $y = 3x + 3$ . **32.16.** 1) (3; -1,6);  
2) решений нет. **32.19.** -0,8. **32.20.** 2. **32.21.** 1) (3; -3); 2) (1,5; 0,75);  
3)  $\left(4; -\frac{2}{3}\right)$ ; 4) (-5; 6); 5) (-2,4; -4). **32.22.** 1) (10; 5); 2) (0,5; 1,5);  
3) (-8; -28). **32.23.** 1) (0,2; 1); 2) (1; -1). **32.24.** 1)  $\left(\frac{1}{20}; \frac{1}{2}\right)$ ; 2) (2; -2).  
**32.25.** 1) 6; 2) -2,5. **32.26.** 9 задач. **32.27.** 2 ч. **32.29.** 96 деревьев.  
**33.3.** 63 аршина синего сукна и 75 аршин чёрного. **33.4.** 7 четырёхмест-  
ных лодок и 3 шестиместных. **33.5.** 9 кг, 7 кг. **33.6.** 8 га, 6 га. **33.7.** 9 де-  
талей, 6 деталей. **33.8.** 4 ц, 5 ц. **33.9.** 140 р., 120 р. **33.10.** 15 р., 18 р.  
**33.11.** 58 км/ч, 70 км/ч. **33.12.** 60 км/ч, 40 км/ч. **33.13.** 4 км/ч, 16 км/ч.  
**33.14.** 84 км/ч, 79 км/ч. **33.15.** 80 л, 60 л. **33.16.** 28 пассажиров, 36 пас-  
сажиров. **33.17.** 18 км/ч, 2 км/ч. **33.18.** 25 км/ч, 2,5 км/ч. **33.19.** 5 меш-  
ков, 7 мешков. **33.20.** 40 рупий, 170 рупий. **33.21.** 42 года, 15 лет.  
**33.22.** 60 лет, 12 лет. **33.23.** 45 костюмов, 30 костюмов. **33.24.** 600 р.,  
900 р. **33.25.** 30 р., 40 р. **33.26.** 100 р., 40 р. **33.27.** 12 000 р., 9000 р.  
**33.28.** 18 000 р., 12 000 р. **33.29.**  $a = 120$ ,  $b = 100$ . **33.30.** 12; 15.  
**33.31.** 100 кг, 200 кг. **33.32.** 20 кг, 30 кг. **33.33.** 87. **33.34.** 6 см, 8 см.  
**33.35.** 5 см, 7 см. **33.36.** 3 км/ч, 12 км/ч. **33.37.** 5 км/ч, 4 км/ч.  
**33.38.** 12 км/ч. **33.39.** 60 т. **33.40.** 50 км/ч, 75 км/ч, 90 км/ч, 450 км.

**33.41.** 48 км/ч, 60 км/ч. **33.42.** 48 км/ч, 16 км/ч. **33.43.** 320 г, 480 г.  
**33.44.** 63 кг, 15 кг. **33.45.** 72. **33.46.** 39. **33.47.** 24 л, 40 л. **33.48.** 28 л,  
 42 л. **33.49.** 1) Такого числа не существует; 2) любое двузначное число,  
 у которого цифра десятков на 2 больше цифры единиц, на 18 больше чис-  
 ла, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке. **33.50.** 8 коса-  
 рей. **33.56.**  $a^2 = c + 2b$ . **33.57.** 7,5. **33.59.** 8.

**34.4.** 6)  $D(y) = \{x \mid x \neq -1 \text{ и } x \neq 0\}$ . **34.11.** На 31,6 %. **34.12.** 2 ч.

**35.14.** 0,3. **35.15.** 5. **35.17.**  $\frac{1}{32}$ . **35.18.** 1)  $-\frac{1}{8}$ ; 2)  $-12,5$ . **35.23.** 1)  $x$  — лю-  
 бое число, кроме  $-1$ ; 2) корней нет; 3) корней нет. **35.24.** 1) Корней нет;

2)  $-7$ . **35.25.** 1) Если  $a = 0$ , то корней нет; если  $a \neq 0$ , то  $x = \frac{1}{a}$ ; 2) если  
 $a = 0$ , то  $x$  — любое число; если  $a \neq 0$ , то  $x = 1$ ; 3) если  $a = 6$ , то  $x$  — лю-  
 бое число; если  $a \neq 6$ , то  $x = a - 6$ ; 4) если  $a = -2$ , то корней нет; если  $a = 2$ ,  
 то  $x$  — любое число; если  $a \neq -2$  и  $a \neq 2$ , то  $x = \frac{1}{a+2}$ . **35.26.** 1) Если

$a = -3$ , то корней нет; если  $a \neq -3$ , то  $x = \frac{3}{a+3}$ ; 2) если  $a = 0$ , то корней  
 нет; если  $a = 9$ , то  $x$  — любое число; если  $a \neq 0$  и  $a \neq 9$ , то  $x = \frac{a-9}{a}$ .

**35.30.** 3) *Указание.* Представьте числитель дроби в виде  $b^3 + (b+1)^3$ ;  
 5)  $a^2 - 2a + 2$ ; 9)  $b^{24} + 1$ . *Указание.* Умножим числитель и знаменатель  
 дроби на  $b - 1$ . Имеем:  $\frac{(b-1)(b^{47} + b^{46} + \dots + b + 1)}{(b-1)(b^{23} + b^{22} + \dots + b + 1)} = \frac{b^{48} - 1}{b^{24} - 1} = b^{24} + 1$ .

**35.31.** 4)  $z^2 - z + 4$ ; 6)  $a^{40} - a^{20} + 1$ . **35.32.** *Указание.* Воспользуйтесь резуль-  
 татом задачи 35.29. **35.33.** 12. *Указание.* Покажите, что из первого ра-  
 венства следует, что  $(a-b)(a+b+c) = 0$ . Также эту задачу можно решить,  
 воспользовавшись результатом задачи 35.29. **35.34.** 12. *Указание.* Вос-  
 пользуйтесь результатом задачи 35.29. **35.35.** 1)  $-1$ ; 2)  $\frac{1}{2}$ . *Указание.*

$2a^4 + 14a^2 - 17a + 3 = 2a(a^3 + 7a - 9) + a + 3$ . **35.36.**  $x^3 - x^2 + 1$ . *Указание.*  
 Представьте выражение  $x^5 + x + 1$  в виде  $(x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1)$ . **35.37.** *Ука-*  
*зание.*  $a^8 + a^6 + a^4 + a^2 + 1 = \frac{a^{10} - 1}{a^2 - 1} = \frac{(a^5 - 1)(a^5 + 1)}{(a-1)(a+1)}$ . **35.39.**  $-4$  при  $a = 2b$ .

**35.40.** 48 км/ч, 60 км/ч. **36.9.** 1)  $-\frac{1}{2}$ ; 2)  $\frac{3}{m+2}$ ; 3)  $\frac{1}{1-k}$ . **36.10.** 1)  $\frac{3}{4}$ ;

2)  $\frac{a-5}{a+5}$ . **36.11.** 1)  $\frac{1}{1-a}$ ; 2)  $\frac{3}{b-2}$ ; 3)  $\frac{m}{n-5}$ ; 4) 1. **36.12.** 1)  $\frac{1}{(x-7)^2}$ ;

2)  $\frac{a^2 + 2ab + 4b^2}{(a-2b)^2}$ ; 3)  $\frac{y+6}{y+2}$ . **36.20.** 2) 5; 3)  $4\frac{1}{4}$ . **36.21.** 2)  $-3$ ; 3)  $-4,5$ .

- 36.22.** 1) {1, 2, 3, 6}; 2) {1, 2, 7, 14}; 3) {1, 2, 8}. **36.23.** 1) {1, 3, 9}; 2) {1, 2, 4, 8}; 3) {2}. **36.25.** 1) {-10, -4, -2, 4}; 2) {-15, 1, 3, 19}. **36.26.** 1) *Указание.*  $n^3 - 2n + 1 = (n^3 + n^2 - n) - (n^2 + n - 1)$ . **36.27.** *Указание.*  $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2ab - 2bc - 2ac$ . **36.28.** 15 км/ч, 12 км/ч.
- 37.11.** 6)  $\frac{5}{p-5}$ ; 7)  $\frac{16}{16y-y^3}$ ; 8)  $\frac{2b+1}{12b-6}$ . **37.12.** 5)  $\frac{1}{x}$ ; 6)  $\frac{8}{y+2}$ . **37.15.** 2) 4.
- 37.18.** 2)  $\frac{3}{b^2-3b+9}$ . **37.19.** 1)  $\frac{2n^3}{9m^2-n^2}$ ; 2)  $\frac{2-2b}{8b^3+1}$ . **37.21.** 1)  $-\frac{a+b}{ab}$ ; 2)  $\frac{1}{2x}$ ;
- 3)  $\frac{100b^2}{(a^2-25b^2)^2}$ ; 4)  $\frac{1}{y-2}$ . **37.25.**  $\frac{35}{36}$ . **37.27.** 1)  $\frac{3}{(a-1)(a-4)}$ . *Указание.* Представьте каждое из слагаемых в виде разности двух дробей. Например,  $\frac{1}{(a-1)(a-2)} = \frac{1}{a-2} - \frac{1}{a-1}$ ; 2)  $\frac{4}{a(a+12)}$ . **37.28.** 1)  $\frac{3}{(a-7)(a-1)}$ ; 2)  $\frac{5}{x(x+5)}$ .
- 37.32.** *Указание.* К каждой из дробей левой части равенства прибавьте 1, а к правой части прибавьте 3. **37.33.** *Указание.* Рассмотрите разность левой и правой частей данного равенства. **37.34.** *Указание.* Докажите, что выполняется одно из равенств  $a + b = 0$ ,  $b + c = 0$  или  $c + a = 0$ .
- 37.35.** 2. *Указание.* Можно записать  $\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{xy+1} = \frac{1}{xy+1} - \frac{1}{y^2+1}$ . Отсюда  $\frac{x(y-x)}{(x^2+1)(xy+1)} = \frac{y(y-x)}{(y^2+1)(xy+1)}$ . С учётом  $x \neq y$  можно показать, что  $xy = 1$ .
- 37.36.** *Указание.* Докажите, что  $\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} = -\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ .
- 37.37.** 1)  $\frac{89}{60}$ . *Указание.* Воспользовавшись результатом задачи 37.36, покажите, что  $\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} = \frac{1}{30}$  (1), и вычтите из обеих частей этого равенства 3; 2)  $\frac{91}{60}$ . *Указание.* Прибавьте 3 к обеим частям равенства (1).
- 37.38.**  $\frac{9}{4}$ . *Указание.* Воспользуйтесь результатом задачи 37.23. **37.39.** *Указание.*  $\frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} = \frac{abc}{c^3} + \frac{bca}{a^3} + \frac{cab}{b^3} = abc \left( \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right)$ . Далее воспользуйтесь тождеством  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$ , доказанным в задаче 34.15. **37.40.** -1 или 8. *Указание.* К каждой части двойного равенства прибавьте 2. **37.41.** 1. *Указание.*  $\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{x}{x+xy+xyz} + \frac{xy}{xy+xyz+x^2yz}$ . **37.43.** 270 км.

- 38.18.** 1) 0,9; 2) -5; 3) -3,2. **38.19.** 1)  $\frac{40}{21}$ ; 2)  $\frac{4}{11}$ . **38.20.** 1)  $ac^3b$ ;
- 2)  $\frac{a^n - b^n}{a^{2n} - a^n b^n + b^{2n}}$ . **38.21.** 1)  $x^2 y^{n+1} z^{n+1}$ ; 2)  $\frac{x^n + 2y^n}{x^{2n} + 2x^n y^n + 4y^{2n}}$ . **38.22.** 83.
- 38.23.** 10. **38.24.** 7 или -7. **38.25.** 2 или -2. **38.26.** 1) 1; 2) 1.
- 38.27.** 1)  $\frac{(a-5)^2}{(a+5)^2}$ ; 2) 1. **38.30.** 1)  $\frac{a+b-1}{a-b+1}$ ; 2)  $\frac{(x+3)(x+7)}{(x-3)(x-7)}$ . **38.31.** 1)  $\left(\frac{n-3}{n+1}\right)^2$ ;
- 2)  $a^2 - 1$ . **39.1.** 1)  $\frac{3}{1-a}$ ; 2)  $\frac{2}{b-3}$ ; 3)  $\frac{1}{a-2b}$ ; 4)  $\frac{x-3}{x+3}$ . **39.2.** 1)  $\frac{2}{3-b}$ ; 2)  $x+y$ ;
- 3)  $\frac{a+2}{a-2}$ . **39.3.** 1)  $\frac{x+8}{x-8}$ ; 2)  $\frac{1}{b}$ ; 3)  $\frac{a-1}{a}$ ; 4) 2; 5)  $a-2$ . **39.4.** 1)  $\frac{7+x}{7-x}$ ; 2)  $c-5$ ;
- 3) -2; 4)  $\frac{y+2}{6}$ . **39.7.** 1) Не зависит; 2) зависит. **39.9.** 1)  $\frac{1}{a}$ ; 2)  $a-3$ ;
- 3)  $\frac{a+1}{a}$ ; 4)  $\frac{a+b}{a}$ . **39.10.** 1)  $\frac{a^2+b^2}{b^2}$ ; 2)  $-a$ . **39.11.** 1)  $-\frac{a+b}{2ab}$ ; 2)  $\frac{1}{a}$ ; 3)  $a+b$ .
- 39.12.** 1)  $-y$ ; 2)  $\frac{a+b}{a-b}$ . **39.15.** 1)  $\frac{a+2}{(a-2)(a-1)}$ ; 2)  $\frac{1}{x+y}$ ; 3)  $0,5a(a+c-b)$ .
- 39.17.**  $\frac{x+2}{2}$ . **39.19.**  $\frac{1}{a^3 b^3}$ . **39.20.**  $\frac{b-a}{a^4 b^4}$ . **39.21.** 1,9. *Указание.* Рассмотрите произведение  $(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)$ . **39.22.** *Указание.* Рассмотрите произведение  $\left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)$ . **39.23.** *Указание.* Умножьте обе части данного равенства на  $a+b+c$ . **39.24.** 1. *Указание.* Искомая сумма имеет вид  $\frac{1}{1 + \frac{1}{1+a}} + \frac{1}{2+a}$ . **40.21.** 1) 2,7; 2)  $9\frac{47}{125}$ .
- 40.30.** 5. **40.31.** 6. **40.37.** 31 болванка. **40.38.** 80 000 жителей. **41.5.** 4)  $-\frac{1}{6}$ ;
- 5)  $\frac{4}{9}$ ; 6)  $\frac{4}{7}$ . **41.6.** 5) 16; 6) 144. **41.15.** 8 мин. **41.16.** 5,34 кг. **41.17.** В 81 раз.
- 41.21.** 3) Рисунок 3; 5) рисунок 4. **41.25.** 1) -3; 2) -5; 3) -2; 4) -7; 5) 0; 6) 2.
- 41.26.** 1) 4; 2) 1; 3) -1; 4) 6. **41.27.** 1)  $\frac{1}{a+b}$ ; 2)  $-4b^2$ ; 3)  $15c^3 + 5$ ; 4)  $-\frac{1}{m^4}$ ;
- 5)  $\frac{a}{a+b}$ . **41.28.** 1)  $\frac{2a^2}{3a^2-1}$ ; 2)  $\frac{1-6b}{2}$ ; 3)  $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ . **41.29.** 1) -1 или 0; 2) 3 или 4;
- 3) 4 или 5; 4) 2 или 3. **41.30.** 1) 6 или 7; 2) 4 или 5; 3) 4 или 5; 4) 4 или 5.

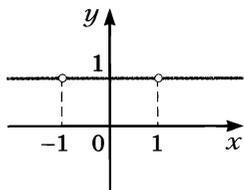


Рис. 3

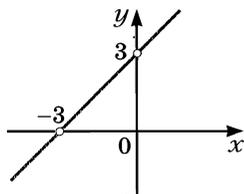


Рис. 4

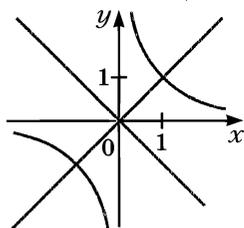


Рис. 5

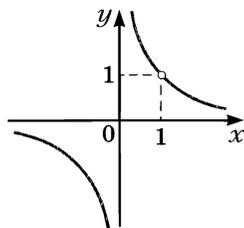


Рис. 6

**41.32.** 28; 8. **41.33.** 5 ч 45 мин. **41.34.** Да, надо 5 монет по 5 р. и 3 монеты по 2 р. **42.20.** 1) 2; 2) -1; 3) корней нет. **42.21.** 1) 2; 4; 2) -1; 1; 3) корней нет. **42.28.** Если  $a = 0$ , то корней нет; если  $a \neq 0$ , то уравнение имеет единственный корень. **42.34.** 3) Рисунок 5. **42.35.** 3) Рисунок 6.

**42.36.** Указание. Функция  $f$  такова, что  $f\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}$ . **42.39.**  $f(x) = -\frac{2}{x}$ .

Указание. Заменяв в данном равенстве  $x$  на  $-x$ , получим  $3f(-x) + 2f(x) = \frac{2}{x}$ ;  $f(-x) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x} - 2f(x)\right)$ . Теперь можно найденное выражение для  $f(-x)$  подставить в равенство, данное в условии. Выполните проверку.

**42.40.**  $f(x) = -\frac{3}{x}$ . **42.42.** Корней нет.

## Алфавитно-предметный указатель

- Алгоритм 218
- Аргумент функции 150
- Возведение в степень произведения 47
- — степени 47
  - рациональной дроби в степень 267
- Выделение полного квадрата 110
- Вынесение общего множителя за скобки 81
- Выражение алгебраическое 5
- дробное 240
  - рациональное 240
  - с переменными 5
  - целое 6
  - числовое 5
- Выражения тождественно равные 34
- Вычитание многочленов 64
- Вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями 253
- — — с разными знаменателями 259
- Гипербола 296
- График линейного уравнения с двумя переменными 201
- линейной функции 179
  - прямой пропорциональности 180
  - уравнения с двумя переменными 194
  - функции 166
- Графический метод решения уравнений 298
- Деление рациональных дробей 266
- степеней с одинаковыми основаниями 46
- Доказательство 45
- Двучлен 60
- Значение выражения 5
- переменной 5
  - — числового 5
  - функции 150
- Квадрат неполный разности двух выражений 116
- — суммы двух выражений 117
  - полный 109
  - трёхчлена 109
  - числа 39
- Корень многочлена 61
- уравнения 12
- Коэффициент одночлена 54
- старший 61
- Куб числа 39
- Математическая модель 19
- Метод группировки 88
- решения системы уравнений графический 211
  - подстановки 218
  - сложения 221
- Многочлен 60
- стандартного вида 61
- Множества равные 144
- Множество 143
- одноэлементное 144
  - пустое 145
  - решений системы уравнений 211
- Нуль-многочлен 62
- -одночлен 54
- Область значений функции 150
- определения выражения 241
  - — функции 150
- Обратная пропорциональность 293
- Одночлен 53
- Определение 12
- Основание степени 38
- Основное свойство рациональной дроби 244
- — степени 46
- Переменная 5
- зависимая 147
  - независимая 147

Подобные члены многочлена 60  
Показатель степени 38  
Приведение подобных членов многочлена 60  
Произведение разности и суммы двух выражений 92  
Разложение на множители многочлена 81  
Решение системы уравнений с двумя переменными 210  
— общее 209  
— уравнения с двумя переменными 192  
Свойства степени с целым показателем 287  
Свойство рациональной дроби 244  
Система двух линейных уравнений с двумя переменными 210  
— уравнений 210  
Сложение многочленов 64  
— рациональных дробей с одинаковыми знаменателями 253  
— — — с разными знаменателями 259  
Способ задания функции графический 169  
— — — описательный 159  
— — — с помощью формулы 160  
— — — табличный 160  
Стандартный вид одночлена 54  
— — числа 281  
Степень многочлена 61  
— одночлена 55  
— с нулевым показателем 280  
— с целым отрицательным показателем 280  
— числа 38  
Теорема 45  
Тождественно равные выражения 34, 244  
Тождественные преобразования 35  
Тождество 34, 244

Трёхчлен 60  
Умножение многочлена на многочлен 75  
— одночлена на многочлен 70  
— рациональных дробей 266  
— степеней с одинаковыми основаниями 46  
Упорядоченная пара чисел 193  
Уравнение линейное с двумя переменными 200  
— — одной переменной 12  
— с двумя переменными 192  
Формула квадрата разности двух выражений 101  
— для разложения на множители выражений вида  $a^n + b^n$  132  
— для разложения на множители выражений вида  $a^n - b^n$  132  
— куба разности двух выражений 122  
— куба суммы двух выражений 121  
— — суммы двух выражений 101  
— — — трёх выражений 102  
— разности квадратов двух выражений 96  
— разности кубов двух выражений 117  
— сокращённого умножения 91  
— суммы кубов двух выражений 116  
Функциональная зависимость 145  
Функция 145  
— вида  $y = \frac{k}{x}$  294  
— линейная 178  
— прямая пропорциональность 179  
Характеристическое свойство 144  
Целая часть числа 171  
Член многочлена 60  
— свободный 61  
Элемент множества 143

# Оглавление

	От авторов .....	3
§ 1	Введение в алгебру .....	5
	<i>Книга о восстановлении и противопоставлении</i> .....	10
Глава 1	<b>Линейное уравнение с одной переменной</b>	
§ 2	Линейное уравнение с одной переменной .....	12
§ 3	Решение задач с помощью уравнений .....	18
§ 4	Решение логических задач с помощью графов .....	26
	Итоги главы 1 .....	32
Глава 2	<b>Целые выражения</b>	
§ 5	Тождественно равные выражения. Тождества .....	33
§ 6	Степень с натуральным показателем .....	38
§ 7	Свойства степени с натуральным показателем .....	45
§ 8	Одночлены .....	53
§ 9	Многочлены .....	60
§ 10	Сложение и вычитание многочленов .....	63
§ 11	Умножение одночлена на многочлен .....	69
§ 12	Умножение многочлена на многочлен .....	75
§ 13	Разложение многочленов на множители. Вынесение общего множителя за скобки .....	80
§ 14	Разложение многочленов на множители. Метод группировки .....	88
§ 15	Произведение разности и суммы двух выражений .....	91
§ 16	Разность квадратов двух выражений .....	96
§ 17	Квадрат суммы и квадрат разности двух выражений. Квадрат суммы нескольких выражений .....	101
§ 18	Преобразование многочлена в квадрат суммы или разности двух выражений либо в квадрат суммы нескольких выражений .....	109
§ 19	Сумма и разность кубов двух выражений .....	116
§ 20	Куб суммы и куб разности двух выражений .....	121
§ 21	Применение различных способов разложения многочлена на множители .....	125
§ 22	Формулы для разложения на множители выражений вида $a^n - b^n$ и $a^n + b^n$ .....	131
	<i>Язык, понятный всем</i> .....	135
	Итоги главы 2 .....	139
Глава 3	<b>Функции</b>	
§ 23	Множество и его элементы .....	143
§ 24	Связи между величинами. Функция .....	147

§ 25	Способы задания функции .....	159
§ 26	График функции .....	165
§ 27	Линейная функция, её график и свойства .....	177
	Итоги главы 3 .....	190
Глава 4	<b>Системы линейных уравнений с двумя переменными</b>	
§ 28	Уравнения с двумя переменными .....	191
§ 29	Линейное уравнение с двумя переменными и его график .....	200
	<i>Как строили мост между геометрией и алгеброй</i> .....	208
§ 30	Системы уравнений с двумя переменными. Графический метод решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными .....	209
§ 31	Решение систем линейных уравнений методом подстановки .....	217
§ 32	Решение систем линейных уравнений методом сложения .....	220
§ 33	Решение задач с помощью систем линейных уравнений .....	227
	Итоги главы 4 .....	237
Глава 5	<b>Рациональные выражения</b>	
§ 34	Рациональные дроби .....	240
§ 35	Основное свойство рациональной дроби .....	244
§ 36	Сложение и вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями .....	253
§ 37	Сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями .....	259
§ 38	Умножение и деление рациональных дробей. Возведение рациональной дроби в степень .....	266
§ 39	Тождественные преобразования рациональных выражений .....	272
§ 40	Степень с нулевым и целым отрицательным показателем .....	279
§ 41	Свойство степени с целым показателем .....	287
§ 42	Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график .....	293
	Итоги главы 5 .....	304
	<b>Проектная работа</b> .....	307
	<b>Дружим с компьютером</b> .....	311
	<b>Ответы и указания</b> .....	321
	<b>Алфавитно-предметный указатель</b> .....	334