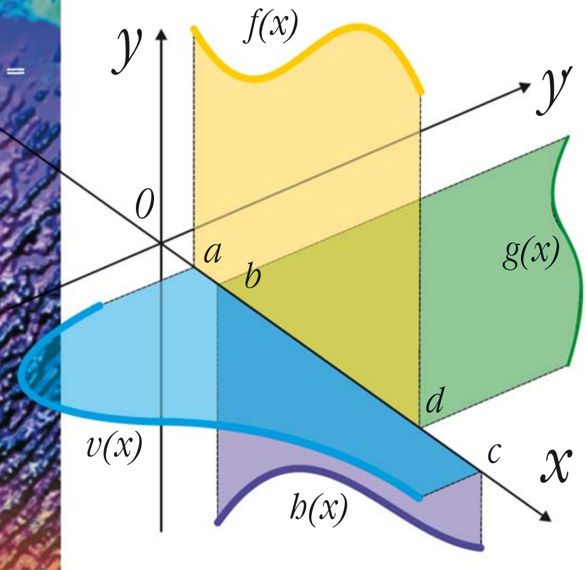
СПРАВОЧНИК ШКОЛЬНИКА

Математика

- Самое новое и авторитетное издание
- Полное соответствие образовательным стандартам и базовой программе
- Все разделы и темы школьного курса математики с 5 по 11 класс



Астрель

СПРАВОЧНИК ШКОЛЬНИКА

В. А. Гусев,
А. Г. Мордкович

МАТЕМАТИКА

Учебно-справочное пособие

Астрель
Москва

УДК 373:51(031)
ББК 22.1я2
Г96

Серия основана в 2003 году

Оформление обложки —
дизайн-группа «*Дикобраз*»

Авторы:
А. Г. Мордкович («Алгебра и начала анализа»)
В. А. Гусев («Геометрия»)

Гусев, Валерий Александрович
Г96 Математика : учебно-справочное пособие / В. А. Гусев, А. Г. Мордкович. — Москва: Астрель, 2013. — 671,[1] с.: ил. — (Справочник школьника).
ISBN 978-5-271-07165-2 (ООО «Издательство Астрель»)

Справочник включает все темы школьного курса и соответствует современным образовательным стандартам и программам. Книга состоит из двух частей: «Алгебра и начала анализа» и «Геометрия».

Основной материал школьного курса математики изложен авторами сжато и системно: математические понятия, аксиомы, теоремы, свойства и т. д.

Книга будет незаменимым помощником при изучении и закреплении нового материала, повторении пройденных тем, а также при подготовке к зачетам, выпускным экзаменам в школе и вступительным экзаменам в любой вуз.

УДК 373:51(031)
ББК 22.1я2

Подписано в печать 12.10.2012. Формат 84x108 $^1/_{32}$
Усл. печ. л. 35,3. Доп. тираж 2000 экз. Заказ №

ISBN 978-5-271-07165-2 (ООО «Издательство Астрель»)

СОДЕРЖАНИЕ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Глава I. Числа

Глава II. Алгебраические выражения

Глава III. Функции и графики

Глава VI. Неравенства

Глава VII. Элементы математического анализа

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ГЕОМЕТРИЯ

Глава I. Геометрические фигуры

Глава II. Взаимное расположение прямых

Глава III. Взаимное расположение прямых и плоскостей

Глава IV. Взаимное расположение плоскостей

Глава V. Геометрические преобразования фигур

Глава VI. Подобие фигур. Преобразование подобия

Глава VII. Прямоугольная декартова система координат

Глава VIII. Векторы

Часть первая

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

ЧИСЛА

§ 1. Натуральные числа

1. Запись натуральных чисел. Числа 1, 2, 3, 4, 5, ... , использующиеся для счета предметов или для указания порядкового номера того или иного предмета среди однородных предметов, называют *натуральными*. Любое натуральное число в десятичной системе счисления записывают с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Например, запись 2457 означает, что 2 — цифра тысяч, 4 — цифра сотен, 5 — цифра десятков, 7 — цифра единиц, т. е. $2457 = 2 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7$.

Вообще, если a — цифра тысяч, b — цифра сотен, c — цифра десятков, d — цифра единиц, то имеем

$$a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d.$$

Используется также сокращенная запись $\overline{abcd}$ (написать $abcd$ нельзя, так как такая запись в соответствии с принятым в математике соглашением означает произведение чисел a, b, c, d). Аналогично, запись $\overline{abcde}$ означает число

$$a \cdot 10\,000 + b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e,$$

причем $a \neq 0$.

2. Арифметические действия над натуральными числами. Результатом сложения или умножения двух натуральных чисел всегда является натуральное число: если m, n — натуральные числа, то $p = m + n$ — тоже натуральное число, m и n — *слагаемые*, p — *сумма*; $p = mn$ — тоже натуральное число, m, n — *множители*, p — *произведение*.

Справедливы следующие свойства сложения и умножения натуральных чисел:

1°. $a + b = b + a$ (*переместительное* свойство сложения).

2°. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (*сочетательное* свойство сложения).

3°. $ab = ba$ (*переместительное* свойство умножения).

4°. $(ab)c = a(bc)$ (*сочетательное* свойство умножения).

5°. $a(b + c) = ab + ac$ (*распределительное* свойство умножения относительно сложения).

В результате вычитания или деления натуральных чисел не всегда получается натуральное число: например, $7 - 4 = 3$ — натуральное число, тогда как $4 - 7 = -3$ — не натуральное число; $21 : 7 = 3$ — натуральное число, тогда как $11 : 2 = 5{,}5$ — не натуральное число.

Если m, n, k — натуральные числа, то при $m - n = k$ говорят,что m — *уменьшаемое*, n — *вычитаемое*, k — *разность*; при $m : n = k$ говорят, что m — *делимое*, n — *делитель*, k — *частное*, число m называют также *кратным* числа n, а число n — *делителем* числа m. Если m — кратное числа n, то существует натуральное число k такое, что $m = kn$.

Из чисел с помощью знаков арифметических действий и скобок составляют *числовые выражения*. Если в числовом выражении выполнить указанные действия, соблюдая принятый порядок, то получится число, которое называют *значением выражения*.

Напомним порядок арифметических действий в числовом выражении: сначала выполняют действия в скобках; внутри любых скобок сначала выполняют умножение и деление, а потом сложение и вычитание. Например, если нужно найти значение выражения

$$(28\cdot 93+(1927-1873)\cdot 31):6-710,$$

то порядок действий таков:

$$(28\overset{1}{\cdot}93\overset{4}{+}(1927\overset{2}{-}1873)\overset{3}{\cdot}31)\overset{5}{:}6\overset{6}{-}710.$$

3. Деление с остатком. Если натуральное число m не делится на натуральное число n, т. е. не существует такого натурального числа k, что $m = nk$, то рассматривают деление с остатком. Например, при делении числа 43 на число 18 в частном получается 2 и в остатке 7, т. е. $43 = 18 \cdot 2 + 7$. В общем случае, *если* m *— делимое,* n *— делитель* ($m > n$), p *— частное,* r *— остаток*, то

$$m = np + r, \tag{1}$$

где $r < n$. Здесь m, n, p, r — натуральные числа (исключение составляет случай, когда m делится на n без остатка и $r = 0$). Например, если $n = 3$, а $r = 2$, то получаем

$$m = 3p + 2.$$

Это формула чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 2.

П р и м е р. Найти частное и остаток от деления числа 36 421 на число 25.

Р е ш е н и е. Выполним деление «углом»:

$$
\begin{array}{r|l}
-36421 & 25 \\ \cline{2-2}
\underline{25} & 1456 \\
-114 & \\
\underline{100} & \\
-142 & \\
\underline{125} & \\
-171 & \\
\underline{150} & \\
21 &
\end{array}
$$

Итак, частное 1456, а остаток 21. Воспользовавшись равенством (1), можем записать: $36\,421 = 25 \times \times 1456 + 21$.

4. Признаки делимости. В некоторых случаях, не производя деления натурального числа m на натуральное число n, можно ответить на вопрос: выполнимо деление m на n без остатка или нет? Ответ на этот вопрос можно получить с помощью различных признаков делимости.

Теорема 1. Если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и сумма делится на это число (*теорема о делимости суммы*).

Не следует, однако, думать, что если каждое слагаемое суммы не делится на какое-то число, то и сумма не делится на это число. Например, сумма $37 + 19$ делится на 4, хотя ни 37, ни 19 не являются кратными числа 4. Заметим, однако, что если все слагаемые, кроме одного, делятся на некоторое число, то сумма не делится на это число.

Теорема 2. Если в произведении хотя бы один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число (*теорема о делимости произведения*).

Например, не выполняя умножения, можно утверждать, что произведение $105 \cdot 48 \cdot 93 \cdot 54$ делится на 5, так как 105 делится на 5.

Теорема 3. Натуральное число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2 (*признак делимости на 2*).

Теорема 4. Натуральное число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра либо 0, либо 5 (*признак делимости на* 5).

Теорема 5. Натуральное число делится на 10 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0 (*признак делимости на* 10).

Теорема 6. Натуральное число, содержащее не менее трех цифр, делится на 4 тогда и только тогда, когда делится на 4 двузначное число, образованное последними двумя цифрами заданного числа (*признак делимости на* 4).

Доказательство проведем для пятизначного числа $\overline{abcde}$. Имеем

$$\overline{abcde} = a \cdot 10\,000 + b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e.$$

Так как 100, 1000 и 10 000 делятся на 4, то делится на 4 и сумма $10\,000a + 1000b + 100c$. Значит, если двузначное число $d \cdot 10 + e$ делится на 4, то и $\overline{abcde}$ делится на 4; если же $10d + e$ не делится на 4, то и $\overline{abcde}$ не делится на 4.

Например, число 15 436 делится на 4, так как число 36 делится на 4. Число 372 506 не делится на 4, так как 06, т.е. 6 не делится на 4.

Теорема 7. Натуральное число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 (*признак делимости на* 3).

Доказательство проведем для четырехзначного числа $\overline{abcd}$. Имеем

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = (999a + a) + (99b + b) + \\ + (9c + c) + d = (999a + 99b + 9c) + (a + b + c + d).$$

Числа 9, 99, 999 делятся на 3, поэтому $999a + 99b + 9c$ делится на 3, и сумма $(999a + 99b + 9c) + (a + b + c + d)$ будет делиться на 3 тогда и только тогда, когда делится на 3 число $a + b + c + d$, т. е. сумма цифр числа $\overline{abcd}$.

Например, число 2742 делится на 3, так как делится на 3 сумма цифр этого числа $2 + 7 + 4 + 2 = 15$. Число 17 941 не делится на 3, так как сумма цифр этого числа равна 22, а 22 не делится на 3.

Теорема 8. Натуральное число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9 (*признак делимости на* 9).

5. Разложение натурального числа на простые множители. Если число имеет только два делителя (само число и единица), то его называют *простым*; если число имеет более двух делителей, то его называют *составным*.

Так, число 19 простое, ибо оно имеет только два делителя: 1 и 19; число 35 составное, оно имеет четыре делителя: 1, 5, 7, 35. Простое число 19 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел только одним способом, не учитывая порядок множителей: $19 = 1 \cdot 19$; составное число 35 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел более чем одним способом: $35 = 1 \cdot 35 = 5 \cdot 7$.

Заметим, что число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам.

Теорема 9 (*основная теорема арифметики*). Любое натуральное число, кроме 1, либо является простым, либо его можно разложить на простые множители, притом только одним способом.

При разложении чисел на простые множители используют признаки делимости и применяют запись столбиком, при которой делитель располагается справа от вертикальной черты, а частное записывается под делимым. Так, для числа 360 эта запись будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Если в разложении числа на простые множители один и тот же множитель a встречается n раз, то записывают коротко: a^n, т. е.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}} = a^n.$$

Выражение a^n называют *степенью*, a — *основанием степени*, n — *показателем степени*.

Поэтому в приведенном примере можно записать:

$$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

6. Наибольший общий делитель нескольких натуральных чисел. Пусть даны числа 72 и 96. Выпишем все делители числа 72:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.

Выпишем все делители числа 96:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96.

Среди выписанных чисел есть одинаковые:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Все эти числа называют *общими делителями* чисел 72 и 96, а наибольшее среди них — *наибольшим общим делителем*.

Для любых заданных натуральных чисел a и b можно найти наибольший общий делитель. Он обозначается $D(a, b)$ (читается: «D от a, b»). Например, $D(72, 96) = 24$. Если числа a и b таковы, что $D(a, b) = 1$, то числа a и b называют *взаимно простыми*.

Например, взаимно простыми будут числа 72 и 35 (хотя каждое из них — составное число).

Чтобы найти наибольший общий делитель нескольких чисел, надо разложить эти числа на простые множители и найти произведение общих простых множителей, взяв каждый из них с наименьшим (из имеющихся) показателем.

Пример 1. Найти $D(48, 60, 72)$.

Решение. Выполним разложение на простые множители каждого из данных чисел:

$$48 = 2^4 \cdot 3;\ 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5;\ 72 = 2^3 \cdot 3^2.$$

Значит, $D(48, 60, 72) = 2^2 \cdot 3$.

Получили: $D(48, 60, 72) = 12$.

Пример 2. Найти $D(3780, 7056)$.

Решение. Имеем:

$$\begin{array}{r|l}
3780 & 2 \\
1890 & 2 \\
945 & 3 \\
315 & 3 \\
105 & 3 \\
35 & 5 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
7056 & 2 \\
3528 & 2 \\
1764 & 2 \\
882 & 2 \\
441 & 3 \\
147 & 3 \\
49 & 7 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}$$

$$3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7;\quad 7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2.$$

Тогда $D(3780, 7056) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$; взяты те простые множители, которые входят и в разложение числа 3780, и в разложение числа 7056.

Итак, $D(3780, 7056) = 252$.

7. Наименьшее общее кратное нескольких натуральных чисел. Пусть даны числа 12 и 18. Выпишем числа, кратные 12:

$$12, 24, 36, 48, 60, 72, \ldots .$$

Выпишем числа, кратные 18:

$$18, 36, 54, 72, \ldots .$$

Среди выписанных чисел есть одинаковые:

$$36, 72, \ldots .$$

Все эти числа называют *общими кратными* чисел 12 и 18, а наименьшее из них — число 36 — называют *наименьшим общим кратным* чисел 12, 18.

Аналогично определяют наименьшее общее кратное произвольных натуральных чисел a и b, оно обозначается К (a, b) (читается: «К от a, b»). Любое общее кратное чисел a и b делится на К (a, b).

Чтобы найти наименьшее общее кратное нескольких чисел, надо разложить эти числа на простые множители и найти произведение всех получившихся простых множителей, взяв каждый из них с наибольшим (из имеющихся) показателем.

Пример. Найти К (3780, 7056).

Решение. Имеем: $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$; $7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$ (см. п. 6).

Тогда $\text{К}\,(3780, 7056) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$, т. е. взяты все простые множители, которые входят в разложение хотя бы одного из чисел 3780 и 7056.

Итак, К (3780, 7056) = 105 840.

Для любых натуральных чисел a и b справедливо равенство

$$\text{D}\,(a, b) \cdot \text{K}\,(a, b) = ab.$$

Если, в частности, числа a и b взаимно простые, т. е. D $(a, b) = 1$, то K $(a, b) = ab$. Это значит, что *наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно произведению этих чисел*.

8. Употребление букв в алгебре. Переменные. В алгебре часто конкретные свойства чисел записывают с помощью букв. Например, переместительное свойство сложения (от перемены мест слагаемых сумма не меняется) записывают так: $a + b = b + a$, где вместо a и b можно подставить любые числа: $3 + 5 = 5 + 3$, $100 + 3501 = 3501 + 100$ и т. д. Число, подставляемое вместо буквы, называют *ее значением*.

В некоторых случаях (например, в уравнениях) вместо буквы можно подставить только определенные числа, чтобы написанное равенство было верным. Например, $7 + x = 10$ обращается в верное равенство лишь при $x = 3$. Употребляемые в алгебре буквы называют *переменными*; смысл такого названия состоит в том, что числовое значение буквы можно изменить: например, в равенстве $a + b = b + a$ можно положить, например, $a = 3$, $b = 5$ или $a = 7$, $b = 19$ и т. д. — во всех случаях равенство будет верно. В равенстве $7 + x = 10$ можно положить, например, $x = 3$ или $x = 5$; разница в том, что в первом случае числовое равенство будет верным, а во втором — неверным. Равенство D $(a, b) = 1$ (см. п. 6) верно при следующих значениях переменных a и b:

$$a = 18,\ b = 25;\ a = 100,\ b = 99;\ a = 13,\ b = 1000 \text{ и т. п.}$$

Равенство D $(a, b) = 1$ неверно при следующих значениях переменных:

$$a = 8,\ b = 6;\ a = 25,\ b = 150;\ a = 7,\ b = 777 \text{ и т. п.}$$

§ 2. Рациональные числа

9. Обыкновенные дроби. Правильные и неправильные дроби. Смешанные числа. *Обыкновенная дробь* — это число вида $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа, например $\frac{12}{17}$, $\frac{15}{8}$. Число m называют *числителем дроби*, n — *знаменателем*. В частности, может быть $n = 1$, в этом случае дробь имеет вид $\frac{m}{1}$, но чаще пишут просто m. Это означает, что *всякое натуральное число можно представить в виде обыкновенной дроби со знаменателем* 1. Запись $\frac{m}{n}$ — другой вариант записи $m : n$.

Среди обыкновенных дробей различают правильные и неправильные дроби. Дробь $\frac{m}{n}$ называют *правильной*, если ее числитель меньше знаменателя, и *неправильной*, если ее числитель больше знаменателя или равен ему.

Всякую неправильную дробь можно представить в виде суммы натурального числа и правильной дроби (или в виде натурального числа, если дробь $\frac{m}{n}$ такова, что m кратно n; например, $\frac{16}{4} = 4$).

Пример. Представить неправильную дробь в виде суммы натурального числа и правильной дроби: а) $\frac{28}{5}$; б) $\frac{43}{13}$.

Р е ш е н и е.

а) $\frac{28}{5} = \frac{25+3}{5} = \frac{25}{5} + \frac{3}{5} = 5 + \frac{3}{5}$;

б) $\frac{43}{13} = \frac{39+4}{13} = \frac{39}{13} + \frac{4}{13} = 3 + \frac{4}{13}$.

Принято сумму натурального числа и правильной дроби записывать без знака сложения, т. е. вместо $5 + \frac{3}{5}$ пишут $5\frac{3}{5}$, а вместо $3 + \frac{4}{13}$ пишут $3\frac{4}{13}$. Число, записанное в таком виде, называют *смешанным числом*. Оно состоит из двух частей: целой и дробной. Так, для числа $3\frac{4}{13}$ целая часть равна 3, а дробная — $\frac{4}{13}$. Всякую неправильную дробь можно записать в виде смешанного числа (или в виде натурального числа). Верно и обратное: всякое смешанное или натуральное число можно записать в виде неправильной дроби. Например, $4\frac{1}{3} = 4 + \frac{1}{3} = \frac{12}{3} + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}$; $3 = \frac{3}{1}$.

10. Равенство дробей. Основное свойство дроби. Сокращение дробей. Две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ считают *равными*, если $ad = bc$. Например, равными будут дроби $\frac{3}{5}$ и $\frac{9}{15}$ (так как $3 \cdot 15 = 5 \cdot 9$), $\frac{12}{7}$ и $\frac{24}{14}$ (так как $12 \cdot 14 = 7 \cdot 24$).

Из определения равенства дробей следует, что равными будут дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{am}{bm}$, так как $a(bm) = b(am)$, — здесь мы используем сочетательное и переместительное свойства умножения натуральных чисел (см. п. 2). Значит, $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$, т. е. *если числитель и знаменатель данной дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной*. Это свойство называют *основным свойством дроби*.

Пользуясь основным свойством дроби, иногда можно заменить данную дробь другой, равной данной, но с меньшим числителем и меньшим знаменателем. Такую замену называют *сокращением дроби*. Например, $\frac{45}{60} = \frac{15}{20}$ (числитель и знаменатель мы разделили на одно и то же число 3); полученную дробь снова можно сократить, разделив числитель и знаменатель на 5, т. е. $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.

В общем случае сокращение дроби возможно, если числитель и знаменатель не взаимно простые числа (см. п. 6); если же числитель и знаменатель — взаимно простые числа, то дробь называют *несократимой*: например, $\frac{3}{4}$ — несократимая дробь. Основная цель сокращения дроби — замена данной дроби равной ей несократимой дробью.

11. Приведение дробей к общему знаменателю. Пусть даны две дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{15}{8}$. Они имеют разные знаменатели: 3 и 8. Воспользовавшись основным свойством дроби (см. п. 10), можно заменить эти дроби другими, равными им, причем такими, что у полученных дробей будут одинаковые знаменатели.

Такое преобразование называют *приведением дробей к общему знаменателю*. Умножив числитель и знаменатель дроби $\frac{2}{3}$ на 8, получим $\frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{16}{24}$; умножив числитель и знаменатель дроби $\frac{15}{8}$ на 3, получим $\frac{15 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{45}{24}$. Итак, дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{15}{8}$ приведены к общему знаменателю:

$$\frac{2}{3} = \frac{16}{24}; \quad \frac{15}{8} = \frac{45}{24}.$$

Заметим, что это не единственное решение поставленной задачи. Например, дроби можно было привести к общему знаменателю 48:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 16}{3 \cdot 16} = \frac{32}{48}; \quad \frac{15}{8} = \frac{15 \cdot 6}{8 \cdot 6} = \frac{90}{48},$$

и к общему знаменателю 72:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 24}{3 \cdot 24} = \frac{48}{72}; \quad \frac{15}{8} = \frac{15 \cdot 9}{8 \cdot 9} = \frac{135}{72},$$

и вообще к любому знаменателю, делящемуся одновременно на 3 и на 8.

Таким образом, привести дроби к общему знаменателю можно многими способами, но обычно стараются привести дроби к *наименьшему общему знаменателю,* который равен наименьшему общему кратному знаменателей данных дробей.

П р и м е р. Привести к наименьшему общему знаменателю дроби $\frac{7}{24}$ и $\frac{11}{30}$.

Р е ш е н и е. Найдем наименьшее общее кратное чисел 24 и 30; получим К (24, 30) = 120 (см. п. 7).

Имеем 120 : 24 = 5, поэтому, чтобы привести дробь $\frac{7}{24}$ к знаменателю 120, надо ее числитель и знаменатель умножить на 5 (*дополнительный множитель*):

$$\frac{7}{24} = \frac{7 \cdot 5}{24 \cdot 5} = \frac{35}{120}.$$

Имеем далее 120 : 30 = 4, поэтому, чтобы привести дробь $\frac{11}{30}$ к знаменателю 120, надо ее числитель и знаменатель умножить на 4 (дополнительный множитель):

$$\frac{11}{30} = \frac{11 \cdot 4}{30 \cdot 4} = \frac{44}{120}.$$

Дроби приведены к общему знаменателю:

$$\frac{7}{24} = \frac{35}{120}; \quad \frac{11}{30} = \frac{44}{120}.$$

На практике используют следующую запись:

$$\frac{7}{24} = \frac{7^{5}}{24} = \frac{35}{120}; \quad \frac{11}{30} = \frac{11^{4}}{30} = \frac{44}{120}.$$

Итак, чтобы привести дроби к наименьшему общему знаменателю, нужно:

1) **найти наименьшее общее кратное знаменателей дробей;**
2) **вычислить дополнительные множители, разделив наименьшее общее кратное на каждый знаменатель;**
3) **умножить числитель и знаменатель каждой дроби на соответствующий дополнительный множитель.**

12. Арифметические действия над обыкновенными дробями.

Сложение обыкновенных дробей выполняют:

а) если знаменатели дробей одинаковы, то к числителю первой дроби прибавляют числитель второй дроби и оставляют тот же знаменатель, т. е.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b};$$

б) если знаменатели дробей различны, то дроби сначала приводят к общему знаменателю, предпочтительнее к наименьшему, а затем применяют правило а).

П р и м е р 1. Сложить дроби $\frac{7}{24}$ и $\frac{11}{30}$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\frac{7}{24}+\frac{11}{30}=\frac{7^{\backslash 5}}{24}+\frac{11^{\backslash 4}}{30}=\frac{35}{120}+\frac{44}{120}=\frac{35+44}{120}=\frac{79}{120}.$$

Вычитание обыкновенных дробей выполняют следующим образом:

а) если знаменатели дробей одинаковы, то

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b};$$

б) если знаменатели различны, то сначала дроби приводят к общему знаменателю, а затем применяют правило а).

Умножение обыкновенных дробей выполняют следующим образом:

$$\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},$$

т. е. перемножают отдельно числители, отдельно знаменатели.

Произведение числителей есть числитель произведения; произведение знаменателей есть знаменатель произведения.

Например, $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{11} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 11} = \frac{6}{77}$.

Деление обыкновенных дробей выполняют следующим образом:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc},$$

т. е. делимое $\frac{a}{b}$ умножают на дробь $\frac{d}{c}$.

Например, $\frac{2}{3} : \frac{7}{10} = \frac{2}{3} \cdot \frac{10}{7} = \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 7} = \frac{20}{21}$.

Пример 2. Найти значение числового выражения

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{12}{5} + \frac{7}{8} : \frac{5}{6} - \frac{11}{30}.$$

Решение. 1) $\frac{4}{9} \cdot \frac{12}{5} = \frac{4 \cdot 12}{9 \cdot 5}$. Сократив числитель и знаменатель на 3 (это полезно сделать до выполнения действий умножения в числителе и знаменателе), получим $\frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5}$, т. е. $\frac{16}{15}$. Итак, $\frac{4}{9} \cdot \frac{12}{5} = \frac{16}{15}$;

2) $\frac{7}{8} : \frac{5}{6} = \frac{7 \cdot 6}{8 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 3}{4 \cdot 5} = \frac{21}{20}$;

3) при нахождении значения выражения $\frac{16}{15} + \frac{21}{20} - \frac{11}{30}$ действия сложения и вычитания можно выполнять одновременно. Наименьшим общим кратным чисел 15, 20, 30 является число 60. При-

ведем все три дроби к знаменателю 60, использовав дополнительные множители: для первой дроби — 4, для второй — 3, для третьей — 2. Получим

$$\frac{16}{15}^{4)} + \frac{21}{20}^{3)} - \frac{11}{30}^{2)} = \frac{64}{60} + \frac{63}{60} - \frac{22}{60} = \frac{64+63-22}{60} = \frac{105}{60} =$$

$$= 1\frac{3}{4}.$$

Пример 3. Выполнить действия: а) $2\frac{1}{7} + 3\frac{2}{3}$; б) $1\frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{7}$.

Решение. а) Способ 1-й. Обратим каждое из данных смешанных чисел в неправильную дробь, а затем выполним сложение:

$$2\frac{1}{7} = 2 + \frac{1}{7} = \frac{14}{7} + \frac{1}{7} = \frac{15}{7};\ 3\frac{2}{3} = 3 + \frac{2}{3} = \frac{9}{3} + \frac{2}{3} = \frac{11}{3};$$

$$\frac{15}{7} + \frac{11}{3} = \frac{15}{7}^{3)} + \frac{11}{3}^{7)} = \frac{45}{21} + \frac{77}{21} = \frac{122}{21}.$$

Обратим теперь неправильную дробь $\frac{122}{21}$ в смешанное число:

$$\frac{122}{21} = \frac{105+17}{21} = \frac{105}{21} + \frac{17}{21} = 5 + \frac{17}{21} = 5\frac{17}{21}.$$

Способ 2-й. Имеем $2\frac{1}{7} + 3\frac{2}{3} = \left(2 + \frac{1}{7}\right) + \left(3 + \frac{2}{3}\right) =$

$$= (2+3) + \left(\frac{1}{7}^{3)} + \frac{2}{3}^{7)}\right) = 5 + \left(\frac{3}{21} + \frac{14}{21}\right) = 5 + \frac{17}{21} =$$

$$= 5\frac{17}{21}.$$

б) В случае умножения и деления смешанных чисел всегда переходят к неправильным дробям:

$$1\frac{2}{5} = \frac{7}{5}; \quad 2\frac{1}{7} = \frac{15}{7}.$$

Значит, $1\frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{7} = \frac{7}{5} \cdot \frac{15}{7} = \frac{7 \cdot 15}{5 \cdot 7} = 3.$

13. Взаимно обратные числа. Число b называют *обратным для числа a*, если $ab = 1$. Например, для числа 3 обратным является $\frac{1}{3}$, поскольку $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$; для числа $\frac{2}{7}$ обратным является число $\frac{7}{2}$, поскольку $\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{2} = 1$.

Правило деления обыкновенных дробей (см. п. 12) фактически означает умножение делимого на число, обратное делителю.

14. Десятичные дроби. В виде *десятичной дроби* можно записать правильную дробь, знаменатель которой равен 10, 100, 1000 и вообще 10^n. Например, $\frac{3}{10} = 0{,}3$; $\frac{48}{100} = 0{,}48$; $\frac{21}{1000} = 0{,}021$. Таким же образом можно записать смешанное число или неправильную дробь с указанным выше знаменателем (превратив ее предварительно в смешанное число). Например, $2\frac{3}{10} = 2{,}3$; $\frac{317}{100} = 3\frac{17}{100} = 3{,}17$. В этих случаях целую часть смешанного числа отделяют запятой от числителя дробной части. Таким образом, десятичная дробь — это, по существу, другая форма записи дроби со знаменателем 10^n.

В виде десятичной дроби можно представить любую обыкновенную дробь, знаменатель которой является делителем некоторой степени числа 10. Например, 4 — делитель числа 100, поэтому дробь $\frac{3}{4}$ можно представить в виде десятичной дроби: $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100} = 0{,}75$; 125 — делитель числа 1000, поэтому дробь $\frac{196}{125}$ можно представить в виде десятичной:

$$\frac{196}{125} = \frac{196 \cdot 8}{125 \cdot 8} = \frac{1568}{1000} = 1{,}568.$$

Общий вывод о представлении обыкновенной дроби в виде десятичной таков:

если в разложении знаменателя дроби на простые множители содержатся только двойки и пятерки, то эту дробь можно записать в виде десятичной;

если же дробь несократима и в разложение ее знаменателя на простые множители входят кроме двоек и пятерок другие простые множители, то эту дробь нельзя записать в виде десятичной дроби.

Рассмотрим десятичную дробь 7,234. Имеем

$$7{,}234 = 7\frac{234}{1000} = 7 + \frac{200 + 30 + 4}{1000} = 7 + \frac{200}{1000} + \frac{30}{1000} + \frac{4}{1000} = 7 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1000}.$$

Значит, в дроби 7,234 содержится 7 единиц, 2 десятых, 3 сотых и 4 тысячных. Вообще в десятичной дроби после запятой может быть сколько угодно разрядов: десятые, сотые, тысячные, десятитысячные и т. д.

Дробь 7,234 можно записать так:

$$7{,}234 = 7\frac{234}{1000} = 7\frac{2340}{10000} = 7\frac{23400}{100000}, \text{ но } 7\frac{2340}{10000} = = 7{,}2340,$$

$$\text{а } 7\frac{23400}{100000} = 7{,}23400.$$

Значит, $7{,}234 = 7{,}2340 = 7{,}23400$.

Таким образом, *если к десятичной дроби приписать справа нуль или несколько нулей, то получится равная ей дробь. Если десятичная дробь оканчивается одним или несколькими нулями, то эти нули можно отбросить — получится равная ей дробь.*

Для десятичных дробей вводится понятие значащей цифры числа. *Значащими цифрами* числа называют все его цифры, кроме нулей, стоящих в начале. Например, в числе 23,4009 шесть значащих цифр; в числе 0,1023 четыре значащие цифры: 1, 0, 2, 3; в числе 0,0004 одна значащая цифра: 4.

15. Арифметические действия над десятичными дробями. При *сложении* десятичных дробей надо записать их одну под другой так, чтобы одинаковые разряды были друг под другом, а запятая — под запятой, и сложить дроби так, как складывают натуральные числа. Сложим, например, дроби 12,7 и 3,442. Первая дробь содержит одну цифру после запятой, а вторая — три. Чтобы выполнить сложение, преобразуем первую дробь так, чтобы после запятой было три цифры: 12,7 = 12,700; тогда

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}12{,}700\\ 3{,}442\end{array}\\ \hline 16{,}142\end{array}$$

Аналогично выполняется *вычитание* десятичных дробей. Найдем разность чисел 13,1 и 0,37:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r}13{,}10\\ 0{,}37\end{array}\\ \hline 12{,}73\end{array}$$

При *умножении* десятичных дробей достаточно перемножить заданные числа, не обращая внимания на запятые (как натуральные числа), а в произведении отделить запятой справа столько цифр, сколько их стоит после запятой в обоих множителях суммарно.

Например, умножим 2,7 на 1,3. Имеем 27 · 13 = = 351. Запятой отделим справа две цифры (у первого числа после запятой одна цифра и у второго — одна цифра; 1 + 1 = 2). В итоге получаем 2,7 · 1,3 = 3,51.

Если в произведении получается меньше цифр, чем надо отделить запятой, то впереди пишут недостающие нули, например

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}2{,}12\\ 0{,}13\end{array}\\ \hline 636\\ 212\\ \hline 0{,}2756\end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r}3{,}43\\ 0{,}0002\end{array}\\ \hline 0{,}000686\end{array}$$

Рассмотрим умножение десятичной дроби на число 10, 100, 1000 и т. д. Пусть нужно умножить дробь 12,733 на 10. Имеем 12 733 · 10 = 127 330. Отделив справа запятой три цифры, получим 12,733 · 10 = 127,330. Но 127,330 = 127,33. Зна-

чит, 12,733 · 10 = 127,33. Таким образом, умножение десятичной дроби на 10 сводится к переносу запятой на одну цифру вправо.

Вообще, *чтобы умножить десятичную дробь на 10, 100, 1000, надо в этой дроби перенести запятую на 1, 2, 3 цифры вправо (приписав в случае необходимости справа определенное число нулей)*. Например, 1,47 · 10 000 = 14 700.

***Деление* десятичной дроби на натуральное число выполняется так же, как деление натурального числа на натуральное, а запятую в частном ставят после того, как закончено деление целой части. Пусть надо разделить 22,1 на 13. Имеем:**

$$\begin{array}{r|l} -\,22{,}1 & 13 \\ \underline{13\phantom{{,}1}} & 1{,}7 \\ -\,91 & \\ \underline{91} & \\ 0 & \end{array}$$

Если целая часть делимого меньше делителя, то в ответе получается нуль целых, например

$$\begin{array}{r|l} -\,0{,}221 & 13 \\ \underline{13} & 0{,}017 \\ -\,91 & \\ \underline{91} & \\ 0 & \end{array}$$

Рассмотрим теперь *деление* десятичной дроби на десятичную. Пусть нужно разделить 2,576 на 1,12. Для этого и в делимом, и в делителе перенесем запятую вправо на столько цифр, сколько их имеется после запятой в делителе (в данном примере на две). Иными словами, умножим делимое и

делитель на 100 — от этого частное не изменится. Тогда нужно разделить дробь 257,6 на натуральное число 112, т. е. задача сводится к уже рассмотренному случаю:

$$\begin{array}{r|l}
-257{,}6 & 112 \\ \cline{2-2}
\underline{224} & 2{,}3 \\
-336 & \\
\underline{336} & \\
0 &
\end{array}$$

Чтобы разделить десятичную дробь на 10^n, надо в этой дроби перенести запятую на n цифр влево (при этом в случае необходимости слева приписывается нужное число нулей). Например,

$$27{,}344 : 10^4 = 0{,}0027344.$$

При делении одного числа на другое не всегда получается *конечная десятичная дробь*, как это было в трех последних примерах. Попытаемся, например, разделить «уголком» число 280 на число 9:

$$\begin{array}{r|l}
-280 & 9 \\ \cline{2-2}
\underline{27} & 31{,}11 \\
-10 & \\
\underline{9} & \\
-10 & \\
\underline{9} & \\
1\ldots &
\end{array}$$

В результате получается так называемая *бесконечная десятичная дробь*. В таких случаях переходят к обыкновенным дробям. Например,

$$2{,}8 : 0{,}09 = \frac{28}{10} : \frac{9}{100} = \frac{28 \cdot 100}{10 \cdot 9} = \frac{280}{9} = 31\frac{1}{9}.$$

Может оказаться так, что одни числа записаны в виде обыкновенных дробей, другие — в виде смешанных чисел, третьи — в виде десятичных дробей. При выполнении действий над такими числами можно поступать по-разному: либо обратить десятичные дроби в обыкновенные и применить правила действий над обыкновенными дробями, либо обратить обыкновенные дроби и смешанные числа в десятичные дроби (если это возможно) и применить правила действий над десятичными дробями.

16. Проценты. Среди десятичных дробей особенно часто на практике используется дробь 0,01, которую называют *процентом* и обозначают 1%. Так, 1% = 0,01, 2% = 0,02, 45% = 0,45, 350% = 3,5 и т. д. В хозяйственных и статистических расчетах, во многих отраслях науки части величин принято выражать в процентах. Чтобы найти, например, 23% от 60 кг, нужно 60 кг умножить на 0,23, т. е. $60 \cdot 0{,}23 = 13{,}8$. Значит, 23% от 60 кг составляют 13,8 кг.

Пример 1. Рабочий должен был изготовить за смену 80 деталей. По окончании рабочего дня оказалось, что он выполнил 150% сменного задания. Сколько деталей изготовил рабочий?

Решение. 1) 150% = 1,5.

2) $80 \cdot 1{,}5 = 120$.

Получили ответ: 120 деталей.

Пример 2. Рабочий должен за смену изготовить 80 деталей. К 12 часам он изготовил 55 деталей. Сколько процентов задания выполнил рабочий к указанному времени?

Р е ш е н и е. К 12 часам дня выполнена часть задания, выражающаяся дробью $\frac{55}{80}$, которую переводим в проценты:

$$\frac{55}{80}=\frac{550}{800}=\frac{550}{8}\cdot\frac{1}{100}=\frac{275}{4}\%=68{,}75\%.$$

П р и м е р 3. Рабочий к 12 часам изготовил 55 деталей, что составило 68,75% сменного задания. Сколько деталей рабочий должен изготовить за смену?

Р е ш е н и е. Обозначим количество деталей, составляющих сменное задание, буквой x. Из условия задачи следует, что

$68{,}75\% \cdot x = 55$, т. е. что $\frac{68{,}75}{100}\cdot x = 55$, откуда $x=\frac{100\cdot 55}{68{,}75}=80$.

Рабочий должен изготовить 80 деталей.

17. Обращение обыкновенной дроби в бесконечную десятичную периодическую дробь. Пусть дана десятичная дробь 2,73. Ее значение не изменится, если справа приписать любое число нулей (см. п. 14): $2{,}73=2{,}730=2{,}7300=\ldots=2{,}73\underbrace{000\ldots0}_{n\text{ цифр}}$. Допускают также запись дроби 2,73 в виде десятичной дроби с бесконечным множеством нулей, т. е. $2{,}73 = 2{,}73000\ldots$. Здесь после запятой содержится бесконечно много десятичных знаков.

Теорема 10. Любую обыкновенную дробь можно представить в виде бесконечной десятичной дроби.

Возьмем, например, число $\frac{3}{14}$ и будем делить числитель на знаменатель, постепенно получая десятичные знаки. При этом заметим, что любое натуральное число можно представить как бесконечную десятичную дробь, т. е. $3 = 3{,}0000\ldots$.

Имеем

$$
\begin{array}{r|l}
-\,3{,}00000000\ldots & 14 \\ \cline{2-2}
\underline{28} & 0{,}214285714\ldots \\
-\,20 & \\
\underline{14} & \\
-\,60 & \\
\underline{56} & \\
-\,40 & \\
\underline{28} & \\
-\,120 & \\
\underline{112} & \\
-\,80 & \\
\underline{70} & \\
-\,100 & \\
\underline{98} & \\
-\,20 & \\
\underline{14} & \\
60\ldots &
\end{array}
$$

Таким образом, $\dfrac{3}{14} = 0{,}214285714\ldots$.

Выпишем последовательно остатки, которые получились при выполнении операции деления:

$$2,\ 6,\ 4,\ 12,\ 8,\ 10,\ 2,\ 6,\ \ldots\ .$$

Ясно, что все эти остатки меньше делителя, т. е. меньше числа 14. Это значит, что на каком-то шаге деления должен неизбежно снова появиться такой остаток, который уже встречался ранее. Так, на седьмом шаге появился остаток 2, который был на первом шаге. Ясно, что, как только появится остаток, который уже встречался, за ним пойдут остатки в той же последовательности, которая была ранее. В нашем примере за остатком 2 идет остаток 6, за ним 4, за ним 12 и т. д., т. е. мы получаем такую последовательность остатков:

$$2,\ 6,\ 4,\ 12,\ 8,\ 10,\ 2,\ 6,\ 4,\ 12,\ 8,\ 10,\ \ldots .$$

Периодически повторяющиеся группы остатков приведут соответственно к периодически повторяющейся группе цифр в десятичной записи числа. Так, в нашем примере получим

$$\frac{3}{14} = 0{,}2142857142857142857\ldots .$$

Последовательно повторяющуюся группу цифр (минимальную) после запятой в десятичной записи числа называют *периодом*, а бесконечную десятичную дробь, имеющую такой период в своей записи, называют *периодической*. Для краткости принято период записывать один раз, заключая его в круглые скобки:

$$0{,}2142857142857142857\ldots = 0{,}2\,(142857).$$

Если период начинается сразу после запятой, то дробь называют *чистой периодической*; если же между запятой и периодом есть другие десятичные знаки, то дробь называют *смешанной периодической*. Так, $2{,}(23) = 2{,}2323232323\ldots$ — чистая периодическая дробь; $0{,}2(142857)$ — смешанная периодическая дробь; $2{,}73 = 2{,}73000\ldots = 2{,}73\,(0)$ — смешанная периодическая дробь.

18*. Обращение бесконечной десятичной периодической дроби в обыкновенную дробь. Чтобы бесконечную десятичную дробь умножить на 10, 100, 1000 и т. д., достаточно, как и в конечной десятичной дроби, перенести запятую на один, два, три и т. д. знака вправо.

Например,

$$0{,}1(23)\cdot 100 = 0{,}1232323\ldots\cdot 100 = 12{,}323232\ldots = \\ = 12{,}(32).$$

Обращение периодической десятичной дроби в обыкновенную рассмотрим на примерах.

Пример. Обратить в обыкновенную дробь число: а) $0{,}(13)$; б) $2{,}(273)$; в) $0{,}2(54)$; г) $3{,}254(9)$.

Решение. а) Положим $x = 0{,}(13) = 0{,}131313\ldots$. Умножим чистую периодическую дробь x на такое число, чтобы запятая переместилась ровно на период вправо. Поскольку в периоде две цифры, надо перенести запятую на две цифры вправо, а для этого достаточно умножить число x на 100, тогда

$$100x = 0{,}131313\ldots\cdot 100 = 13{,}1313\ldots = 13,(13).$$

Теперь вычтем x из $100x$, получим $100x - x = 13{,}(13) - 0{,}(13)$. Значит, $99x = 13$, откуда находим $x = \dfrac{13}{99}$.

б) Положим $x = 2{,}(273)$. Эта чистая периодическая дробь содержит три цифры в периоде. Умножив x на 1000, получим

$$1000x = 2273{,}(273).$$

Далее имеем

$$1000x - x = 2273{,}(273) - 2{,}(273);\quad 999x = 2271,$$

$$x = \frac{2271}{999} = \frac{757}{333} = 2\frac{91}{333}.$$

в) Положим $x = 0{,}2(54)$. Перенесем в этой смешанной периодической дроби запятую вправо так, чтобы получилась чистая периодическая дробь. Для этого достаточно x умножить на 10, получим $10x = 2{,}(54)$.

Положим $y = 2,(54)$ и обратим эту чистую периодическую дробь в обыкновенную так, как мы это делали в предыдущих примерах.

Имеем $y = 2,(54)$, откуда

$$100y = 254,(54);$$

$$100y - y = 254,(54) - 2,(54);$$

$$99y = 252; \quad y = \frac{252}{99} = \frac{28}{11}.$$

Значит, $10x = \frac{28}{11}$, откуда находим $x = \frac{28}{11 \cdot 10} = \frac{14}{55}$.

г) Полагая $x = 3,254(9)$, получим $1000x = 3254,(9)$. Введем обозначение $y = 1000x$. Тогда имеем

$$y = 3254,(9), \text{ откуда } 10y = 32\,549,(9);$$

$$10y - y = 32549,(9) - 3254,(9);$$

$$9y = 29\,295; \; y = 3255;$$

$$1000x = 3255; \; x = \frac{3255}{1000} = 3\frac{51}{200}.$$

Заметим, что $\frac{3255}{1000} = 3,255 = 3,255(0)$, т. е. мы получили конечную десятичную дробь, или бесконечную дробь с нулем в периоде. Значит, $3,254(9) = 3,255(0)$. Это обстоятельство имеет место для любых десятичных дробей с девяткой в периоде: такую дробь можно представить в виде дроби с нулем в периоде. Для этого достаточно лишь увеличить на единицу последний десятичный знак перед периодом. Например, $0,45(9) = 0,46(0)$; $14,(9) = 15,(0)$ и т. д.

19. Множество рациональных чисел. Натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5, ... называют также *положительными целыми числами*. Числа –1, –2, –3, –4,

-5, ..., противоположные натуральным, называют *отрицательными целыми числами*. Число 0 также считают целым числом. Итак, *целые числа* — это натуральные числа, числа, противоположные натуральным, и число 0.

Целые числа и дроби (положительные и отрицательные) составляют вместе множество *рациональных чисел*.

Заметим, что любое рациональное число может быть представлено в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное число, причем одно и то же число можно записать в виде отношения многими способами. Например,

$$-2 = \frac{-4}{2} = \frac{-6}{3} = \frac{-100}{50}; \quad 0{,}3 = \frac{3}{10} = \frac{6}{20} = \frac{300}{1000}.$$

Среди дробей, обозначающих данное рациональное число, имеется одна и только одна несократимая дробь. Для целых чисел — это дробь со знаменателем 1.

§ 3. Действительные числа

20. Иррациональные числа. Для измерения используются не только рациональные числа, но и числа иной природы, т. е. не являющиеся целыми или дробными. Все такие числа называют *иррациональными*. Например, длина диагонали квадрата со стороной 1 (рис. 1.1) должна выражаться некоторым положительным числом r таким, что

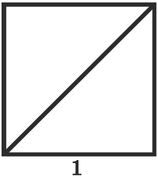

1
1

Рис. 1.1

$r^2 = 1^2 + 1^2$ (по теореме Пифагора, см. с. 422), т. е. таким, что $r^2 = 2$. Число r не может быть целым, так как $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$ и т. д. Число r не может быть и дробным; если $r = \frac{m}{n}$ — несократимая дробь, где $n \neq 1$, то $r^2 = \frac{m^2}{n^2}$ тоже будет несократимой дробью, где $n^2 \neq 1$; значит, $\frac{m^2}{n^2}$ не является целым числом, а потому не может быть равно 2. Поэтому длина диагонали квадрата выражается иррациональным числом, оно обозначается $\sqrt{2}$ (читается: «квадратный корень из двух»).

Аналогично, не существует рационального числа, квадрат которого равен 5, 7, 10. Соответствующие иррациональные числа обозначаются $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$. Противоположные им числа также иррациональны, они обозначаются $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{7}$, $-\sqrt{10}$.

Следует подчеркнуть, что к иррациональным числам приводит не только задача отыскания числа, квадрат которого равен заданному положительному числу. Например, число π, выражающее отношение длины окружности к диаметру, нельзя представить в виде обыкновенной дроби — это иррациональное число.

Любое рациональное число можно записать в виде бесконечной десятичной периодической дроби (см. п.17) и в свою очередь любая бесконечная десятичная периодическая дробь представляет собой рациональное число (см. п.18). В то же время любое иррациональное число можно записать в виде бесконечной десятичной непериодической дроби и в свою очередь любая бесконечная десятичная непериодическая дробь есть иррациональное число.

Вообще, *любое действительное число представимо в виде бесконечной десятичной дроби, причем периодической, если это рациональное число* (см. п. 17), *и непериодической, если это иррациональное число.*

21. Действительные числа. Числовая прямая. Рациональные и иррациональные числа составляют вместе множество *действительных чисел*.

Проведем прямую l, отметим на ней точку O, которую примем за начало отсчета, выберем направление и единичный отрезок [0; 1] (рис. 1.2).

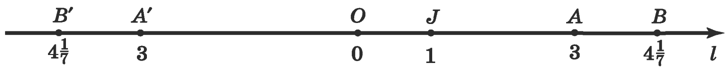


Рис. 1.2

В этом случае говорят, что задана *координатная прямая*. Каждому числу соответствует одна точка прямой l. Пусть, например, дано число 3. Отложим от точки O в заданном направлении единичный отрезок три раза, получим точку A — эта точка и соответствует числу 3.

Возьмем число $4\frac{1}{7}$. Отложим от точки O в заданном направлении единичный отрезок четыре раза, а затем еще $\frac{1}{7}$ часть отрезка, получим точку B — она и соответствует числу $4\frac{1}{7}$.

Если точка M прямой l соответствует некоторому числу r, то это число называют *координатой точки*, в таком случае пишут $M\ (r)$. Так, для точек J, A, B (рис. 1.2) можно указать их координаты $J\ (1)$, $A\,(3)$, $B\left(4\frac{1}{7}\right)$. Координатой точки O считается число нуль.

Отложим теперь три раза единичный отрезок от точки O в направлении, противоположном заданному. Получим точку A', симметричную точке A относительно начала отсчета O. Координатой точки A является число 3, а координату точки A' записывают так: -3. Аналогично, координатой точки B', симметричной точке B, на рисунке 1.2 считается число $-4\frac{1}{7}$.

Точка O, соответствующая числу 0, отделяет на координатной прямой точки с положительными координатами от точек с отрицательными координатами.

Заданное направление на координатной прямой называют *положительным* (обычно оно идет вправо), а направление, противоположное заданному,— *отрицательным*.

Каждому действительному числу соответствует единственная точка координатной прямой. Каждая точка координатной прямой соответствует единственному действительному числу — достаточно найти расстояние от этой точки до начала отсчета и поставить перед найденным числом знак + или − в зависимости от того, справа или слева от начала отсчета находится заданная точка). Для краткости обычно вместо фразы «точка координатной прямой, соответствующая действительному числу a», пишут и говорят «точка a», а употребляя термин «число a», имеют в виду «действительное число a».

Множество действительных чисел называют также *числовой прямой*. Геометрической моделью числовой прямой служит координатная прямая.

22. Обозначения некоторых числовых множеств.

$\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел.
$\boldsymbol{Z}$ — множество целых чисел.
$\boldsymbol{Q}$ — множество рациональных чисел.
$\boldsymbol{R}$ — множество действительных чисел.

Запись $n \in \boldsymbol{N}$ (читается: «n принадлежит множеству $\boldsymbol{N}$») обозначает, что n — натуральное число. Аналогичный смысл имеют следующие обозначения: $m \in \boldsymbol{Z}$ (m — целое число), $r \in \boldsymbol{Q}$ (r — рациональное число), $x \in \boldsymbol{R}$ (x — действительное число).

23. Сравнение действительных чисел. Для любых неравных действительных чисел a и b можно сказать, какое больше, а какое меньше. Говорят, что число a *больше* числа b, и пишут $a > b$, если разность $a - b$ — *положительное* число; если же разность $a - b$ — *отрицательное* число, то говорят, что число a *меньше* числа b, и пишут $a < b$. Согласно этому определению, любое положительное число больше нуля, любое отрицательное число меньше нуля и меньше любого положительного числа. Для любых заданных чисел a и b верно одно и только одно из отношений: $a > b$, $a < b$, $a = b$.

С геометрической точки зрения неравенство $a < b$ ($a > b$) означает, что точка a расположена на координатной прямой левее (правее) точки b.

Знаки $<$, $>$ называют *знаками строгих неравенств*. Иногда используют знаки $\geqslant$, $\leqslant$ — *знаки нестрогих неравенств;* запись $a \leqslant b$ означает, что верно одно из двух: или число a меньше числа b, или число a равно числу b. Например, $3 \leqslant 5$, $5 \geqslant 5$ — верные неравенства. Неравенства $a > b$ и $c > d$ называют неравенствами одного знака; неравенства $a > b$ и $c < d$ называют неравенствами противоположных знаков. Если числа a, b, c таковы, что $a < b$ и $b < c$, то используется запись $a < b < c$.

Пример. Сравнить числа $\frac{2}{3}$ и 0,67.

Решение. Составим разность $\frac{2}{3} - 0{,}67$ и найдем значение этой разности:

$$\frac{2}{3} - 0{,}67 = \frac{2}{3} - \frac{67}{100} = \frac{2 \cdot 100 - 67 \cdot 3}{300} = -\frac{1}{300}.$$

Разность отрицательна, поэтому $\frac{2}{3} < 0{,}67$.

24. Свойства числовых неравенств. Для любых действительных чисел a, b, c, d выполняются следующие свойства:

1°. ***Если $a > b$, то $b < a$.***

2°. ***Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$*** (*свойство транзитивности*).

3°. ***Если $a > b$, то $a + c > b + c$.***

4°. ***Если $a > b$ и c — положительное число*** ($c > 0$), ***то $ac > bc$.*** Это свойство имеет следующий смысл: *если обе части верного неравенства умножить на одно и то же положительное число и сохранить тот же знак неравенства, то получится верное неравенство.*

Доказательство. Рассмотрим разность $ac - bc$. Имеем

$$ac - bc = c(a - b).$$

По условию, c — положительное число, а так как $a > b$, то и $a - b$ — положительное число. Но произведение двух положительных чисел есть положительное число, значит, $c(a - b) > 0$. Таким образом, $ac - bc > 0$. Но если разность $ac - bc$ — положительное число, то $ac > bc$.

5°. *Если $a > b$ и c — отрицательное число ($c < 0$), то $ac < bc$.* Это свойство имеет следующий смысл: *если обе части верного неравенства умножить на одно и то же отрицательное число и изменить знак исходного неравенства на противоположный, то получится верное неравенство.*

6°. *Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$* (*если почленно сложить два верных неравенства одного знака, то получится верное неравенство*).

7°. *Если a, b, c, d — положительные числа, причем $a > b$ и $c > d$, то $ac > bd$* (*если почленно перемножить верные неравенства одного знака, левые и правые части которых — положительные числа, то получится верное неравенство*).

Доказательство. Так как $a > b$ и $c > 0$, то, по свойству 4°, $ac > bc$; аналогично, из $c > d$ и $b > 0$ следует $bc > bd$. Так как, далее, $ac > bc$ и $bc > bd$, то, по свойству 2°, $ac > bd$.

8°. *Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$.*

9°. *Если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.*

10°. *Если $a > b > 0$, то для любого натурального числа n выполняется неравенство $a^n > b^n$.*

25. Числовые промежутки. Возьмем два числа a и b такие, что $a < b$, и отметим на координатной прямой соответствующие им точки.

Произвольная точка x, лежащая между a и b, соответствует числу, которое удовлетворяет неравенствам $a < x < b$. Множество всех чисел x, удовлетворяющих этим неравенствам, обозначают $(a; b)$ и называют *интервалом*.

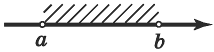
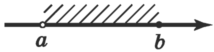
Множество всех чисел x, каждое из которых удовлетворяет неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, обозначают $[a; b]$ и называют *отрезком*.

Интервал и отрезок — это конечные числовые промежутки. Конечные числовые промежутки бывают еще двух видов: $[a; b)$ — это множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x < b$, и $(a; b]$ — это множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x \leqslant b$. Эти промежутки называют *полуинтервалами*.

Бывают и бесконечные числовые промежутки. Множество всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $x \geqslant a$, обозначают $[a; +\infty)$ и называют *лучом*, а множество всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $x > a$, обозначают $(a; +\infty)$ и называют *открытым лучом*. Знак «$+\infty$» читается: «плюс бесконечность».

Аналогично, может быть луч вида $(-\infty; b]$ (числа, удовлетворяющие неравенству $x \leqslant b$) и открытый луч вида $(-\infty; b)$ (числа, удовлетворяющие неравенству $x < b$). Знак «$-\infty$» читается: «минус бесконечность».

В приведенной ниже таблице для каждого вида числового промежутка даны его геометрическое изображение, обозначение и запись с помощью неравенств.

Вид промежутка	Геометрическое изображение	Обозначение	Запись с помощью неравенств
Интервал		$(a; b)$	$a < x < b$
Отрезок		$[a; b]$	$a \leqslant x \leqslant b$
Полуинтервал		$(a; b]$	$a < x \leqslant b$
Полуинтервал		$[a; b)$	$a \leqslant x < b$
Луч		$[a; +\infty)$	$x \geqslant a$
Луч		$(-\infty; b]$	$x \leqslant b$
Открытый луч		$(a; +\infty)$	$x > a$
Открытый луч		$(-\infty; b)$	$x < b$

На практике не всегда используют термины «интервал», «отрезок», «полуинтервал», «луч», заменяя их общим названием *числовой промежуток*.

26. Модуль действительного числа. *Модулем* (*абсолютной величиной*) действительного числа a называют само это число, если $a \geqslant 0$, и противоположное число $-a$, если $a < 0$. Модуль числа a обозначают $|a|$. Итак,

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Например, $|\pi - 3| = \pi - 3$, так как $\pi - 3 > 0$ ($\pi = 3{,}14\ldots$);

$$|-3{,}7| = -(-3{,}7) = 3{,}7, \text{ так как } -3{,}7 < 0.$$

Геометрически $|a|$ означает расстояние на координатной прямой точки a от точки O (рис. 1.3).

Свойства модулей:

1°. $|a| > 0$.

2°. $|a| = |-a|$.

3°. $|ab| = |a| \cdot |b|$.

4°. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

5°. $|a|^2 = a^2$.

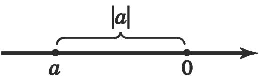


Рис. 1.3

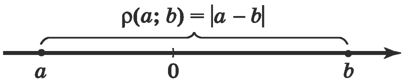


Рис. 1.4

27. Формула расстояния между двумя точками координатной прямой. Если a и b — две точки координатной прямой, то *расстояние* между ними $\rho\,(a; b)$ выражается формулой

$$\rho\,(a; b) = |a - b|$$

(рис. 1.4). Так, $\rho\,(-2; 5) = |-2 - 5| = |-7| = -(-7) = 7$.

П р и м е р. Найти все такие точки x, которые удовлетворяют: а) уравнению $|x - 1| = 3$; б) неравенству $|x + 1| \leqslant 2$.

Р е ш е н и е. а) Уравнению удовлетворяют такие точки x, расстояние которых от точки 1 равно 3. Это точки -2 и 4 (рис. 1.5). Значит, уравнение имеет два корня: -2; 4.

б) Неравенству удовлетворяют такие точки x, которые удалены от точки -1 на расстояние, меньшее или равное 2. Это точки из отрезка $[-3; 1]$ (рис. 1.6).

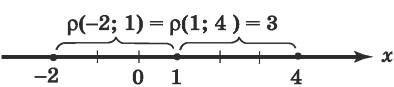


Рис. 1.5

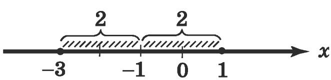


Рис. 1.6

28. Правила действий над положительными и отрицательными числами. Сумма двух чисел одного знака есть число того же знака; чтобы найти модуль такой суммы, надо сложить модули слагаемых. Например, $(+12) + (+8) = +20$; $(-12) + (-8) = -20$.

Сумма двух чисел с разными знаками есть число, которое имеет тот же знак, что и слагаемое с бо́льшим модулем; чтобы найти модуль этой суммы, надо из большего модуля вычесть меньший. Например, $(+12) + (-8) = +(12 - 8) = 4$; $(-12) + (+8) = -(12 - 8) = -4$.

Чтобы из одного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому. Например, $12 - (-8) = 12 + 8 = 20$; $12 - (+8) = 12 + (-8) = 4$.

Произведение (частное) двух чисел одного знака есть число положительное, а произведение (частное) двух чисел разных знаков есть число отрицательное; чтобы найти модуль произведения (частного), надо перемножить (разделить) модули данных чисел. Например, $(-12) \cdot (-8) = +12 \cdot 8 = 96$; $(-24) : (+3) = -\frac{24}{3} = -8$.

29. Свойства арифметических действий над действительными числами.

$1°$. $a + b = b + a$.
$2°$. $(a + b) + c = a + (b + c)$.
$3°$. $a + 0 = a$.
$4°$. $a + (-a) = 0$.
$5°$. $ab = ba$.
$6°$. $(ab)c = a(bc)$.
$7°$. $a(b + c) = ab + ac$.
$8°$. $a \cdot 1 = a$.
$9°$. $a \cdot \frac{1}{a} = 1, a \neq 0$.

Эти свойства называют иногда основными законами алгебры, причем свойства $1°$ и $5°$ выражают *переместительный* закон соответственно сложения и умножения, свойства **2°** и **6°** — *сочетательный* закон, а свойство **7°** — *распределительный* закон умножения относительно сложения.

Из этих свойств выводятся другие свойства. Например, $a \cdot 0 = 0$. В самом деле, имеем

$$a \cdot 0 = a(b + (-b)) = ab + a(-b) = ab + (-ab) = 0.$$

30. Пропорции. Пусть a, b, c, d — действительные числа, отличные от 0, и пусть имеет место равенство $a : b = c : d$. Это равенство называют *пропорцией*, числа a и d — *крайними членами*, а числа b и c — *средними членами* пропорции.

Для пропорции можно использовать и запись $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Например, можно составить пропорцию из чисел 2,5; –4; –5 и 8:

$$\frac{2{,}5}{-4} = \frac{-5}{8}.$$

Справедливы следующие утверждения:

Теорема 11. Произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов.

Теорема 12. Крайние члены пропорции можно поменять местами, т. е. если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$.

Теорема 13. Средние члены пропорции можно поменять местами, т. е. если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

31. Целая часть числа. Дробная часть числа. Пусть x — действительное число. Его *целой частью* называют наибольшее целое число, не превосходящее x; целую часть числа x обозначают $[x]$. *Дробной частью* числа x называют разность между числом и его целой частью, т. е. $x - [x]$; дробную часть числа обозначают $\{x\}$. Значит,

$$\{x\} = x - [x].$$

Например, $[2{,}35] = 2$, $\{2{,}35\} = 0{,}35$;
$[10] = 10$, $\{10\} = 0$;
$[-0{,}85] = -1$, $\{-0{,}85\} = -0{,}85 - (-1) = 0{,}15$.

32. Степень с натуральным показателем. Пусть a — действительное число, а n — натуральное число, большее единицы. *n-й степенью числа a* называют произведение n множителей, каждый из которых равен a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{множителей}}.$$

Если $n = 1$, то полагают $a^1 = a$.

Число a — *основание степени*, n — *показатель степени*.

Например, $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{81}$.

Справедливы следующие свойства степени с натуральным показателем:

1°. $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$.

2°. $a^n : a^k = a^{n-k}$, если $n > k$.

3°. $(a^n)^k = a^{nk}$.

4°. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$.

5°. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$, $b \neq 0$.

Например, $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$; $(2^3)^5 = 2^{3 \cdot 5} = 2^{15}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$.

33. Степень с нулевым показателем. Степень с отрицательным целым показателем. Полагают по определению: *если* $a \neq 0$, *то*

$$a^0 = 1.$$

Например, $(2{,}7)^0 = 1$; $(-5)^0 = 1$. Нулевая степень числа 0 не имеет смысла.

Полагают по определению: если $a \neq 0$ *и* n — натуральное число, то

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Например, $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$; $(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$.

Справедливо равенство

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

34. Стандартный вид положительного действительного числа. Любое положительное число a можно представить в виде $a_1 \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a_1 < 10$, а n — целое число.

П р и м е р ы

1. Если $a = 395$, то $a = 3{,}95 \cdot 10^2$; здесь $a_1 = 3{,}95$ и $n = 2$.

2. Если $a = 4{,}13$, то $a = 4{,}13 \cdot 10^0$; здесь $a_1 = 4{,}13$ и $n = 0$.

3. Если $a = 0{,}0023$, то $a = 2{,}3 \cdot 10^{-3}$; здесь $a_1 = 2{,}3$, $n = -3$.

Если положительное число a представлено в виде $a_1 \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a_1 < 10$, n — целое число, то говорят, что число a записано *в стандартном виде*; при этом показатель n называют *порядком* числа.

Для того чтобы положительное число a представить в стандартном виде, нужно поставить запятую так, чтобы в целой части оказалась одна значащая цифра (см. п. 14), и умножить полученное число на 10^n так, чтобы в результате умножения запятая вернулась на то место, которое она занимала в числе a. Так мы действовали в примерах 1, 2, 3.

В примере 1, отделив в числе 395 первую значащую цифру, получили 3,95; чтобы вернуться к исходному числу, надо запятую передвинуть на две цифры вправо — это равносильно умножению на 10^2. Значит, $395 = 3{,}95 \cdot 10^2$.

В примере 2 уже отделена запятой одна значащая цифра, поэтому $4{,}13 = 4{,}13 \cdot 10^0$.

В примере 3, отделив запятой в числе 0,0023 первую значащую цифру, получили 2,3; чтобы вернуться к исходному числу, надо запятую передвинуть на три цифры влево — это равносильно делению на 10^3 или умножению на 10^{-3}. Значит, $0{,}0023 = 2{,}3 \cdot 10^{-3}$.

35. Определение арифметического корня. Свойства арифметических корней. Если $a \geqslant 0$ и n — натуральное число, большее 1, то существует, и только одно, неотрицательное число x такое, что выполняется равенство $x^n = a$. Это число x называют *арифметическим корнем* n*-й степени из неотрицательного числа* a и обозначают $\sqrt[n]{a}$. Число a называют *подкоренным числом*, n — *показателем корня*. Если $n = 2$, то обычно пишут $\sqrt{a}$ (опуская показатель корня) и называют это выражение *квадратным корнем*. Часто вместо термина «корень» употребляют термин «радикал».

Итак, согласно определению, запись $\sqrt[n]{a} = x$, где $a \geqslant 0$, означает, во-первых, что $x \geqslant 0$ и, во-вторых, что $x^n = a$, т. е.

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Например, $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt[3]{125} = 5$, $\sqrt[10]{0} = 0$.

Если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то справедливы следующие свойства:

1°. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

2°. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$.

3°. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$.

4°. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

5°. $\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}$.

Свойство 1° распространяется на произведение любого числа множителей. Например, $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 125} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{125} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

П р и м е р. Упростить: а) $\sqrt[5]{7\dfrac{19}{32}}$; б) $(\sqrt[5]{a^2})^3$; в) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}$; г) $\sqrt[6]{a^4}$.

Р е ш е н и е. а) $\sqrt[5]{7\dfrac{19}{32}} = \sqrt[5]{\dfrac{243}{32}} = \dfrac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}} = \dfrac{3}{2}$;

б) $(\sqrt[5]{a^2})^3 = \sqrt[5]{(a^2)^3} = \sqrt[5]{a^6}$;

в) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[4 \cdot 3]{a} = \sqrt[12]{a}$;

г) $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}$ (показатели корня и подкоренного выражения разделили на 2).

36. Корень нечетной степени из отрицательного числа. Пусть $a < 0$, а n — натуральное число, большее 1. Если n — нечетное число, то существует одно и только одно действительное число x такое, что $x^n = a$. Это число обозначают $\sqrt[n]{a}$ и называют *корнем нечетной степени n из отрицательного числа a*. Если же n — четное число, то равенство $x^n = a$ не выполняется ни при каком действительном значении x. Это значит, что на множестве действительных чисел нельзя определить корень четной степени из отрицательного числа.

Например, $\sqrt[3]{-8} = -2$, так как $(-2)^3 = -8$; $\sqrt[5]{-243} = -3$, так как $(-3)^5 = -243$. Запись $\sqrt[4]{-16}$ не имеет смысла.

В случае нечетных показателей корней свойства радикалов, справедливые для неотрицательных значений подкоренных выражений (п. 35), верны и для отрицательных значений подкоренных выражений.

Например, $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ для любых a и b.

37. Степень с дробным показателем. Полагают по определению: если $a \geqslant 0$ и m, n — натуральные числа, $n \geqslant 2$, то

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m};$$

если $a > 0$, то

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

Нецелая степень отрицательного числа не имеет смысла.

Пример. Вычислить $8^{\frac{1}{3}}$, $81^{\frac{3}{4}}$, $4^{-\frac{1}{2}}$.

Решение. $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2;$

$$81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{(3^4)^3} = \sqrt[4]{3^{12}} = 3^3 = 27;$$

$$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}.$$

38. Свойства степеней с рациональными показателями. Для любого числа a определена операция возведения в натуральную степень (см. п. 32); для любого числа $a \neq 0$ определена операция возведения в нулевую и целую отрицательную степень (см. п. 33); для любого $a \geqslant 0$ определена операция возведения в положительную дробную степень (см. п. 37), и, наконец, для любого $a > 0$ определена операция возведения в отрицательную дробную степень (см. п. 37).

Пример. Вычислить $(6,25)^{0,5} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{0,25} - (-4)^{-1} \cdot (0,343)^0$.

Решение. $(6,25)^{0,5} = \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$; $\left(\frac{1}{16}\right)^{0,25}$

$$= = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}; (-4)^{-1} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}; (0,343)^0 = 1.$$

В итоге получаем

$$(6{,}25)^{0{,}5} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{0{,}25} - (-4)^{-1} \cdot (0{,}343)^0 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 1 = 1{,}5.$$

Если $a > 0$, $b > 0$ и r, s — любые рациональные числа, то:

1°. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.

2°. $a^r : a^s = a^{r-s}$.

3°. $(a^r)^s = a^{rs}$.

4°. $a^r \cdot b^r = (ab)^r$.

5°. $\dfrac{a^r}{b^r} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^r$.

39. Приближенные значения чисел. Абсолютная и относительная погрешности. При округлении десятичной дроби до какого-нибудь разряда все следующие за этим разрядом цифры заменяют нулями, а если они стоят после запятой, то их отбрасывают. Если первая следующая за этим разрядом цифра больше или равна 5, то последнюю оставшуюся цифру увеличивают на 1. Если же первая следующая за этим разрядом цифра меньше 5, то последнюю оставшуюся цифру не изменяют.

Пример 1. Округлить число $\alpha = 2471{,}05624$ с точностью до: а) десятков; б) единиц; в) десятых; г) сотых; д) тысячных.

Решение. а) Цифра единиц, следующая за разрядом десятков, равна 1, т. е. меньше 5. Значит, округлив до десятков, имеем $\alpha \approx 2470$. Знак $\approx$ называют *знаком приближенного равенства*.

б) Цифра десятых равна 0, значит, округлив до единиц, имеем $\alpha \approx 2471$.

в) Цифра сотых равна 5, значит, округлив до десятых, имеем $\alpha \approx 2471{,}1$.

г) Цифра тысячных равна 6, значит, округлив до сотых, имеем $\alpha \approx 2471{,}06$.

д) Цифра десятитысячных равна 2, значит, округлив до тысячных, имеем $\alpha = 2471{,}056$.

Все найденные значения называют *приближенными значениями числа* $\alpha = 2471{,}05624$.

Приближенные значения появляются не только при округлении чисел. Они возникают, например, при различных измерениях (длин, масс, температур и т. д.). При этом важно знать, с какой точностью выполнено измерение.

Пусть a — приближенное значение числа α. Тогда модуль разности чисел α и a, т. е. $|\alpha - a|$, называют *абсолютной погрешностью* приближенного значения числа α, а отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения называют *относительной погрешностью* приближенного значения. Относительную погрешность обычно выражают в процентах.

П р и м е р 2. Взвесив деталь, масса которой равна 54,12705 г, на весах с ценой деления шкалы 0,1 г, получили приближенное значение массы 54,1 г. Найти абсолютную и относительную погрешности этого приближенного значения.

Р е ш е н и е. Найдем абсолютную погрешность:

$$|54{,}12705 - 54{,}1| = 54{,}12705 - 54{,}1 = 0{,}02705.$$

Относительная погрешность равна $\dfrac{0{,}02705}{54{,}1} \times$
$\times\, 100\% = 0{,}05\%$.

При измерениях, как правило, точные значения величин бывают неизвестны, поэтому важны сведения об абсолютных погрешностях приближенных значений. Если, например, деталь массы m взвесили на весах с ценой деления шкалы 0,1 г, то это значит, что абсолютная погрешность измерения будет не более 0,1 г. Так, если, взвесив деталь, получили 54,1 г, то точное значение массы m может отклоняться от 54,1 в ту или иную сторону не более чем на 0,1, т. е. $54{,}1 - 0{,}1 \leqslant m \leqslant 54{,}1 + 0{,}1$. Короче это записывают так: $m = 54{,}1 \pm 0{,}1$.

Вообще если абсолютная погрешность приближенного значения a, найденного для интересующего нас числа α, не превосходит некоторого числа h, то пишут $\alpha = a \pm h$; говорят, что a — приближенное значение числа α *с точностью до* h.

П р и м е р 3. Найти с точностью до 0,01 приближенное значение числа $\alpha = 2471{,}05624$.

Р е ш е н и е. Округлив число α (альфа) до сотых, получим (см. пример 1, г) $a = 2471{,}06$.

Абсолютная погрешность этого приближенного значения равна $|2471{,}05624 - 2471{,}06| = 0{,}00376 <$ $< 0{,}01$. Значит, 2471,06 — приближенное значение числа α с точностью до 0,01.

В математических таблицах обычно даются приближенные значения величин. При этом считают, что абсолютная погрешность не превосходит половины единицы последнего разряда. Например, найдя по таблице для числа $\sqrt{2}$ значение 1,4142, мы должны понимать, что это — приближенное значение с точностью до 0,0001, т. е. что его абсолютная погрешность не превосходит 0,00005:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142 \pm 0{,}00005.$$

40. Десятичные приближения действительного числа по недостатку и по избытку. Возьмем иррациональное число $\sqrt{2}$. Имеем:

$$1^2 < 2 < 2^2 \qquad 1 < \sqrt{2} < 2$$

$$1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2 \qquad 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$

$$1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2 \qquad 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$

$$1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2 \qquad 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$

$$1{,}4142^2 < 2 < 1{,}4143^2 \qquad 1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$$

Для числа $\sqrt{2}$ используют представление в виде бесконечной десятичной дроби: $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$.

Числа 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142 называют *десятичными приближениями числа* $\sqrt{2}$ *по недостатку* с точностью соответственно до 1, до 0,1, до 0,01, до 0,001, до 0,0001. Числа 2; 1,5; 1,42; 1,415, 1,4143 называют *десятичными приближениями числа* $\sqrt{2}$ *по избытку* соответственно с той же точностью.

Число π имеет вид $\pi = 3{,}1415926\ldots$. Десятичное приближение числа π с точностью до 0,0001 по недостатку равно 3,1415, а по избытку – 3,1416.

41*. Правило извлечения квадратного корня из натурального числа. Пусть нужно извлечь квадратный корень из натурального числа m, причем известно, что корень извлекается. Чтобы найти результат, иногда удобно воспользоваться следующим п р а в и л о м.

1. Разобьем число m на грани (справа налево начиная с последней цифры), включив в каждую грань по две рядом стоящие цифры. При этом следует учесть, что если m состоит из четного числа

цифр, то в первой (слева) грани будет две цифры; если же число m состоит из нечетного числа цифр, то первая грань состоит из одной цифры. Количество граней показывает, сколько цифр содержит целая часть числа $\sqrt{m}$.

2. Подбираем наибольшую цифру такую, что ее квадрат не превосходит числа, находящегося в первой грани; эта цифра — первая цифра числа $\sqrt{m}$.

3. Возведем первую цифру результата в квадрат, вычтем полученное число из первой грани, припишем к найденной разности справа вторую грань. Получится некоторое число A. Удвоив имеющуюся часть результата, получим число a. Теперь подберем такую наибольшую цифру x, чтобы произведение числа $\overline{ax}$ на x не превосходило числа A. Цифра x — вторая цифра результата, т. е. искомого числа $\sqrt{m}$.

4. Произведение числа $\overline{ax}$ на x вычтем из числа A, припишем к найденной разности справа третью грань, получится некоторое число B. Удвоив имеющуюся часть результата, получим число b. Теперь подберем такую наибольшую цифру y, чтобы произведение числа $\overline{by}$ на y не превосходило числа B. Цифра y — третья цифра результата.

Следующий шаг правила повторяет 4-й шаг. Это продолжается до тех пор, пока не используется последняя грань.

П р и м е р 1. Вычислить $\sqrt{138384}$.

Р е ш е н и е. Разобьем число на грани: $13'83'84$. Получили три грани, значит, в результате должно получиться трехзначное число. Первая цифра результата 3, так как $3^2 < 13$, а $4^2 > 13$. Вычтя 9 из 13, получим 4. Приписав к 4 следующую грань, получим $A = 483$. Удвоив имеющуюся часть результата, т. е. число 3, получим $a = 6$. Подберем теперь такую наибольшую цифру x, чтобы произведение двузначного числа $\overline{ax}$, т. е. $\overline{6x}$, на x было меньше числа 483. Такой цифрой будет 7, так как $67 \cdot 7 = 469$ — это меньше 483, а $68 \cdot 8 = 544$ — это больше 483. Итак, вторая цифра результата 7.

Вычтя 469 из 483, получим 14. Приписав к этому числу справа последнюю грань, получим $b = 1484$. Удвоив имеющуюся часть результата, т. е. число 37, получим $B = 74$. Подберем теперь такую наибольшую цифру y, чтобы произведение трехзначного числа $\overline{by}$, т. е. $\overline{74y}$, на y не превосходило 1484. Такой цифрой будет 2, так как $742 \cdot 2 = 1484$. Цифра 2 — последняя цифра результата. В ответе получили 372.

$$
\begin{array}{r|r}
\multicolumn{2}{c}{-\sqrt{13'83'84} = 372} \\
 & 9 \\ \hline
67 & -483 \\
\times\ 7 & 469 \\ \hline
742 & -1484 \\
\times\ 2 & 1484 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

П р и м е р 2. Вычислить $\sqrt{45369}$.

Р е ш е н и е.

$$
\begin{array}{r|r}
\multicolumn{2}{c}{-\sqrt{4'53'69} = 213} \\
 & 4 \\ \hline
41 & -53 \\
\times\ 1 & 41 \\ \hline
423 & -1269 \\
\times\ 3 & 1269 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

Если корень не извлекается, то после последней цифры заданного числа ставят запятую и образуют дальнейшие грани, каждая из которых имеет вид 00. В этом случае процесс извлечения корня бесконечен; он прекращается, когда достигается требуемая точность.

Пример 3. Вычислить $\sqrt{7}$ с точностью до 0,01.

Решение.

$$\sqrt{7'00'00\ldots} = 2{,}645\ldots$$

$$\begin{array}{r|l}
 & -\,4 \\ \hline
46 & 300 \\
\times\ 6 & -\,276 \\ \hline
524 & 2400 \\
\times\ 4 & -\,2096 \\ \hline
5285 & 30400 \\
5 & -\,26425 \\ \hline
 & 3975 \\
 & \ldots
\end{array}$$

Итак, с точностью до 0,01 имеем $\sqrt{7} = 2{,}65$.

42. Понятие о степени с иррациональным показателем. Пусть β — иррациональное число. Поясним, какой смысл вкладывается в запись a^{β}, где a — положительное число. Рассмотрим три случая: $a = 1$, $a > 1$, $0 < a < 1$.

1) Если $a = 1$, то полагают $1^{\beta} = 1$.

2) Пусть $a > 1$. Возьмем любое рациональное число $r_1 < \beta$ и любое рациональное число $r_2 > \beta$. Тогда $r_1 < r_2$ и $a^{r_1} < a^{r_2}$. В этом случае под a^{β} понимают такое число, которое заключено между a^{r_1} и a^{r_2} для любых рациональных чисел r_1 и r_2 таких, что $r_1 < \beta$, а $r_2 > \beta$. Такое число существует и единственно для любого $a > 1$ и любого иррационального β.

3) Пусть $0 < a < 1$. Возьмем любое рациональное число $r_1 < \beta$ и любое рациональное число $r_2 > \beta$. Тогда $r_1 < r_2$ и $a^{r_1} > a^{r_2}$. В этом случае под a^β понимают такое число, которое заключено между a^{r_2} и a^{r_1} для любых рациональных чисел r_1 и r_2, удовлетворяющих неравенству $r_1 < \beta < r_2$. Такое число существует и единственно для любого числа a из интервала $(0; 1)$ и любого иррационального β.

43. Свойства степеней с действительными показателями. Если $a > 0$, $b > 0$ и x, y — любые действительные числа, то справедливы следующие свойства:

1°. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

2°. $a^x : a^y = a^{x-y}$.

3°. $(a^x)^y = a^{xy}$.

4°. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$.

5°. $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$.

§ 4*. Комплексные числа

44. Понятие о комплексном числе. Процесс расширения понятия числа от натуральных к действительным был связан как с потребностями практики, так и с нуждами самой математики. Сначала для счета предметов использовались натуральные числа. Необходимость выполнения деления привела к понятию обыкновенной (и десятичной) дроби, необходимость выполнения вычитания — к понятиям нуля и отрицательного числа, необходимость извлечения корней из положительных чисел — к понятию иррационального числа.

Все перечисленные операции выполнимы на множестве действительных чисел. Однако остались и невыполнимые на этом множестве операции, например извлечение квадратного корня из отрицательного числа. Значит, имеется потребность в дальнейшем расширении понятия числа, в появлении новых чисел, отличных от действительных.

Геометрически действительные числа изображаются точками на координатной прямой: каждому действительному числу соответствует одна точка прямой («образ» действительного числа) и, обратно, каждая точка координатной прямой соответствует одному действительному числу. Координатная прямая сплошь заполнена образами действительных чисел, т. е., выражаясь фигурально, «на ней нет места для новых чисел». Возникает предположение о том, что геометрические образы новых чисел надо искать уже не на прямой, а на плоскости. Однако каждую точку M координатной плоскости xy можно отождествить с координатами этой точки. Поэтому естественно в качестве новых чисел ввести упорядоченные пары действительных чисел (упорядоченные в том смысле, что $(a; b)$ и $(b; a)$ — разные точки, а значит, и разные числа).

Комплексным числом называют всякую упорядоченную пару $(a; b)$ действительных чисел a и b.

Два комплексных числа $(a; b)$ и $(c; d)$ называют *равными* тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

45. Арифметические операции над комплексными числами. *Суммой комплексных чисел* $z = (a; b)$ и $w = (c; d)$ называют комплексное число $(a + c; b + d)$.

Например, $(2; 7) + (3; -4) = (2 + 3; 7 - 4) = (5; 3)$;

$$(-1; 0) + (4; 7) = (-1 + 4; 0 + 7) = (3; 7).$$

Комплексным нулем считают пару (0; 0). Числом, противоположным числу $z = (a; b)$, считают число $(-a; -b)$; обозначают его $-z$.

Разностью комплексных чисел z и w называют, как обычно, такое число u, что $z = w + u$. Разность всегда существует и единственна. В самом деле, пусть $z = (a; b)$, $w = (c; d)$, $u = (x; y)$. Тогда $(a; b) = (c; d) + (x; y)$, т. е. $(a; b) = (c + x; d + y)$. Это значит, что $a = c + x$, $b = d + y$, откуда находим $x = a - c$, $y = b - d$, т. е. $u = (x; y) = (a - c; b - d)$.

Таким образом, получаем следующее правило вычитания комплексных чисел: $(a; b) - (c; d) = (a - c; b - d)$.

Например, $(9; 10) - (8; 12) = (9 - 8; 10 - 12) = (1; -2)$.

Произведением комплексных чисел $z = (a; b)$ и $w = (c; d)$ называют комплексное число $(ac - bd; ad + bc)$.

Например, если $z = (2; 5)$, $w = (3; 1)$, то

$$zw = (2 \cdot 3 - 5 \cdot 1; 2 \cdot 1 + 5 \cdot 3) = (1; 17).$$

Арифметические операции над комплексными числами обладают теми же свойствами, что арифметические операции над действительными числами (см. п. 29).

Пусть $z = (a; b)$, $w = (c; d) \neq (0; 0)$. Существует, и только одно, комплексное число $u = (x; y)$ такое, что $z = uw$. Это число u называют, как обычно, *частным* от деления z на w.

Имеем $uw = (x; y)(c; d) = (xc - yd; xd + yc)$, $z = (a; b)$. Так как $z = uw$, то должны выполняться равенства

$$\begin{cases} cx - dy = a, \\ dx + cy = b. \end{cases}$$

Из этой системы двух уравнений с двумя переменными находим (см. п. 164) $x = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}$, $y = \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$. Итак,

$$u = (x; y) = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}; \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

Получили следующее правило деления комплексных чисел: если $(c; d) \neq (0; 0)$, то

$$\frac{(a; b)}{(c; d)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}; \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

Например,

$$\frac{(2; 3)}{(1; 4)} = \left(\frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 4}{1^2+4^2}; \frac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 4}{1^2+4^2}\right) = \left(\frac{14}{17}; -\frac{5}{17}\right).$$

46. Алгебраическая форма комплексного числа. Используя введенные в п. 45 определения сложения и умножения комплексных чисел, легко получить следующие равенства:

$$(0; 1) \cdot (0; 1) = (-1; 0), \qquad (1)$$

$$(a; b) = (a; 0) + (b; 0) \cdot (0; 1), \qquad (2)$$

$$(a; 0) + (b; 0) = (a + b; 0), \qquad (3)$$

$$(a; 0) \cdot (b; 0) = (ab; 0). \qquad (4)$$

Условились вместо $(a; 0)$ писать просто a, а комплексное число $(0; 1)$ обозначать буквой i и называть *мнимой единицей*. Тогда равенство (1) принимает вид $i \cdot i = -1$, т. е.

$$i^2 = -1, \qquad (5)$$

а равенство (2) — вид

$$(a; b) = a + bi. \qquad (6)$$

Запись $a + bi$ называют *алгебраической формой комплексного числа* $z = (a; b)$; при этом число a называют *действительной частью* комплексного числа z, а bi — его *мнимой частью*.

Например, $(2; -4) = 2 - 4i$; $(3; 2) = 3 + 2i$; $-7 + \sqrt{3} \cdot i = (-7; \sqrt{3})$.

Если мнимая часть комплексного числа $a + bi$ отлична от нуля, то число называют *мнимым*; если при этом $a = 0$, т. е. число имеет вид bi, то его называют *чисто мнимым*; наконец, если у комплексного числа $a + bi$ мнимая часть равна нулю, то получается действительное число a.

Алгебраическая форма существенно облегчает выполнение арифметических операций над комплексными числами.

Сложение. Известно (см. п. 45), что

$$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d). \tag{7}$$

Выполнив сложение тех же чисел в алгебраической форме, считая $a + bi$ и $c + di$ обычными двучленами, находим

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i. \tag{8}$$

Сравнивая равенства (7) и (8), замечаем, что получился верный результат.

Вычитание. Известно (см. п. 45), что

$$(a; b) - (c; d) = (a - c; b - d). \tag{9}$$

Выполнив вычитание тех же чисел в алгебраической форме, считая $a + bi$ и $c + di$ обычными двучленами, находим

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i. \tag{10}$$

Сравнивая равенства (9) и (10), замечаем, что получился верный результат.

Умножение. Известно (см. п. 45), что

$$(a; b)(c; d) = (ac - bd; ad + bc). \tag{11}$$

Выполнив умножение тех же чисел в алгебраической форме, считая $a + bi$ и $c + di$ обычными двучленами, находим

$$(a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2.$$

Воспользуемся тем, что $i^2 = -1$ (см. равенство (5)); тогда $bdi^2 = -bd$. В результате получаем

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \tag{12}$$

Сравнивая равенства (11) и (12), замечаем, что получился верный результат.

Деление. Известно (см. п. 45), что если $(c; d) \neq (0; 0)$, то

$$\frac{(a; b)}{(c; d)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}; \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right). \tag{13}$$

Выполним деление тех же чисел в алгебраической форме, считая $a + bi$ и $c + di$ обычными двучленами, а $\frac{a + bi}{c + di}$ — обычной дробью. Умножив числитель и знаменатель этой дроби на $c - di$ (предполагая, что значение дроби от этого не изменится), находим

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bci - adi - bdi^2}{c^2 - d^2 i^2} =$$

$$= \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

Итак,

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i. \tag{14}$$

Сравнивая равенства (13) и (14), замечаем, что получился верный результат.

Подводя итоги, приходим к следующему важному практическому выводу: *над комплексными числами, записанными в алгебраической форме, можно осуществлять все арифметические операции как над обычными двучленами, учитывая лишь,* что $i^2 = -1$. Чтобы преобразовать в комплексное число дробь вида $\frac{a+bi}{c+di}$, нужно числитель и знаменатель дроби умножить на число $c - di$; числа $c + di$ и $c - di$ называют *комплексно-сопряженными*.

П р и м е р 1. Вычислить $(2 - i)^2$.

Р е ш е н и е. Применив формулу $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, получим

$$(2-i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i;$$

П р и м е р 2. Вычислить $(1 + 2i)\,i - \frac{3+2i}{1-i}$.

Р е ш е н и е. 1) $(1 + 2i)i = i + 2i^2 = -2 + i$.

2) $\frac{3+2i}{1-i} = \frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+2i+3i+2i^2}{1-i^2} = \frac{3+5i-2}{1+1} = \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i;$

3) $(-2 + i) - \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i\right) = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i.$

П р и м е р 3. Найти действительные числа x и y такие, что выполняется равенство $(2x - 3yi)(2x + 3yi) + 4xi = 97 + 8i$.

Р е ш е н и е. Имеем $(2x - 3yi)(2x + 3yi) = 4x^2 - 9y^2i^2 = 14x^2 + 9y^2$. Тогда заданное равенство можно переписать в виде

$$4x^2 + 9y^2 + 4xi = 97 + 8i.$$

Комплексные числа $a + bi$ и $c + di$ равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части ($a = c$) и коэффициенты при мнимых частях ($b = d$). Значит, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 97, \\ 4x = 8, \end{cases}$$

из которой находим (см. п.164) $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; $x_2 = 2$, $y_2 = -3$.

Пример 4. Найти комплексные числа z, удовлетворяющие равенству $z^2 = -5 + 12i$.

Решение. Будем искать комплексное число z в виде $x + yi$. Имеем

$$(x + yi)^2 = -5 + 12i;\ x^2 + 2xyi + y^2i^2 = -5 + 12i;$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = -5 + 12i.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5, \\ 2xy = 12. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения (см. п.164): (2; 3) и (−2; −3). Значит, $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -2 - 3i$.

Пример 5. Вычислить $(1 + 2i)^6$.

Решение. Имеем (см. п. 58) $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} a^4b^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3b^3 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^2b^4 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} ab^5 + b^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

Значит, $(1+2i)^6 = 1^6 + 6 \cdot 1^5 \cdot (2i) + 15 \cdot 1^4 \cdot (2i)^2 + 20 \cdot 1^3 \cdot (2i)^3 + 15 \cdot 1^2 \cdot (2i)^4 + 6 \cdot 1 \cdot (2i)^5 + (2i)^6 = 1 + 12i + 60i^2 + 160i^3 + 240i^4 + 192i^5 + 64i^6$.

Далее, имеем $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$, $i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$.

Значит, $(1+2i)^6 = 1 + 12i - 60 - 160i + 240 + 192i - 64 = 117 + 44i$.

47. Отыскание комплексных корней уравнений. Пусть $a > 0$. Так как $(\sqrt{a} \cdot i)^2 = a \cdot i^2 = -a$, то $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot i$. Тем самым мы получаем возможность извлекать квадратные корни из отрицательных действительных чисел. Это позволяет находить не только действительные, но и мнимые корни уравнений.

Пример 1. Решить уравнение $x^2 - 4x + 13 = 0$.

Решение. Имеем (см. п. 137) $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i$. Итак, $x_1 = 2 + 3i$, $x_2 = 2 - 3i$.

Пример 2. Решить уравнение $x^3 = 8$.

Решение. Имеем $x^3 - 8 = 0$; $(x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0$. Значит, либо $x - 2 = 0$, откуда находим $x_1 = 2$; либо $x^2 + 2x + 4 = 0$, откуда находим $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1-4} = -1 \pm \sqrt{3}\,i$. Итак, $x_1 = 2$, $x_2 = -1 + \sqrt{3}\,i$, $x_3 = -1 - \sqrt{3}\,i$.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 5. Основные понятия

48. Виды алгебраических выражений. Из чисел и переменных с помощью знаков сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в рациональную степень и извлечения корня и с помощью скобок составляют *алгебраические выражения*.

Примеры алгебраических выражений:

$$1)\ 2a^2b - 3ab^2(a+b);\ \ 2)\ a+b+\frac{c}{5};\ \ 3)\ \frac{3a^2+3a+1}{a-1};$$

$$4)\ \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{c}{3}\right)^3;\ \ 5)\ \sqrt{a+b};\ \ 6)\ (\sqrt[3]{2}-x)^4;\ \ 7)\ a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}.$$

Если алгебраическое выражение не содержит деления на переменные и извлечения корня из переменных (в частности, возведения в степень с дробным показателем), то его называют *целым выражением*. Из написанных выше целыми являются выражения 1), 2) и 6).

Если алгебраическое выражение составлено из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения, возведения в степень с натуральным показателем и деления, причем используется деление на выражения с переменными, то его называют *дробным выражением*. Так, из написанных выше дробными являются выражения 3) и 4).

Целые и дробные выражения называют *рациональными выражениями*. Так, из написанных выше рациональными являются выражения 1), 2), 3), 4) и 6).

Если в алгебраическом выражении используется извлечение корня из переменных (или возведение переменных в дробную степень), то его называют *иррациональным выражением*. Так, из написанных выше иррациональными являются выражения 5) и 7).

Итак, алгебраические выражения могут быть рациональными и иррациональными. Рациональные выражения, в свою очередь, разделяются на целые и дробные.

49. Допустимые значения переменных. Область определения алгебраического выражения. Значения переменных, при которых алгебраическое выражение имеет смысл, называют *допустимыми значениями переменных*. Множество всех допустимых значений переменных называют *областью определения алгебраического выражения* (или областью допустимых значений переменных — ОДЗ).

Целое выражение имеет смысл при любых значениях входящих в него переменных. Так, при любых значениях переменных имеют смысл целые выражения 1), 2), 6) из п. 48.

Дробные выражения не имеют смысла при тех значениях переменных, которые обращают знаменатель в нуль. Так, дробное выражение 3) из п. 48 имеет смысл при всех a, кроме $a = 1$, а дробное выражение 4) имеет смысл при всех a, b, c, кроме значений $a = 0$, $b = 0$.

Иррациональное выражение не имеет смысла при тех значениях переменных, которые обращают в отрицательное число выражение, содержащееся под знаком корня четной степени или под знаком возведения в дробную степень. Так, иррациональное выражение 5) имеет смысл только при тех a, b, при которых $a + b \geqslant 0$, а иррациональное выражение 7) имеет смысл только при $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ (см. п. 48).

Если в алгебраическом выражении переменным придать допустимые значения, то получится числовое выражение; его значение называют *значением алгебраического выражения* при выбранных значениях переменных.

П р и м е р. Найти значение выражения

$$\frac{\sqrt[3]{a^2+b}}{2a-b} \text{ при } a=5,\ b=2.$$

Р е ш е н и е. Имеем $\dfrac{\sqrt[3]{5^2+2}}{2\cdot 5-2} = \dfrac{\sqrt[3]{27}}{10-2} = \dfrac{3}{8}$.

50. Понятие тождественного преобразования выражения. Тождество. Рассмотрим два выражения

$$f(x) = x^2 - 2x \quad \text{и} \quad g(x) = 4x - 5.$$

При $x = 2$ имеем $f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0$; $g(2) = 4 \cdot 2 - 5 = 3$. Числа 0 и 3 называют *соответственными значениями* выражений $x^2 - 2x$ и $4x - 5$ при $x = 2$. Найдем соответственные значения тех же выражений при $x = 1$:

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1; \;\; g(1) = 4 \cdot 1 - 5 = -1;$$

при $x = 0$:

$$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0; \quad g(0) = 4 \cdot 0 - 5 = -5.$$

Соответственные значения двух выражений могут быть равными друг другу (так, в рассмотренном примере выполняется равенство $f(1) = g(1)$), а могут и отличаться друг от друга (так, в рассмотренном примере $f(2) \neq g(2)$; $f(0) \neq g(0)$).

Если соответственные значения двух выражений, содержащих одни и те же переменные, совпадают при всех допустимых значениях переменных, то выражения называют *тождественно равными*.

Тождеством называют равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

Так, тождественно равны выражения x^5 и $x^2 \cdot x^3$, $a + b + c$ и $c + b + a$, $(2ab)^2$ и $4a^2b^2$.

Примеры тождеств:

$$a + b = b + a,$$
$$a + 0 = a,$$
$$(a + b)\,c = ac + bc,$$
$$a \cdot 1 = a,$$
$$x^5 = x^2 \cdot x^3.$$

Пропорция (см. п. 30) $\dfrac{2a}{a-1} = \dfrac{10a}{5(a-1)}$ есть тождество при всех значениях a, кроме $a = 1$, поскольку при $a = 1$ знаменатели дробей обращаются в нуль, т. е. дроби не будут иметь смысла.

Замена выражения $\dfrac{ac}{bc}$ выражением $\dfrac{a}{b}$ (сократили на c) есть тождественное преобразование выражения $\dfrac{ac}{bc}$ при ограничениях $b \neq 0$, $c \neq 0$. Значит, $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$ — тождество при всех значениях переменных, кроме $b = 0$, $c = 0$. Верные числовые равенства также называют тождествами.

Замену одного выражения другим, тождественно равным ему, называют *тождественным преобразованием выражения*.

§ 6. Целые рациональные выражения

51. Одночлены и операции над ними. *Одночленом* называют такое выражение, которое содержит числа, натуральные степени переменных и их произведения. Например, $3a \cdot (2{,}5a^3)$, $(5ab^2) \cdot (0{,}4c^3d)$, $x^2y \cdot (-2z) \cdot \frac{3}{4}$ — одночлены, тогда как выражения $a + b$, $\frac{ab}{c}$ не являются одночленами.

Любой одночлен можно привести *к стандартному виду*, т. е. представить в виде произведения числового множителя, стоящего на первом месте, и степеней различных переменных. Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют *коэффициентом одночлена*. Сумму показателей степеней всех переменных называют *степенью одночлена*.

Если между двумя одночленами поставить знак умножения, то получится одночлен, называемый *произведением* исходных одночленов. При возведении одночлена в натуральную степень также получается одночлен. Результат обычно приводят к стандартному виду.

Приведение одночлена к стандартному виду, умножение одночленов — тождественные преобразования.

Пример 1. Привести к стандартному виду одночлен $3a \cdot (2{,}5a^3)$.

Решение. $3a \cdot (2{,}5a^3) = (3 \cdot 2{,}5) \cdot (a \cdot a^3) = 7{,}5a^4$.

Пример 2. Выполнить умножение одночленов $24ab^2cd^3$ и $\frac{1}{6}a^2b^3c$.

Р е ш е н и е. $(24ab^2cd^3) \cdot \left(\frac{1}{6}a^2b^3c\right) = \left(24 \cdot \frac{1}{6}\right) \times$ $\times (a \cdot a^2) \cdot (b^2 \cdot b^3) \cdot (c \cdot c) \cdot d^3 = 4a^3b^5c^2d^3$.

П р и м е р 3. Возвести одночлен $(-3ab^2c^3)$ в четвертую степень.

Р е ш е н и е. $(-3ab^2c^3)^4 = (-3)^4 \cdot a^4 \cdot (b^2)^4 \cdot (c^3)^4 =$ $= 81a^4b^8c^{12}$.

Одночлены, приведенные к стандартному виду, называют *подобными*, если они отличаются только коэффициентом или совсем не отличаются. Подобные одночлены можно складывать и вычитать, в результате чего снова получается одночлен, подобный исходным (иногда получается 0). Сложение и вычитание подобных одночленов называют *приведением подобных членов*.

П р и м е р 4. Выполнить сложение одночленов $18x^2yz^3$ и $-8x^2yz^3$.

Р е ш е н и е. $18x^2yz^3 + (-8x^2yz^3) = (18 + (-8)) \times$ $\times\, x^2yz^3 = 10x^2yz^3$.

52. Многочлены. Приведение многочленов к стандартному виду. *Многочленом* называют сумму одночленов. Если все члены многочлена записать в стандартном виде (см. п. 51) и выполнить приведение подобных членов, то получится *многочлен стандартного вида*.

Всякое целое выражение можно преобразовать в многочлен стандартного вида — в этом состоит цель преобразований (упрощений) целых выражений.

П р и м е р 1. Привести многочлен $3a \cdot 5b + 3ab +$ $+ 2a \cdot (-4b) + b \cdot b$ к стандартному виду.

Р е ш е н и е. Сначала приведем к стандартному виду члены многочлена. Получим $15ab + 3ab - 8ab + b^2$. После приведения подобных членов получим многочлен стандартного вида $10ab + b^2$.

П р и м е р 2. Привести многочлен $(3a + 5b - 2c) + (2a - b + 4c)$ к стандартному виду.

Р е ш е н и е. Если перед скобками стоит знак плюс, то скобки можно опустить, сохранив знаки всех слагаемых, заключенных в скобки. Воспользовавшись этим правилом раскрытия скобок, получим

$$3a + 5b - 2c + 2a - b + 4c$$

и далее $(3a + 2a) + (5b - b) + (-2c + 4c) = 5a + 4b + 2c$.

П р и м е р 3. $(5a^2b + ab^2) - (3a^2b - 4ab^2)$.

Р е ш е н и е. Если перед скобками стоит знак минус, то скобки можно опустить, изменив знаки всех слагаемых, заключенных в скобки. Воспользовавшись этим правилом раскрытия скобок, получим

$$5a^2b + ab^2 - 3a^2b + 4ab^2 =$$

$$= (5a^2b - 3a^2b) + (ab^2 + 4ab^2) = 2a^2b + 5ab^2.$$

П р и м е р 4. $4x^2\left(x - \frac{1}{2}x^2 + 3\right)$.

Р е ш е н и е. Произведение одночлена и многочлена равно сумме произведений этого одночлена и каждого члена многочлена:

$$4x^2\left(x - \frac{1}{2}x^2 + 3\right) = 4x^2 \cdot x - 4x^2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 4x^2 \cdot 3 =$$

$$= 4x^3 - 2x^4 + 12x^2.$$

П р и м е р 5. $(a + b)(a - b)$.

Р е ш е н и е. Имеем $(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$.

П р и м е р 6. $(2x^2y + 3xy^2)(2x + 3y + 1)$.

Р е ш е н и е. Имеем $2x^2y(2x + 3y + 1) + 3xy^2(2x + 3y + 1) = (4x^3y + 6x^2y^2 + 2x^2y) + (6x^2y^2 + 9xy^3 + 3xy^2) = 4x^3y + \underline{6x^2y^2} + 2x^2y + \underline{6x^2y^2} + 9xy^3 + 3xy^2$.

Осталось привести подобные члены (они подчеркнуты). Получим

$$4x^3y + 12x^2y^2 + 2x^2y + 9xy^3 + 3xy^2.$$

53. Формулы сокращенного умножения. В некоторых случаях приведение целого выражения к стандартному виду многочлена осуществляется с использованием тождеств:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2, \qquad (1)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (2)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \qquad (3)$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3, \qquad (4)$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3, \qquad (5)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \qquad (6)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \qquad (7)$$

Эти тождества называют *формулами сокращенного умножения*.

Рассмотрим примеры, в которых нужно преобразовать заданное выражение в многочлен стандартного вида.

П р и м е р 1. $(3x^2 + 4y^3)(3x^2 - 4y^3)$.

Р е ш е н и е. Воспользовавшись формулой (1), получим

$$(3x^2)^2 - (4y^3)^2 = 9x^4 - 16y^6.$$

Пример 2. $(a + b - c)(a + b + c)$.

Решение. $(a + b - c)(a + b + c) = ((a + b) - c) \times \times ((a + b) + c) = (a + b)^2 - c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - c^2$.

Пример 3. $(3a^2 - 5b^3)^2$.

Решение. Воспользовавшись формулой (3), получим

$$(3a^2)^2 - 2 \cdot 3a^2 \cdot 5b^3 + (5b^3)^2 = 9a^4 - 30a^2b^3 + 25b^6.$$

Пример 4. $(3a + 1)(9a^2 - 3a + 1)$.

Решение. Воспользовавшись формулой (4), получим

$$(3a)^3 + 1 = 27a^3 + 1.$$

54. Разложение многочленов на множители. Иногда можно преобразовать многочлен в произведение нескольких множителей — многочленов или одночленов. Такое тождественное преобразование называют *разложением многочлена на множители*. В этом случае говорят, что многочлен делится на каждый из этих множителей.

Рассмотрим некоторые способы разложения многочленов на множители.

1. Вынесение общего множителя за скобки. Это преобразование является непосредственным следствием распределительного закона

$$ac + bc = c(a + b).$$

Пример 1. Разложить на множители многочлен $28x^3 - 35x^4$.

Решение. $28x^3 - 35x^4 = 7x^3 \cdot 4 - 7x^3 \cdot 5x = 7x^3 \cdot (4 - 5x)$.

Обычно при вынесении общего множителя за скобки каждую переменную, входящую во все члены многочлена, выносят с наименьшим показателем, который она имеет в данном многочлене. Если все коэффициенты многочлена — целые числа, то в качестве коэффициента общего множителя берут наибольший по модулю общий делитель всех коэффициентов многочлена.

2. Использование формул сокращенного умножения. Формулы (1) — (7) из п. 53, будучи прочитанными «справа налево», во многих случаях оказываются полезными для разложения многочленов на множители.

Пример 2. Разложить на множители $x^6 - 1$.

Решение. Имеем $x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1^2$. Применив формулу (1) (разность квадратов), получим $(x^3 + 1) \times \times (x^3 - 1)$. Применив теперь формулы (4) и (5) (сумма кубов, разность кубов), получим

$$(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1).$$

Итак,

$$x^6-1=(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1).$$

Пример 3. $4a^4b^3 + 16a^3b^4 + 16a^2b^5$.

Решение. Сначала вынесем за скобки общий множитель. Для этого найдем наибольший общий делитель коэффициентов 4, 16, 16 и наименьшие показатели степеней, с которыми переменные a или b входят в составляющие данный многочлен одночлены. Получим

$$4a^2b^3(a^2+4ab+4b^2).$$

Так как, далее, по формуле (2), $a^2 + 4ab + 4b^2 = = (a + 2b)^2$, то окончательно получаем $4a^4b^3 + + 16a^3b^4 + 16a^2b^5 = 4a^2b^3 (a + 2b)^2$.

3. Способ группировки. Он основан на том, что переместительный и сочетательный законы сложения позволяют группировать члены многочлена различными способами. Иногда удается такая группировка, что после вынесения за скобки общих множителей в каждой группе в скобках остается один и тот же многочлен, который в свою очередь как общий множитель может быть вынесен за скобки.

Рассмотрим примеры разложения многочлена на множители способом группировки

Пример 4. $x^3 - 3x^2 + 5x - 15$.

Решение. Произведем группировку следующим образом:

$$(x^3 - 3x^2) + (5x - 15).$$

В первой группе вынесем за скобки общий множитель x^2, во второй — общий множитель 5. Получим $x^2(x - 3) + 5(x - 3)$. Теперь многочлен $(x - 3)$ как общий множитель вынесем за скобки: $(x - 3) \times$ $\times (x^2 + 5)$. Таким образом, получаем

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 15 = (x - 3)(x^2 + 5).$$

Пример 5. $20x^2 + 3yz - 15xy - 4xz$.

Решение. $20x^2 + 3yz - 15xy - 4xz = (20x^2 - 15xy) +$ $+ (3yz - 4xz) = 5x(4x - 3y) - z(4x - 3y) = (4x - 3y) \times$ $\times (5x - z)$.

Пример 6. $a^2 - 7ab + 12b^2$.

Решение. Здесь никакая группировка не приведет к появлению во всех группах одного и того же многочлена. В таких случаях иногда оказывается полезным представить какой-либо член многочлена в виде некоторой суммы, после чего снова попробовать применить способ группировки. В нашем примере целесообразно представить $-7ab$ в виде суммы $-3ab-4ab$. Получим

$$a^2-7ab+12b^2=a^2-3ab-4ab+12b^2=$$
$$=(a^2-3ab)-(4ab-12b^2)=a(a-3b)-4b(a-3b)=$$
$$=(a-3b)(a-4b).$$

Пример 7. x^4+4y^4.

Решение. Прибавим и отнимем одночлен $4x^2y^2$.

Получим $x^4+4y^4=(x^4+4x^2y^2+4y^4)-4x^2y^2=$

$=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2=(x^2+2y^2-2xy)(x^2+2y^2+2xy).$

Здесь применен *метод выделения полного квадрата.*

55. Многочлены от одной переменной. Многочлен $ax+b$, где a, b — числа ($a \neq 0$), а x — переменная, называют *многочленом первой степени*; многочлен ax^2+bx+c, где a, b, c — числа ($a \neq 0$), а x — переменная, называют *многочленом второй степени* или *квадратным трехчленом*; многочлен ax^3+bx^2+cx+d, где a, b, c, d — числа ($a \neq 0$), а x — переменная, называют *многочленом третьей степени.*

Вообще если $a, b, c, \ldots, l, m$ — числа ($a \neq 0$), а x — переменная, то многочлен

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+lx+m$$

называют *многочленом n-й степени* (*относительно x*); ax^n, bx^{n-1}, … , lx, m — члены многочлена, a, b, c, …, l, m — коэффициенты, ax^n — *старший член* многочлена, a — коэффициент при старшем члене, m — *свободный член* многочлена. Обычно многочлен записывают по убывающим степеням переменной, т. е. степени переменной x постепенно уменьшаются, в частности на первом месте стоит старший член, на последнем — свободный член. *Степень многочлена* — это степень старшего члена.

Например, $5x^5 - 2x^3 + 3x^2 + 1$ — многочлен пятой степени, в котором $5x^5$ — старший член, 1 — свободный член многочлена.

Если коэффициент при старшем члене равен 1, то многочлен называют *приведенным*, если указанный коэффициент отличен от 1, то *неприведенным*.

Корнем многочлена $P(x)$ называют такое значение x, при котором многочлен обращается в нуль. Например, число 2 является корнем многочлена $P(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 2$, так как $P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 - 2 = 0$.

56. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители. Если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ (т. е. корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$), то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Эта формула применяется для *разложения квадратного трехчлена на множители*.

П р и м е р. Разложить на множители $6x^2 - x - 2$.

Р е ш е н и е. Применив формулу корней квадратного уравнения (см. п. 137) к уравнению $6x^2 - x - 2 = 0$, находим $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{2}{3}$. Значит,

$$6x^2 - x - 2 = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot 3\left(x - \frac{2}{3}\right) =$$

$$= (2x + 1)(3x - 2).$$

57. Разложение на множители двучлена $x^n - a^n$. Известно, что

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a), \quad (1)$$

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + xa + a^2). \quad (2)$$

Если перемножить многочлены $x - a$ и $x^3 + x^2a + xa^2 + a^3$, то получим

$$x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + x^2a + xa^2 + a^3). \quad (3)$$

Обобщением формул (1), (2), (3) является формула разложения на множители двучлена $x^n - a^n$:

$$\boldsymbol{x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}).}$$

Если, в частности, $a = 1$, то получаем

$$\boldsymbol{x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1).}$$

Например, $x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

58. Возведение двучлена в натуральную степень (бином Ньютона). В этом пункте речь идет о том, как двучлен (или бином) $a + b$ возвести в любую натуральную степень.

Если $n = 1$, то $(a + b)^1 = a + b$.

Если $n = 2$, то $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Если $n = 3$, то $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Воспользовавшись тем, что $(a + b)^4 = (a + b)^3 (a + b)$, можно вывести формулу

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Вообще справедлива следующая формула (*бином Ньютона*):

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,a^{n-2}b^2 + $$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^{n-3}b^3 + \ldots + $$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k}\,a^{n-k}b^k + \ldots + b^n.$$

П р и м е р. Для $(a+b)^6$ по формуле бинома Ньютона получаем

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}a^4b^2 + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}a^3b^3 + $$
$$+\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^2b^4 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}ab^5 + b^6 = $$
$$= a^6 + 6a^5b^2 + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

§ 7. Дробные рациональные выражения

59. Рациональная дробь и ее основное свойство. Любое дробное выражение (см. п. 48) можно преобразовать к виду $\frac{P}{Q}$, где P и Q — многочлены. Такую дробь $\frac{P}{Q}$ называют *рациональной дробью*.

Примеры рациональных дробей:

$$\frac{x+1}{2x-\frac{1}{3}}, \quad \frac{(x+2)(x^2-3)}{a+2b+5c}.$$

Основное свойство дроби выражается тождеством $\frac{P}{Q} = \frac{PR}{QR}$, справедливым при условиях $R \neq 0$ и $Q \neq 0$; здесь R — целое рациональное выражение. Это значит, что числитель и знаменатель рациональной дроби можно умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, одночлен или многочлен. Например,

$$\frac{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1}{\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}} = \frac{12\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1\right)}{12\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}\right)} = \frac{4x^3 - 6x^2 + 12}{3x^2 + 2x + 6}.$$

Основное свойство дроби может быть использовано для перемены знаков у членов дроби. Если числитель и знаменатель дроби $\frac{P}{Q}$ умножить на -1, получим $\frac{P}{Q} = \frac{-P}{-Q}$. Таким образом, значение дроби не изменится, если одновременно изменить знаки у числителя и знаменателя. Если же изменить знак только у числителя или только у знаменателя, то и дробь изменит свой знак: $\frac{-P}{Q} = -\frac{P}{Q}$; $\frac{P}{-Q} = -\frac{P}{Q}$.

Значит, $\frac{P}{Q} = -\frac{-P}{Q} = -\frac{P}{-Q}$.

Например, $\frac{3x-2}{3x+4} = -\frac{-(3x-2)}{3x+4} = -\frac{2-3x}{3x+4}$.

60. Сокращение рациональных дробей. Сократить дробь — это значит разделить числитель и знаменатель дроби на их общий множитель. Возможность такого сокращения обусловлена основным свойством дроби.

Для того чтобы сократить рациональную дробь, нужно числитель и знаменатель разложить на множители. Если окажется, что числитель и знаменатель имеют общие множители, то дробь можно сократить. Если общих множителей нет, то преобразование дроби посредством сокращения невозможно.

П р и м е р. Сократить дробь $\dfrac{x^2 - 3xy}{9y^2 - x^2}$.

Р е ш е н и е. Имеем $x^2 - 3xy = x(x - 3y)$;

$$9y^2 - x^2 = -(x^2 - 9y^2) = -(x - 3y)(x + 3y).$$

Значит, $\dfrac{x^2 - 3xy}{9y^2 - x^2} = \dfrac{x(x - 3y)}{-(x - 3y)(x + 3y)} = -\dfrac{x}{x + 3y}$.

Сокращение дроби выполнено при условии $x - 3y \neq$ $\neq 0$.

61. Приведение рациональных дробей к общему знаменателю. *Общим знаменателем* нескольких рациональных дробей называют целое рациональное выражение, которое делится на знаменатель каждой дроби (см. п. 54).

Например, общим знаменателем дробей $\dfrac{x}{x + 2}$ и $\dfrac{3x - 1}{x - 2}$ служит многочлен $(x + 2)(x - 2)$, так как он делится и на $x + 2$, и на $x - 2$. Общим знаменателем могут также служить и многочлен $3\,(x + 2)^2 \cdot (x - 2)$, и многочлен $x\,(x + 2)\,(x - 2)$, и многочлен $5x^2\,(x + 2) \times$ $\times\,(x - 2)^3$ и т. д. Обычно берут такой общий знаменатель, что любой другой общий знаменатель делится на выбранный. Такой простейший знаменатель называют *наименьшим общим знаменателем*.

В рассмотренном выше примере наименьший общий знаменатель равен $(x + 2)(x - 2)$. Имеем

$$\frac{x}{x+2} = \frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)}; \quad \frac{3x-1}{x-2} = \frac{(3x-1)(x+2)}{(x+2)(x-2)}.$$

Приведение данных дробей к общему знаменателю достигнуто путем умножения числителя и знаменателя первой дроби на $x - 2$, а числителя и знаменателя второй дробей на $x + 2$. Многочлены $x - 2$ и $x + 2$ называют *дополнительными множителями* соответственно для первой и второй дроби. Дополнительный множитель для данной дроби равен частному от деления общего знаменателя на знаменатель данной дроби.

Чтобы несколько рациональных дробей привести к общему знаменателю, нужно:

1) разложить знаменатель каждой дроби на множители;

2) составить общий знаменатель, включив в произведение все множители полученных в п. 1) разложений; если некоторый множитель имеется в нескольких разложениях, то он берется с показателем степени, равным наибольшему из имеющихся;

3) найти дополнительные множители для каждой из дробей (для этого общий знаменатель делят на знаменатель дроби);

4) домножив числитель и знаменатель каждой дроби на соответствующий дополнительный множитель, привести дроби к общему знаменателю.

П р и м е р. Привести к общему знаменателю дроби

$$\frac{a}{12a^2-12b^2}; \quad \frac{b}{18a^3+18a^2b}; \quad \frac{a+b}{24a^2-24ab}.$$

Р е ш е н и е. Разложим знаменатели дробей на множители:

$$12a^2 - 12b^2 = 12(a-b)(a+b);$$

$$18a^3 + 18a^2b = 18a^2(a+b);$$

$$24a^2 - 24ab = 24a(a-b).$$

В общий знаменатель надо включить следующие множители: $(a - b)$, $(a + b)$, a^2, а также наименьшее общее кратное чисел 12, 18, 24, т. е. К (12, 18, 24) = = 72. Значит, общий знаменатель имеет вид $72a^2 \times$ $\times (a - b)(a + b)$.

Дополнительные множители: для первой дроби $6a^2$, для второй дроби $4(a - b)$, для третьей дроби $3a(a + b)$. Значит, получаем

$$\frac{\overset{6a^2}{a}}{12a^2 - 12b} = \frac{6a^3}{72a^2(a-b)(a+b)};$$

$$\frac{\overset{4(a-b)}{b}}{8a^3 + 18a^2} = \frac{4b(a-b)}{72a^2(a-b)(a+b)};$$

$$\frac{\overset{3a(a+b)}{a+b}}{24a^2 - 24ab} = \frac{3a(a+b)^2}{72a^2(a-b)(a+b)}.$$

62. Сложение и вычитание рациональных дробей. *Сумма* двух (и вообще любого конечного числа) рациональных дробей с одинаковыми знаменателями тождественно равна дроби с тем же знаменателем и с числителем, равным сумме числителей складываемых дробей:

$$\frac{P_1}{Q} + \frac{P_2}{Q} = \frac{P_1 + P_2}{Q}.$$

Аналогично обстоит дело в случае вычитания дробей с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{P_1}{Q} - \frac{P_2}{Q} = \frac{P_1 - P_2}{Q}.$$

П р и м е р 1. Упростить выражение $\frac{x^3}{x+y} + \frac{y^3}{x+y}$.

Р е ш е н и е. Выполним сложение данных дробей:
$\frac{x^3}{x+y} + \frac{y^3}{x+y} = \frac{x^3+y^3}{x+y} = \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x+y} = x^2 - {}$
$- xy + y^2$.

Для сложения или вычитания рациональных дробей с разными знаменателями нужно прежде всего привести дроби к общему знаменателю, а затем выполнить операции над полученными дробями с одинаковыми знаменателями.

П р и м е р 2. Упростить выражение $\frac{3}{2x^2+2x} + {}$
$+ \frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{2}{x}$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$2x^2 + 2x = 2x(x+1);$$
$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

Значит,

$$\frac{3}{2x^2+2x} + \frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{2}{x} = \frac{\overbrace{3}^{x-1}}{2x(x+1)} + \frac{\overbrace{2x-1}^{2x}}{(x-1)(x+1)} -$$

$$- \frac{\overbrace{2}^{2(x-1)(x+1)}}{x} = \frac{3(x-1)+2x(2x-1)-4(x-1)(x+1)}{2x(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{x+1}{2x(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2x(x-1)}.$$

63. Умножение и деление рациональных дробей. *Произведение* двух (и вообще любого конечного числа) рациональных дробей тождественно равно дроби, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель — произведению знаменателей перемножаемых дробей:

$$\frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 \cdot P_2}{Q_1 \cdot Q_2}.$$

Частное от деления двух рациональных дробей тождественно равно дроби, числитель которой равен произведению числителя первой дроби на знаменатель второй дроби, а знаменатель — произведению знаменателя первой дроби на числитель второй дроби:

$$\frac{P_1}{Q_1} : \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 \cdot Q_2}{Q_1 \cdot P_2}.$$

Сформулированные правила умножения и деления распространяются и на случай умножения или деления на многочлен: достаточно записать этот многочлен в виде дроби со знаменателем 1.

Учитывая возможность сокращения рациональной дроби, полученной в результате умножения или деления рациональных дробей, обычно стремятся до выполнения этих операций разложить на множители числители и знаменатели исходных дробей.

Пример 1. Выполнить умножение $\frac{x^2+2x+1}{18x^3} \times$

$\times \frac{9x^4}{x^2-1}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{x^2+2x+1}{18x^3} = \frac{(x+1)^2}{18x^3}; \quad \frac{9x^4}{x^2-1} = \frac{9x^4}{(x-1)(x+1)}.$$

Использовав правило умножения дробей, получим

$$\frac{x^2+2x+1}{18x^3}\cdot\frac{9x^4}{x^2-1}=\frac{(x+1)^2\cdot 9x^4}{18x^3(x+1)(x-1)}=\frac{x(x+1)}{2(x-1)}.$$

П р и м е р 2. Выполнить деление $\frac{a^3-2a^2}{3a+3}$: $: \frac{a^2-4}{3a^2+6a+3}$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\frac{a^3-2a^2}{3a+3}=\frac{a^2(a-2)}{3(a+1)};\ \frac{a^2-4}{3a^2+6a+3}=\frac{(a-2)(a+2)}{3(a+1)^2}.$$

Использовав правило деления дробей, получаим

$$\frac{a^3-2a^2}{3a+3}:\frac{a^2-4}{3a^2+6a+3}=\frac{a^2(a-2)\cdot 3(a+1)^2}{3(a+1)(a-2)(a+2)}=$$

$$=\frac{a^2(a+1)}{a+2}.$$

64. Возведение рациональной дроби в целую степень. Чтобы возвести рациональную дробь $\frac{P}{Q}$ в натуральную степень n, нужно возвести в эту степень отдельно числитель и знаменатель дроби; первое выражение — числитель, а второе выражение — знаменатель результата:

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^n=\frac{P^n}{Q^n}.$$

П р и м е р 1. Преобразовать в дробь степень $\left(\frac{2x^2y^3}{3z^5}\right)^3$.

Р е ш е н и е. Применив правила возведения в степень дроби и одночлена, получим $\left(\frac{2x^2y^3}{3z^5}\right)^3 =$ $= \frac{(2x^2y^3)^3}{(3z^5)^3} = \frac{8x^6y^9}{27z^{15}}$.

При возведении дроби в целую отрицательную степень используется тождество $\left(\frac{P}{Q}\right)^{-n} = \left(\frac{Q}{P}\right)^n$, справедливое для всех значений переменных, при которых $P \neq 0$ и $Q \neq 0$.

П р и м е р 2. Преобразовать в дробь выражение

$$\left(\frac{(a+b)^2(a-b)^3}{(a+2b)^4}\right)^{-5}.$$

Р е ш е н и е.

$$\left(\frac{(a+b)^2(a-b)^3}{(a+2b)^4}\right)^{-5} = \left(\frac{(a+2b)^4}{(a+b)^2(a-b)^3}\right)^5 =$$

$$= \frac{(a+2b)^{20}}{(a+b)^{10}(a-b)^{15}}.$$

65. Преобразование рациональных выражений. Преобразование любого рационального выражения сводится к сложению, вычитанию, умножению и делению рациональных дробей, а также к возведению дроби в натуральную степень. Всякое рациональное выражение можно преобразовать в дробь, числитель и знаменатель которой — целые выражения; в этом, как правило, состоит цель тождественных преобразований рациональных выражений.

П р и м е р. Упростить выражение

$$\left(\frac{2a}{2a+b} - \frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right) \cdot \left(\frac{2a}{4a^2-b^2} + \frac{1}{b-2a}\right)^{-1} + \frac{8a^2}{2a+b}.$$

Р е ш е н и е. Выполняя действия с рациональными дробями, получим:

$$1)\ \frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b}=\frac{2a}{2a+b}^{\overbrace{\qquad}^{2a+b}}-\frac{4a^2}{(2a+b)^2}=$$

$$=\frac{2a(2a+b)-4a^2}{(2a+b)^2}=\frac{2ab}{(2a+b)^2};$$

$$2)\ \frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}=\frac{2a}{(2a-b)(2a+b)}-\frac{1}{2a-b}^{\overbrace{\qquad}^{2a+b}}=$$

$$=\frac{2a-2a-b}{(2a-b)(2a+b)}=\frac{-b}{(2a-b)(2a+b)};$$

$$3)\left(-\frac{b}{(2a-b)(2a+b)}\right)^{-1}=-\frac{(2a-b)(2a+b)}{b};$$

$$4)\frac{2ab}{(2a+b)^2}\cdot\left(-\frac{(2a-b)(2a+b)}{b}\right)=-\frac{2ab(2a-b)(2a+b)}{b(2a+b)^2}=$$

$$=-\frac{2a(2a-b)}{2a+b}=\frac{2ab-4a^2}{2a+b};$$

$$5)\ \frac{2ab-4a^2}{2a+b}+\frac{8a^2}{2a+b}=\frac{2ab+4a^2}{2a+b}=\frac{2a(2a+b)}{2a+b}=2a.$$

§ 8. Иррациональные выражения

66. Простейшие преобразования арифметических корней (радикалов). При преобразовании арифметических корней используются их свойства 1°—5° (см. п. 35).

Рассмотрим несколько примеров на применение свойств арифметических корней для простейших преобразований радикалов. При этом все переменные будем считать принимающими только неотрицательные значения.

П р и м е р 1. Извлечь корень из произведения $\sqrt[3]{a^3b^9}$.

Р е ш е н и е. Применив свойство 1°, получим

$$\sqrt[3]{a^3b^9} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^9} = ab^3.$$

П р и м е р 2. Вынести множитель из-под знака корня $\sqrt{45a^5}$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$\sqrt{45a^5} = \sqrt{9a^4 5a} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{a^4} \cdot \sqrt{5a} = 3a^2 \sqrt{5a}.$$

Такое преобразование называют *вынесением множителя из-под знака корня*. Цель преобразования — упростить подкоренное выражение.

П р и м е р 3. Упростить $(\sqrt[3]{a^2})^5$.

Р е ш е н и е. По свойству 3° имеем $(\sqrt[3]{a^2})^5 = \sqrt[3]{(a^2)^5} = \sqrt[3]{a^{10}}$.

Обычно стараются подкоренное выражение упростить, для чего выносят множители за знак корня. Имеем $\sqrt[3]{a^{10}} = \sqrt[3]{a^9 \cdot a} = \sqrt[3]{a^9} \cdot \sqrt[3]{a} = a^3 \sqrt[3]{a}$.

Итак, $(\sqrt[3]{a^2})^5 = a^3 \sqrt[3]{a}$.

П р и м е р 4. Упростить $\sqrt[4]{x^2 \sqrt[3]{x}}$.

Р е ш е н и е. Преобразуем выражение $x^2 \sqrt[3]{x}$, внеся множитель под знак корня: $x^2 \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{(x^2)^3} \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^6 x} = \sqrt[3]{x^7}$. По свойству 4° имеем $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^7}} = \sqrt[12]{x^7}$.

П р и м е р 5. Упростить $\sqrt[30]{2^9}$.

Р е ш е н и е. По свойству 5° мы имеем право показатель корня и показатель степени подкоренного выражения разделить на одно и то же натуральное число. Если в рассматриваемом примере разделить указанные показатели на 3, то получим $\sqrt[30]{2^9} = \sqrt[10]{2^3} = \sqrt[10]{8}$.

П р и м е р 6. Упростить выражения:

$$\text{а) } \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a^2}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}; \quad \text{в) } \sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^7}.$$

Р е ш е н и е. а) По свойству 1° получаем, что для перемножения корней одной и той же степени достаточно перемножить подкоренные выражения и из полученного результата извлечь корень той же степени. Значит,

$$\sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a^2} = \sqrt[5]{a \cdot a^2} = \sqrt[5]{a^3}.$$

б) Прежде всего мы должны привести радикалы к одному показателю. Согласно свойству 5° мы можем показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить на одно и то же натуральное число. Поэтому $\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}$. Далее имеем $\sqrt[6]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a} = \sqrt[6]{a^3}$. А теперь в полученном результате разделим показатели корня и степени подкоренного выражения на 3: $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$.

Итак, $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a} = \sqrt{a}$.

в) Приведем радикалы к одному показателю. Для этого нужно найти наименьшее общее кратное чисел 8 и 12, т. е. К (8, 12) = 24. Далее показатели корня и степени подкоренного выражения для первого из перемножаемых радикалов следует умножить на 3, а для второго — на 2. Получим

$$\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^7} = \sqrt[24]{x^9} \cdot \sqrt[24]{x^{14}} = \sqrt[24]{x^9 \cdot x^{14}} = \sqrt[24]{x^{23}}.$$

На практике при выполнении действий над радикалами довольно часто переходят к дробным показателям. Например,

$$\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^7} = x^{\frac{3}{8}} \cdot x^{\frac{7}{12}} = x^{\frac{3}{8}+\frac{7}{12}} = x^{\frac{23}{24}} = \sqrt[24]{x^{23}}.$$

67. Тождество $\sqrt{a^2} = |a|$. Упростим выражение $\sqrt{a^2}$. Здесь могут представиться два случая: $a \geqslant 0$ или $a < 0$. Если $a \geqslant 0$, то $\sqrt{a^2} = a$; например, $\sqrt{2^2} = 2$, $\sqrt{27^2} = 27$, $\sqrt{0^2} = 0$. Если же $a < 0$, то $\sqrt{a^2} = -a$; например, $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = -(-2)$. Итак,

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Но точно так же определяется модуль действительного числа (см. п. 26). Таким образом,

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Например, $\sqrt{3^2} = |3| = 3$; $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = -(-5) = 5$.

Вообще, если n — четное число, т. е. $n = 2k$, то

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|.$$

П р и м е р. Упростить выражение

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{2 - x} + x - 3.$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x - 3|.$$

Поскольку заданное выражение содержит слагаемое $\sqrt{2 - x}$, то $2 - x \geqslant 0$, откуда находим, что $x \leqslant 2$.

Значит, $x - 3 < 0$, а потому $|x - 3| = -(x - 3) = 3 - x$. Итак, $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 3 - x$, и мы получаем

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{2 - x} + x - 3 = 3 - x + \sqrt{2 - x} + x - 3 = \\ = \sqrt{2 - x}.$$

68. Преобразование иррациональных выражений. Для преобразования иррациональных выражений используются свойства радикалов (см. п. 35) и свойства степени с рациональным показателем (см. п. 38).

П р и м е р. Упростить выражение

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x}}{1 - \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 \left(x^0 + \frac{2}{\sqrt{x}} + x^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Р е ш е н и е.

1) $\dfrac{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x}}{1 - \sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x^2} - 1)}{1 - \sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt[4]{x}(\sqrt{x} - 1)}{1 - \sqrt{x}} = -\sqrt[4]{x}$;

2) $-\sqrt[4]{x} + \dfrac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} = \dfrac{-\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{x} + 1 + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} = \dfrac{-\sqrt{x} + 1 + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} =$

$= \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$;

3) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 = \dfrac{1^2}{(\sqrt[4]{x})^2} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

4) $x^0 + \dfrac{2}{\sqrt{x}} + x^{-1} = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x + 2\sqrt{x} + 1}{x} =$

$= \dfrac{(\sqrt{x} + 1)^2}{x}$;

5) $\left(\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{x}{(\sqrt{x}+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{x}{(\sqrt{x}+1)^2}} =$

$= \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$;

6) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$.

Итак, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$.

Обычно стараются записать ответ так, чтобы в знаменателе не содержалась иррациональность. Для избавления от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ умножим и числитель, и знаменатель на $\sqrt{x} - 1$ — это выражение называют *сопряженным* для выражения $\sqrt{x} + 1$. Получим

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x^2})-1^2} = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}.$$

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

§ 9. Определение и свойства функций

69. Определение функции. Если даны числовое множество X и правило f, позволяющее поставить в соответствие каждому элементу x из множества X определенное число y, то говорят, что *задана функция* $y = f(x)$ *с областью определения* X; пишут:

$$y = f(x),\ x \in X.$$

При этом переменную x называют *независимой переменной* или *аргументом*, а переменную y — *зависимой переменной*. Для области определения функции используют также обозначение $D(f)$. Множество всех значений функции $y = f(x)$, $x \in X$, называют *областью значений функции* и обозначают $E(f)$.

Если функция задана выражением, то допускается ее задание в виде $y = f(x)$ без условия $x \in X$ в случае, когда область определения выражения $f(x)$ совпадает с областью определения функции.

Например, запись «функция $y = \sqrt{x}$» означает $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$, поскольку область определения выражения $\sqrt{x}$ задается неравенством $x \geqslant 0$.

70. Аналитическое задание функции. Чтобы задать функцию, нужно указать способ, с помощью которого для каждого значения аргумента можно найти соответствующее значение функции. Наиболее употребительным является способ задания функции с помощью формулы $y = f(x)$, где $f(x)$ — некоторое выражение с переменной x. В таком случае говорят, что функция задана формулой или что функция задана аналитически.

П р и м е р 1. $y = x^2 + 5x - 1$, где $x \geqslant 0$. Область определения этой функции — луч $[0; +\infty)$. Чтобы найти значение функции в любой точке $x \geqslant 0$, достаточно найти числовое значение выражения $x^2 + 5x - 1$ в выбранной точке. Функция задана аналитически.

П р и м е р 2. Функция $y = f(x)$ задана аналитически формулой $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^4 + 3}$. Найти: а) $f(-x)$; б) $f(kx)$; в) $f(x + a)$; г) $f(|x|)$.

Р е ш е н и е. а) Чтобы найти $f(-x)$, надо в $f(x)$ всюду вместо x подставить $(-x)$. Получим

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + (-x) + 1}{(-x)^4 + 3} = \frac{x^2 - x + 1}{x^4 + 3}.$$

Итак,

$$f(-x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^4 + 3};$$

б) $f(kx) = \dfrac{(kx)^2 + (kx) + 1}{(kx)^4 + 3} = \dfrac{k^2x^2 + kx + 1}{k^4x^4 + 3}$;

в) $f(x + a) = \dfrac{(x + a)^2 + (x + a) + 1}{(x + a)^4 + 3}$;

г) $f(|x|) = \dfrac{|x|^2 + |x| + 1}{|x|^4 + 3} = \dfrac{x^2 + |x| + 1}{x^4 + 3}$.

П р и м е р 3. Найти область определения функции $y = \frac{1}{x + 2}$.

Р е ш е н и е. Выражение $\frac{1}{x + 2}$ определено при всех x, кроме того значения, которое обращает знаменатель в 0, — это значение $x = -2$. Значит, область определения функции состоит из всех чисел, кроме $x = -2$.

Пример 4. Найти область определения функции $y = \sqrt{x-1}$.

Решение. Выражение $\sqrt{x-1}$ определено при тех x, при которых $x - 1 \geqslant 0$, т. е. при $x \geqslant 1$. Значит, область определения функции — луч $[1; +\infty)$.

Иногда функция задается на различных промежутках различными формулами. Такую функцию называют *кусочной*.

Пример: $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ x + 2, \text{ если } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Эта функция определена на отрезке $[-1; 1]$. Для вычисления ее значений нужно точно определить, какой формулой следует воспользоваться для заданного конкретного значения аргумента. Например, если нужно вычислить $f(0{,}5)$, воспользуемся равенством $f(x) = x + 2$ (поскольку число $x = 0{,}5$ удовлетворяет условию $0 < x \leqslant 1$) и получим $f(0{,}5) = 2{,}5$. Если же нужно вычислить $f(-0{,}5)$, то воспользуемся равенством $f(x) = 2x + 3$ (поскольку число $x = 0{,}5$ удовлетворяет условию $-1 \leqslant x < 0$) и получим $f(-0{,}5) = 2$.

71. Табличное задание функции. На практике часто используют *табличный* способ задания функции. При этом способе приводится таблица, указывающая значения функции для имеющихся в таблице значений аргумента. Примерами табличного задания функции являются таблица квадратов, таблица кубов, таблица квадратных корней.

Во многих случаях табличное задание функции оказывается удобным. Оно позволяет найти значения функции для значений аргумента, имеющихся в таблице, без всяких вычислений. На практике часто зависимость одной величины от другой находят опытным путем. В этом случае одной величине придают определенные значения, а потом из опыта для каждого из таких значений находят значение (обычно приближенное) второй величины. Таким образом, опыт позволяет составить некоторую таблицу значений функции. Существуют методы, позволяющие по такой таблице подбирать формулы, задающие функции (с определенной точностью).

72. Числовая плоскость. Координатная плоскость, оси координат. Множество всех пар[1] действительных чисел называют *числовой плоскостью*.

Как для множества всех действительных чисел есть геометрическая модель — координатная прямая (см. п. 21), так и для множества всех пар действительных чисел есть геометрическая модель — координатная плоскость. *Координатная плоскость xy* определяется двумя взаимно перпендикулярными координатными прямыми с общим началом O и одинаковым масштабом (рис. 1.7). Точка O — *начало координат*. Горизон-

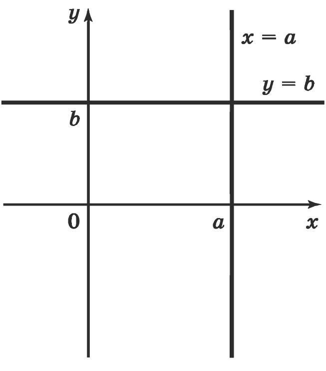


Рис. 1.7

[1] Под парой чисел понимают два числа, которые рассматриваются в определенном порядке.

тальная прямую называют *осью абсцисс* или осью x, вертикальную — *осью ординат* или осью y.

Если отметить на координатной плоскости все точки с абсциссой $x = a$, то получится прямая, параллельная оси y (рис. 1.7); говорят, что $x = a$ — уравнение этой прямой. Если отметить на координатной плоскости все точки с ординатой $y = b$, то получится прямая, параллельная оси x (рис. 1.7); говорят, что $y = b$ — уравнение этой прямой.

О координатной плоскости см. также «Геометрия», п. 101.

73. График функции, заданной аналитически. Пусть функция задана аналитически формулой $y = f(x)$. Если на координатной плоскости отметить все точки, обладающие следующим свойством: абсцисса точки принадлежит области определения функции, а ордината равна соответствующему значению функции, — то получится множество точек $(x; f(x))$ — *график функции*.

Например, графиком функции $y = x$ является множество точек вида $(x; x)$, т. е. точек, имеющих одинаковые координаты. Это множество точек есть биссектриса координатных углов I и III (рис. 1.8).

На практике для построения графика функции составляют таблицу значений функции при некоторых значениях аргумента, наносят на плоскость соответствующие точки и соединяют полученные точки линией. При этом предполагают, что найденные точки достаточно точно показывают ход изменения функции.

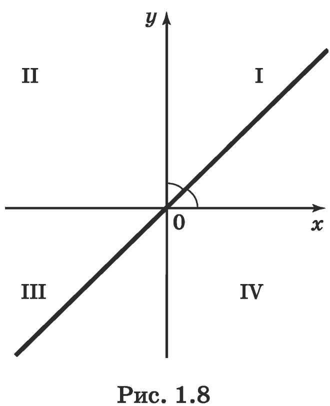


Рис. 1.8

Пример. Построить график функции $y = x^2$.

Решение. Составим таблицу некоторых значений функции:

x	-3	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2	3
y	9	4	1	$0,25$	0	$0,25$	1	4	9

Нанесем найденные точки (0; 0); (0,5; 0,25); (−0,5; 0,25); (1; 1); (−1; 1); (2; 4); (−2; 4); (3; 9); (−3; 9) на координатную плоскость (рис. 1.9). Соединив эти точки плавной линией, получим график (а точнее, эскиз графика) функции $y = x^2$ (рис. 1.10). Эту линию называют *параболой*. Вообще параболой является график любой функции вида $y = ax^2$, где $a \neq 0$ (см. п. 111).

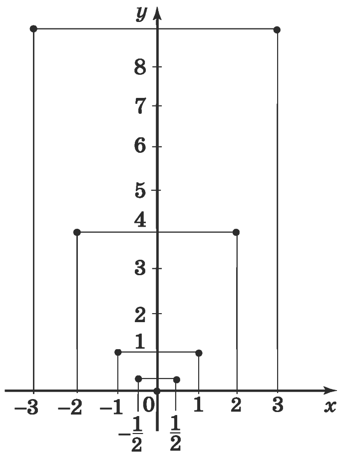


Рис. 1.9

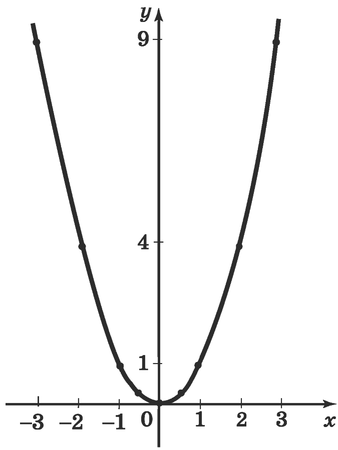


Рис. 1.10

74. Четные и нечетные функции. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$, называют *четной*, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Функцию $y = f(x)$, $x \in X$, называют *нечетной*, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Например, $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$ — четные функции, а $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$ — нечетные функции.

Если функция $y = f(x)$ такова, что хотя бы для одной пары значений x и $-x$ оказалось, что $f(-x) \neq -f(x)$, и хотя бы для одной пары значений x и $-x$ оказалось, что $f(-x) \neq f(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

Из определения следует, что область определения X как четной, так и нечетной функции должна обладать следующим свойством: если $x \in X$, то и $-x \in X$ (т. е. X — симметричное относительно O множество).

П р и м е р. Исследовать на четность функции: а) $y = x^{20}$; б) $y = x^{13}$; в) $y = \frac{x-4}{x^2-9}$.

Р е ш е н и е. а) Имеем $f(x) = x^{20}$, $f(-x) = (-x)^{20} = x^{20}$. Значит, $f(-x) = f(x)$ для всех x. Функция является четной.

б) Имеем $f(x) = x^{13}$, $f(-x) = (-x)^{13} = -x^{13}$. Значит, $f(-x) = -f(x)$ для всех x. Функция является нечетной.

в) Имеем $f(x) = \frac{x-4}{x^2-9}$. Заметим, что $f(4) = 0$, а $f(-4) = -\frac{8}{7}$. Не выполняется ни равенство $f(4) = f(-4)$, ни равенство $f(-4) = -f(4)$. Значит, функция не является ни четной, ни нечетной.

75. График четной функции. График нечетной функции. Графики четной и нечетной функций обладают следующими особенностями:

Если функция является четной, то ее график симметричен относительно оси ординат.

Если функция является нечетной, то ее график симметричен относительно начала координат.

Пример 1. Построить график функции $y = |x|$.

Решение. Имеем $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$. Значит, функция четна, а потому ее график симметричен относительно оси ординат.

Если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$, т. е. при $x \geqslant 0$ имеем $y = x$. Графиком функции $y = x$ при $x \geqslant 0$ служит биссектриса первого координатного угла. Подвергнув ее преобразованию симметрии относительно оси y, получим график функции $y = |x|$ (рис. 1.11).

Пример 2. Построить график функции $y = x\,|x|$.

Решение. Имеем $f(-x) = (-x)\,|-x| = -x\,|x| = -f(x)$. Значит, функция нечетна, а потому график ее симметричен относительно начала координат.

Если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$, а $f(x) = x \cdot |x| = x \cdot x = x^2$. Значит, при $x \geqslant 0$ имеем $y = x^2$. Графиком будет ветвь параболы. Она изображена на рисунке 1.12. Подвергнув ее преобразованию симметрии относительно начала координат, получим график функции $y = x\,|x|$ (рис. 1.13).

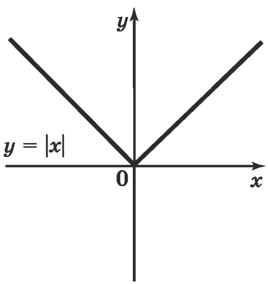


Рис. 1.11

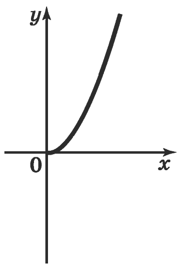


Рис. 1.12

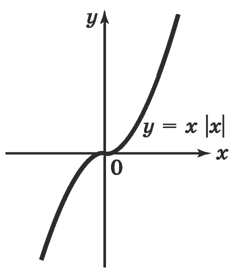


Рис. 1.13

76. Периодические функции. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$, называют *периодической*, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из области определения функции справедливо равенство $f(x + T) = f(x) = f(x - T)$.

Число T называют *периодом функции* $y = f(x)$.

Из этого определения сразу следует, что если T — период функции $y = f(x)$, то $2T$, $3T$, $4T$, $-T$, $-2T$, $-3T$, $-4T$ — также периоды функции. Значит, у периодической функции бесконечно много периодов. Если T — период функции, то и число вида kT, где k — любое целое число, также является периодом функции.

Чаще всего (но не всегда) среди множества положительных периодов функции можно найти наименьший. Его называют *основным периодом*.

Графики периодических функций обладают следующей особенностью. Если T — основной период функции $y = f(x)$, то для построения ее графика достаточно построить ветвь графика на одном из промежутков оси x длиной T, а затем осуществить параллельный перенос этой ветви по оси x на $\pm T$, $\pm 2T$, $\pm 3T$, ... (рис. 1.14). Чаще всего в качестве такого промежутка длиной T выбирают промежуток с концами в точках $\left(-\frac{T}{2}; 0\right)$ и $\left(\frac{T}{2}; 0\right)$ или $(0; 0)$ и $(T; 0)$.

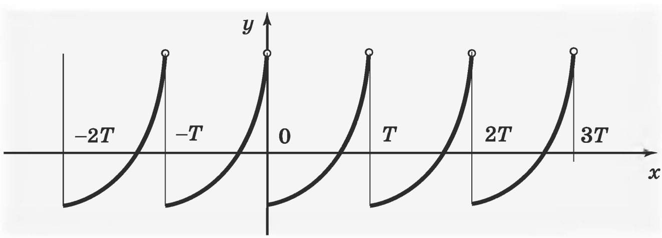


Рис. 1.14

Примеры периодических функций с основным периодом:

$y = \{x\}$, $T = 1$ (см. п. 93);

$y = \sin x$, $T = 2\pi$ (см. п. 102);

$y = \cos x$, $T = 2\pi$ (см. п. 103);

$y = \operatorname{tg} x$, $T = \pi$ (см. п. 104);

$y = \operatorname{ctg} x$, $T = \pi$ (см. п. 105).

77. Монотонные функции. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$, называют *возрастающей на промежутке* $X_1 \subset X$ ($\subset$ — знак включения одного множества в другое), если для любых x_1 и x_2 из X_1 таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ (короче: } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)).$$

Функцию $y = f(x)$, $x \in X$, называют *убывающей на промежутке* $X_1 \subset X$, если для любых x_1 и x_2 из X_1 таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ (короче: } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)).$$

Иными словами, функция возрастает (убывает) на промежутке, если, какие бы два значения аргумента, принадлежащие этому промежутку, ни взять, окажется, что большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции.

При движении вдоль оси абсцисс слева направо ордината графика возрастающей функции увеличивается (рис. 1.15), а ордината графика убывающей функции уменьшается (рис. 1.16).

Возрастающие и убывающие функции объединяют термином «*монотонные* функции».

Пример. Исследовать на монотонность функцию $y = 2x^3 + 3$.

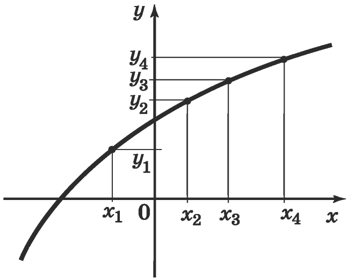


Рис. 1.15

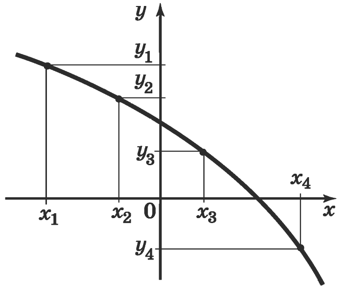


Рис. 1.16

Р е ш е н и е. Пусть $x_1 < x_2$. Тогда по свойствам числовых неравенств (см. п. 24) имеем $x_1^3 < x_2^3$, $2x_1^3 < 2x_2^3$, $2x_1^3 + 3 < 2x_2^3 + 3$, т. е. $f(x_1) < f(x_2)$.

Итак, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, а это значит, что функция $y = 2x^3 + 3$ возрастает на всей числовой прямой.

§ 10. Виды функций

78. Постоянная функция. *Постоянной* называют функцию, заданную формулой $y = b$, где b — некоторое число.

Графиком постоянной функции $y = b$ является прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку $(O; b)$ на оси ординат. На рисунке 1.17 изображены графики нескольких постоянных функций. В частности, графиком функции $y = 0$ является ось абсцисс.

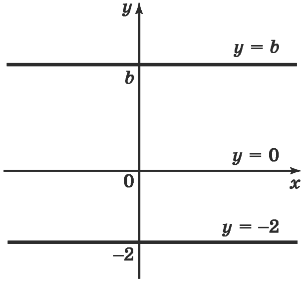


Рис. 1.17

79. Прямая пропорциональность. *Прямой пропорциональностью* называют функцию, заданную формулой

$$y = kx,$$

где $k \neq 0$. Число k называют *коэффициентом пропорциональности*.

Перечислим свойства функции $y = kx$.

1) Область определения функции — множество всех действительных чисел.

2) $y = kx$ — нечетная функция.

В самом деле, $f(-x) = k(-x) = -kx = -f(x)$.

3) При $k > 0$ функция возрастает, а при $k < 0$ убывает на всей числовой прямой.

Теорема 1. Графиком прямой пропорциональности $y = kx$ является прямая, проходящая через начало координат.

Доказательство. Проведем прямую через начало координат и точку $A\,(1; k)$ и докажем, что она является графиком функции $y = kx$.

Рассмотрим сначала случай, когда $k > 0$ (рис. 1.18).

Возьмем любую точку $M\,(x; y)$, лежащую на прямой l. Из подобия треугольников $OA1$ и OMx заключаем, что $\frac{Mx}{A1} = \frac{Ox}{O1}$, т. е. $\frac{y}{k} = \frac{x}{1}$, откуда $y = kx$. Возьмем теперь точку $P\,(x; y)$, не лежащую на прямой l. Тогда координаты точки M_1 с той же абсциссой, но лежащей на прямой l, удовлетворяют уравнению $y = kx$; значит, координаты точки P этому уравнению не удовлетворяют. Итак, точки

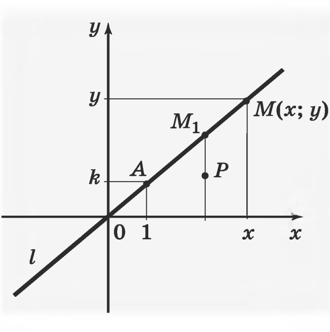


Рис. 1.18

прямой l, и только они, удовлетворяют формуле $y = kx$; значит, прямая l — график функции $y = kx$.

Рассмотрим теперь случай, когда $k < 0$. Возьмем две функции: $y = kx$ и $y = -kx$. При одной и той же абсциссе x ординаты графиков этих функций равны по модулю, но противоположны по знаку. Значит, графики этих функций симметричны относительно оси абсцисс. Но $-k > 0$ и, по доказанному выше, графиком функции $y = -kx$ является прямая. Поскольку при преобразовании симметрии прямая переходит в прямую, то и графиком функции $y = kx$ является прямая.

На рисунке 1.19, изображен график функции $y = kx$ при $k > 0$, а на рисунке 1.20 — график функции $y = kx$ при $k < 0$.

П р и м е р. Построить график функции $y = 2x$.

Р е ш е н и е. Мы знаем, что графиком является прямая, проходящая через начало координат. Для ее построения достаточно найти одну точку графика, отличную от начала координат, и провести прямую через начало координат и найденную точку. В качестве такой точки выберем точку (1; 2) (если $x = 1$, то $y = 2 \cdot 1 = 2$). График функции $y = 2x$ изображен на рисунке 1.21.

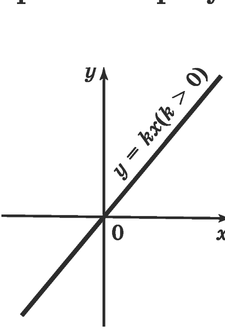


Рис. 1.19

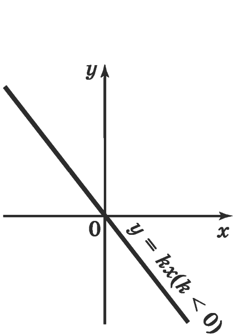


Рис. 1.20

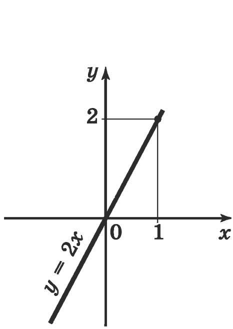


Рис. 1.21

80. Линейная функция. *Линейной функцией* называют функцию, заданную формулой

$$y = kx + b,$$

где k и b — действительные числа. Если, в частности, $k = 0$, то получаем постоянную функцию $y = b$; если $b = 0$, то получаем прямую пропорциональность $y = kx$.

Перечислим свойства линейной функции $y = kx + b$ при $k \neq 0$, $b \neq 0$.

1) Область определения функции — множество всех действительных чисел.

2) Функция $y = kx + b$ ни четна, ни нечетна.

3) При $k > 0$ функция возрастает, а при $k < 0$ убывает на всей числовой прямой.

Теорема 2. Графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая.

Доказательство. Если $k = 0$, то получаем постоянную функцию $y = b$, ее графиком является прямая, параллельная оси x (см. п. 78).

Если $b = 0$, то получаем прямую пропорциональность $y = kx$, ее графиком, по теореме 1, является прямая, проходящая через начало координат (см. п. 79).

Пусть $k \neq 0$ и $b \neq 0$. Если точка $(x_1; y_1)$ принадлежит графику функции $y = kx$ (т. е. выполняется равенство $y_1 = kx_1$), то точка $(x_1; y_1 + b)$ принадлежит графику функции $y = kx + b$ (т. е. выполняется равенство $y_1 + b = kx_1 + b$).

Но преобразование фигуры F, при котором произвольная ее точка $(x_1; y_1)$ переходит в точку $(x_1; y_1 + b)$, является параллельным переносом (см. п. 112), а при параллельном переносе прямая переходит в параллельную ей прямую.

Итак, графиком функции $y = kx + b$ является прямая, параллельная графику прямой пропорциональности $y = kx$.

На рисунке 1.22 изображен график функции $y = kx + b$. Это прямая, параллельная прямой, служащей графиком функции $y = kx$, и проходящая через точку $(0; b)$ на оси ординат.

Число k называют *угловым коэффициентом прямой*, оно равно тангенсу угла α между прямой и положительным лучом оси x, т. е. $k = \operatorname{tg}\alpha$.

П р и м е р. Построить график функции $y = -\frac{x}{2} + 4$.

Р е ш е н и е. Графиком линейной функции является прямая, а для построения прямой достаточно знать две точки графика. Заполним таблицу:

x	0	4
y	4	2

(аргументу x дали значения 0 и 4 и по формуле $y = -\frac{x}{2} + 4$ нашли соответствующие значения y). Отметим на координатной плоскости точки (0; 4) и (4; 2) и проведем через эти точки прямую (рис. 1.23).

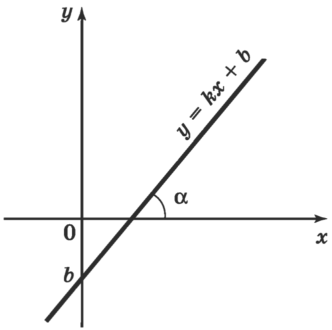


Рис. 1.22

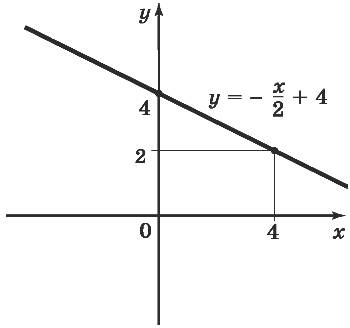


Рис. 1.23

81. Взаимное расположение графиков линейных функций. Пусть даны две линейные функции:

$$y = k_1x + b_1 \text{ и } y = k_2x + b_2.$$

Их графиками служат прямые (см. п. 80). Эти прямые *пересекаются*, если $k_1 \neq k_2$ (рис. 1.24). Прямые *параллельны*, если $k_1 = k_2$. Последний случай, в свою очередь, можно разбить на два: если $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$, то прямые совпадают; если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$, то прямые *параллельны и не совпадают* (рис. 1.25).

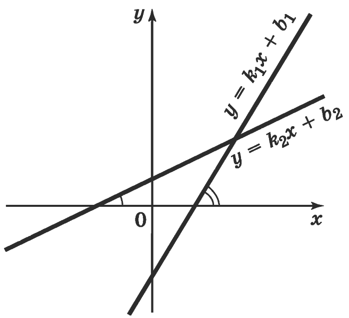


Рис. 1.24

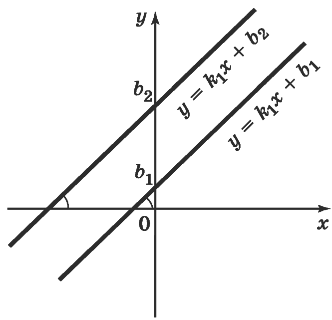


Рис. 1.25

82. Обратная пропорциональность. *Обратной пропорциональностью* называют функцию, заданную формулой

$$y = \frac{k}{x},$$

где $k \neq 0$. Число k называют *коэффициентом обратной пропорциональности.*

Перечислим свойства функции $y = \dfrac{k}{x}$.

1) Область определения — множество всех действительных чисел, кроме нуля.

2) $y = \frac{k}{x}$ — нечетная функция .

В самом деле, $f(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x)$.

3) Если $k > 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ убывает на промежутке $(0; +\infty)$ и на промежутке $(-\infty; 0)$. Если $k < 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$ и на промежутке $(0; +\infty)$.

Построим график функции $y = \frac{1}{x}$. Сначала построим ветвь графика на промежутке $(0; +\infty)$. Составим таблицу значений функции:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Нанесем полученные точки на координатную плоскость и соединим их плавной кривой (рис. 1.26). Это и будет ветвь графика функции $y = \frac{1}{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

Воспользовавшись нечетностью функции $y = \frac{1}{x}$, добавим к построенной ветви ветвь, симметричную ей относительно начала координат. Получим график функции $y = \frac{1}{x}$ (рис.1.27).

Аналогичный вид имеет график функции $y = \frac{k}{x}$ при любом положительном k. На рисунке 1.28 изображен график функции $y = \frac{2}{x}$.

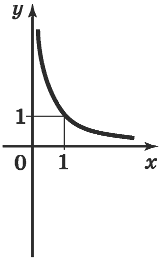


Рис. 1.26

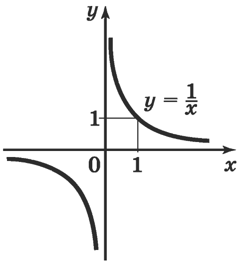


Рис. 1.27

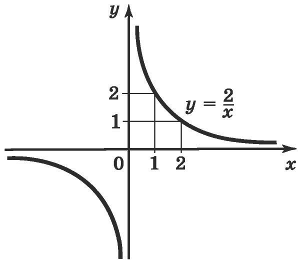


Рис. 1.28

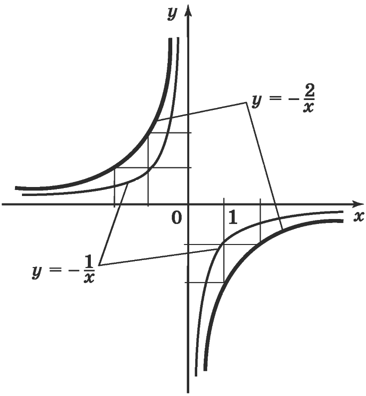


Рис. 1.29

Если $k < 0$, то ветви графика обратной пропорциональности расположены не в I и III координатных четвертях, как в случае, когда $k > 0$, а во II и IV. На рисунке 1.29 изображены графики функций

$$y = -\frac{1}{x}, \quad y = -\frac{2}{x}.$$

График обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ называют *гиперболой*.

83. Функция $y = x^2$. Перечислим свойства функции $y = x^2$.

1) Область определения функции — вся числовая прямая.

2) $y = x^2$ — четная функция.

В самом деле, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

3) На промежутке $[0; +\infty)$ функция возрастает.

В самом деле, если $0 \leqslant x_1 < x_2$, то $x_1^2 < x_2^2$, а это и означает возрастание функции (см. п. 77).

4) На промежутке $(-\infty; 0]$ функция убывает.

В самом деле, если $x_1 < x_2 \leqslant 0$, то $-x_1 > -x_2 \geqslant 0$, а потому $(-x_1)^2 > (-x_2)^2$, т. е. $x_1^2 > x_2^2$, а это и означает убывание функции (см. п. 77).

Графиком функции $y = x^2$ является *парабола* (см. п. 73). Этот график изображен на рисунке 1.10.

84. Функция $y = x^3$. Перечислим свойства функции $y = x^3$.

1) Область определения функции — вся числовая прямая.

2) $y = x^3$ — нечетная функция.

В самом деле, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

3) Функция $y = x^3$ возрастает на всей числовой прямой.

График функции $y = x^3$ изображен на рисунке 1.30. Его называют *кубической параболой*.

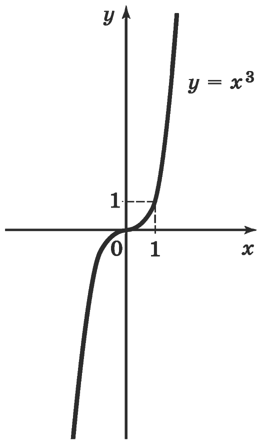


Рис. 1.30

85. Степенная функция с натуральным показателем. Функцию

$$y = x^n,$$

где n — натуральное число, называют *степенной функцией с натуральным показателем*. При $n = 1$ получаем функцию $y = x$, ее свойства рассмотрены в п. 79, а график (прямая) изображен на рисунке 1.8 (п. 73). При $n = 2$ получаем функцию $y = x^2$, ее свойства рассмотрены в п. 83, а график (парабола) изображен на рисунке 1.10 (п. 72). При $n = 3$ получаем функцию $y = x^3$, ее свойства рассмотрены в п. 84, а график (кубическая парабола) изображен на рисунке 1.30.

Пусть n — произвольное четное натуральное число, большее двух: $n = 4, 6, 8, \ldots$. В этом случае функция $y = x^n$ обладает теми же свойствами, что и функция $y = x^2$. График такой функции напоминает параболу $y = x^2$, только ветви графика при $|x| > 1$ тем круче идут вверх, чем больше n, а при $|x| < 1$ тем «теснее прижимаются» к оси x, чем больше n (рис. 1.31).

Пусть n — произвольное нечетное число, большее трех: $n = 5, 7, 9, \ldots$. В этом случае функция $y = x^n$ обладает теми же свойствами, что и функция $y = x^3$. График такой функции напоминает кубическую параболу, только ветви графика тем круче идут вверх (при $x > 0$), вниз (при $x < 0$), чем больше n (рис. 1.32). Отметим также, что на промежутке $(0; 1)$ график степенной функции $y = x^n$ тем медленнее отдаляется от оси x с ростом x, чем больше n.

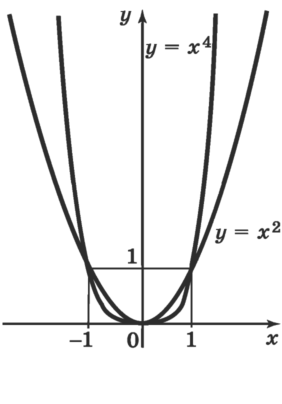


Рис. 1.31

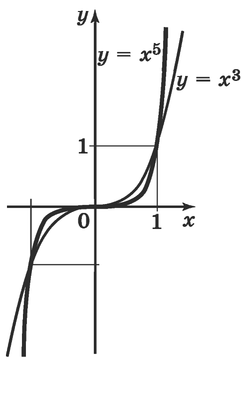


Рис. 1.32

86. Степенная функция с целым отрицательным показателем. Рассмотрим функцию

$$y = x^{-n},$$

где n — натуральное число. При $n = 1$ получаем $y = x^{-1}$ или $y = \frac{1}{x}$. Свойства этой функции рассмотрены в п. 82, а ее график (гипербола) изображен на рисунке 1.27.

Пусть n — нечетное число, большее единицы, $n = 3, 5, 7, \ldots$. В этом случае функция $y = x^{-n}$, т. е. $y = \frac{1}{x^n}$, обладает теми же свойствами, что и функция $y = \frac{1}{x}$. График функции $y = x^{-n}$ ($n = 3, 5, 7, \ldots$) напоминает график функции $y = \frac{1}{x}$ (рис. 1.33).

Пусть n — четное число. Перечислим некоторые свойства функции $y = x^{-n}$, т. е. функции $y = \frac{1}{x^n}$.

1) Функция определена при всех $x \neq 0$.

2) $y = \frac{1}{x^n}$ — четная функция.

3) $y = \frac{1}{x^n}$ убывает на $(0; +\infty)$ и возрастает на $(-\infty; 0)$.

График функции $y = x^{-n}$, где n — четное натуральное число, изображен на рисунке 1.34.

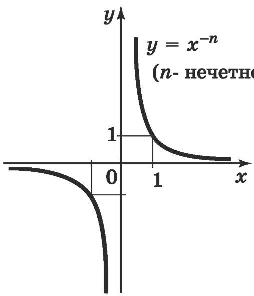


Рис. 1.33

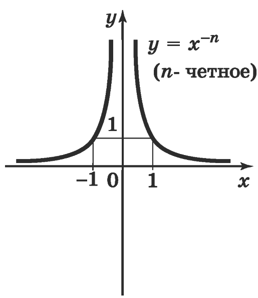


Рис. 1.34

87. Функция $y = \sqrt{x}$. Перечислим свойства функции $y = \sqrt{x}$.

1) Область определения — луч $[0; +\infty)$. Это следует из того, что выражение $\sqrt{x}$ определено лишь при $x \geqslant 0$.

2) Функция $y = \sqrt{x}$ ни четна, ни нечетна.

3) Функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на луче $[0; +\infty)$.

В самом деле, пусть $0 \leqslant x_1 < x_2$. Докажем, что тогда $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$. Предположим противное, т. е. что $\sqrt{x_1} \geqslant \sqrt{x_2}$. Тогда $(\sqrt{x_1})^2 \geqslant (\sqrt{x_2})^2$ (см. свойство 10° числовых неравенств, п. 24), т. е. $x_1 \geqslant x_2$, а это противоречит условию. Значит, наше предположение неверно, а верным является неравенство $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$.

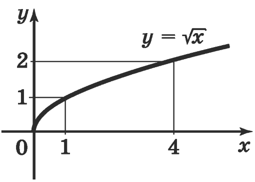


Рис. 1.35

Для построения графика составим таблицу значений функции:

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

Нанесем полученные точки на координатную плоскость и соединим их плавной кривой. Получим график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 1.35).

88. Функция $y = \sqrt[3]{x}$. Перечислим свойства функции $y = \sqrt[3]{x}$.

1) Область определения функции — вся числовая прямая.

2) Функция $y = \sqrt[3]{x}$ нечетна, так как $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$.

3) Функция $y = \sqrt[3]{x}$ возрастает на всей числовой прямой.

Для построения ветви графика при $x \geqslant 0$ составим таблицу значений функции $y = \sqrt[3]{x}$:

x	0	1	4	8
y	0	1	$\approx 1{,}6$	2

Нанесем полученные точки на координатную плоскость и соединим их плавной кривой; затем к построенной ветви добавим ветвь, симметричную ей относительно начала координат. Получим график функции $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 1.36).

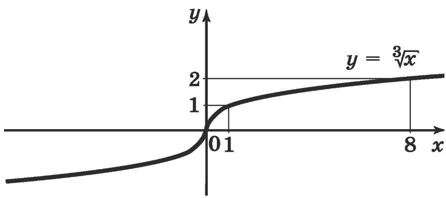


Рис. 1.36

89. Функция $y = \sqrt[n]{x}$. При четном n функция $y = \sqrt[n]{x}$ обладает теми же свойствами, что и функция $y = \sqrt{x}$ (см. п. 87), и график ее напоминает график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 1.36).

При нечетном n функция $y = \sqrt[n]{x}$ обладает теми же свойствами, что и функция $y = \sqrt[3]{x}$ (см. п. 88), и график ее напоминает график функции $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 1.35).

90. Степенная функция с положительным дробным показателем. Рассмотрим функцию

$$y = x^r,$$

где r — положительная несократимая дробь. Перечислим некоторые свойства этой функции.

1) Область определения — луч $[0; +\infty)$.

2) Функция ни четная, ни нечетная.

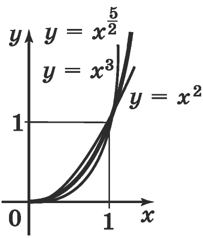


Рис. 1.37

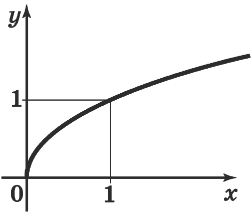


Рис. 1.38

3) Функция $y = x^r$ возрастает на $[0; +\infty)$.

На рисунке 1.37 изображен график функции $y = x^{\frac{5}{2}}$. Он заключен между графиками функций $y = x^2$ и $y = x^3$, заданных на промежутке $[0; +\infty)$.

Подобный вид имеет график любой функции вида $y = x^r$, где $r > 1$.

На рисунке 1.38 изображен график функции $y = x^{\frac{2}{3}}$. Подобный вид имеет график любой степенной функции $y = x^r$, где $0 < r < 1$.

91. Степенная функция с отрицательным дробным показателем. Рассмотрим функцию

$$y = x^{-r},$$

где r — положительная несократимая дробь. Перечислим свойства этой функции.

1) Область определения — промежуток $(0; +\infty)$.

2) Функция ни четная, ни нечетная.

3) Функция $y = x^{-r}$ убывает на $(0; +\infty)$.

Построим для примера график функции $y = x^{-\frac{1}{2}}$. Составим таблицу значений функции:

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	9
y	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Нанесем полученные точки на координатную плоскость и соединим их плавной кривой (рис. 1.39). Подобный вид имеет график любой функции $y = x^r$, где r — отрицательная дробь.

92. Функция $y = [x]$. Построим график функции $y = [x]$ (см. п. 31). Если $0 \leqslant x < 1$, то $y = [x] = 0$; если $1 \leqslant x < 2$, то $y = [x] = 1$; если $-1 \leqslant x < 0$, то $y = [x] = -1$ и т. д. График функции $y = [x]$ изображен на рисунке 1.40.

93. Функция $y = \{x\}$. Построим график функции $y = \{x\}$, т. е. $y = x - [x]$ (см. п. 31). Заметим, что $\{x + 1\} = \{x\} = \{x - 1\}$, т. е. $y = \{x\}$ — периодическая функция с основным периодом 1 (см. п. 76). Поэтому достаточно сначала построить ветвь графика

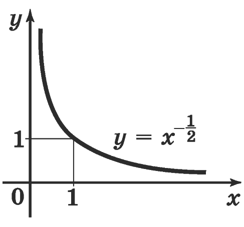


Рис. 1.39

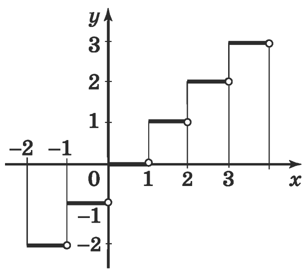


Рис. 1.40

на любом промежутке длиной 1, например на $[0; 1)$. Если $0 \leqslant x < 1$, то $[x] = 0$, а потому $\{x\} = x$.

На рисунке 1.41, а изображен график функции $y = \{x\}$ на промежутке $[0; 1)$, а на рисунке 1.42 изображен график функции $y = \{x\}$ на всей числовой прямой.

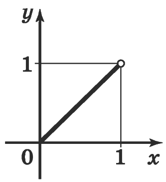


Рис. 1.41

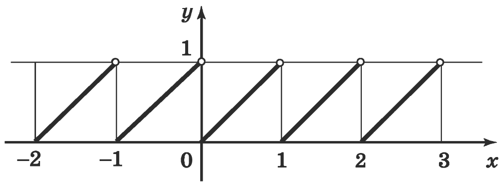


Рис. 1.42

94. Показательная функция. *Показательная функция* задается формулой $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$.

Перечислим свойства функции $y = a^x$ при $a > 1$.

1) Область определения функции — вся числовая прямая.

2) Область значений функции — промежуток $(0; +\infty)$.

3) Функция не является ни четной, ни нечетной. Это следует из того, что $a^{-x} \neq a^x$ и $a^{-x} \neq$ $\neq -a^x$.

4) Функция возрастает на всей числовой прямой.

График функции $y =$ $= a^x$ при $a > 1$ выглядит так, как показано на рисунке 1.43.

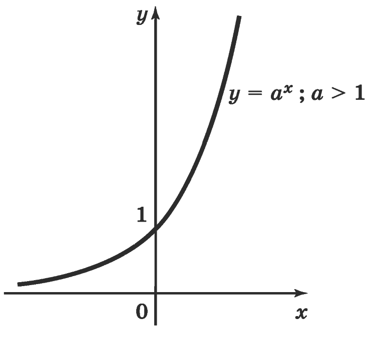


Рис. 1.43

П р и м е р 1. Построить график функции $y = 2^x$.

Р е ш е н и е. Составим таблицу:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

С помощью найденных точек строим график функции $y = 2^x$ (рис. 1.44).

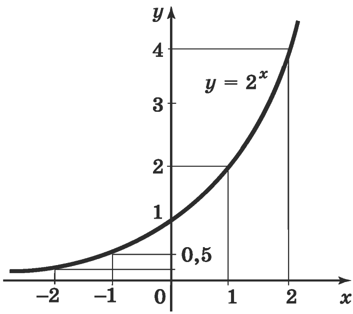


Рис. 1.44

Свойства функции $y = a^x$ при $0 < a < 1$:

1) Область определения функции — вся числовая прямая.

2) Область значений — $(0; +\infty)$.

3) Функция не является ни четной, ни нечетной.

4) Функция убывает на всей числовой прямой.

График функции $y = a^x$ при $0 < a < 1$ выглядит так, как показано на рисунке 1.45.

П р и м е р 2. Построить график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Р е ш е н и е. Составим таблицу:

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

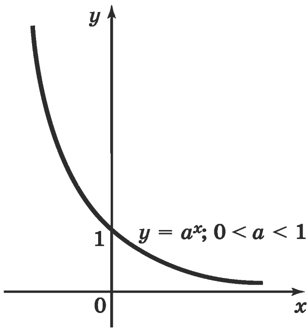


Рис. 1.45

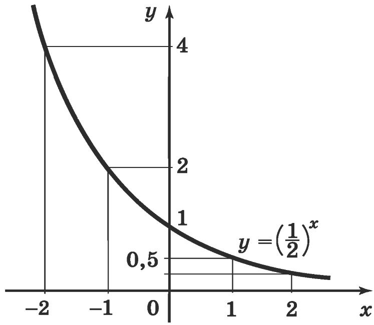


Рис. 1.46

С помощью найденных точек строим график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 1.46).

95. Обратная функция. График обратной функции. Сравним две функции: $y = f(x)$ и $y = g(x)$; их графики изображены на рисунках 1.47 и 1.48. Обе они определены на отрезке $[a; b]$ и имеют областью своих значений отрезок $[c; d]$. Первая функция обладает следующим свойством: для любого y_0 из отрезка $[c; d]$ есть только одно значение x_0 из отрезка $[a; b]$ такое, что $f(x_0) = y_0$.

Геометрически указанное выше свойство означает следующее: любая горизонтальная прямая, пересекающая ось y между точками c и d, пересекает гра-

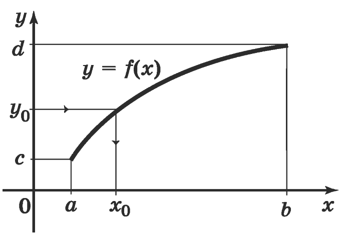


Рис. 1.47

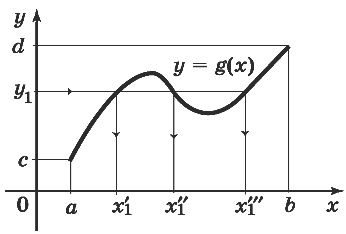


Рис. 1.48

фик функции $y = f(x)$ только в одной точке. Вторая функция этим свойством не обладает: например, для значения y_1 прямая $y = y_1$ пересекает график функции $y = g(x)$ в трех точках. Значит, в первом случае при каждом фиксированном y_0 из отрезка $[c; d]$ уравнение $f(x) = y_0$ имеет только один корень x_0, а во втором случае при некоторых y, например при $y = y_1$, уравнение $g\,(x) = y_1$ имеет более одного корня.

Если функция $y = f(x)$ такова, что для любого ее значения y_0 уравнение $f(x) = y_0$ имеет относительно x единственный корень, то говорят, что функция $y = f(x)$ *обратима*.

Так, функция $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 1.47, обратима, а функция $y = g(x)$, график которой изображен на рисунке 1.48, необратима.

Если функция $y = f(x)$ обратима, то, выразив x из формулы $y = f(x)$ и поменяв затем x и y местами, получим *обратную функцию*; ее обозначают $y = f^{-1}(x)$.

Обратимся еще раз к рисункам 1.47 и 1.48. Сравнивая графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, замечаем, что $y = f(x)$ — возрастающая функция (и у нее есть обратная функция), тогда как функция $y = g(x)$ не является ни возрастающей, ни убывающей (и у нее нет обратной функции). Возрастание или убывание функции обеспечивает существование обратной функции.

Теорема 3. Если функция $y = f(x)$ определена и возрастает (убывает) на промежутке X и областью ее значений является промежуток Y, то у нее существует обратная функция, причем обратная функция определена и возрастает (убывает) на Y.

П р и м е р. Доказать, что у функции $y = 2x - 1$ есть обратная, и найти ее.

Р е ш е н и е. Функция $y = 2x - 1$ возрастает на всей числовой прямой; значит, у нее есть обратная функция. Чтобы найти обратную функцию, надо из формулы $y = 2x - 1$ выразить x.

Получим $x = \frac{y+1}{2}$. Поменяв x и y местами, получим $y = \frac{x+1}{2}$. Это и есть искомая обратная функция.

Если точка $(x; y)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $(y; x)$ принадлежит графику обратной функции. Поэтому график обратной функции получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования плоскости xy, переводящего точки $(y; x)$ в точки $(x; y)$. Этим преобразованием является преобразование осевой симметрии относительно прямой $y = x$ (ось симметрии).

Таким образом, *чтобы построить график функции, обратной к функции $y = f(x)$, надо график функции $y = f(x)$ подвергнуть преобразованию симметрии относительно прямой $y = x$* (рис. 1.49).

Например, если $y = x^n$, где $x \geqslant 0$, n — натуральное, $n > 1$, то $x = \sqrt[n]{y}$. Поменяв x и y местами, получим $y = \sqrt[n]{x}$. Графики двух взаимно обратных функций $y = x^n$ и $y = \sqrt[n]{x}$ симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 1.50).

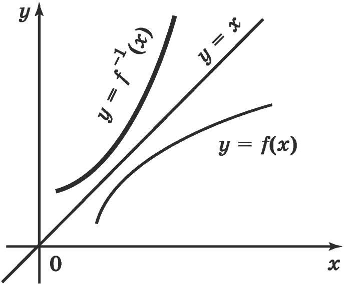


Рис. 1.49

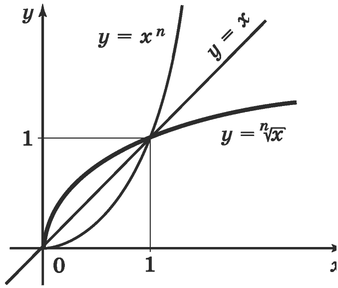


Рис. 1.50

96. Логарифмическая функция. Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, обладает всеми свойствами, которые гарантируют существование обратной функции (см. теорему 3):

1) область определения — $(-\infty; +\infty)$;

2) область значений — $(0; +\infty)$;

3) функция $y = a^x$ монотонна (возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$).

Эти свойства обеспечивают существование функции, обратной к показательной, определенной на $(0; +\infty)$ и имеющей областью своих значений множество $(-\infty; +\infty)$.

Эта обратная функция обозначается так:

$$y = \log_a x$$

(читается: *«логарифм числа x по основанию a»*). Итак, *логарифмическая функция* $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, — это функция, обратная к показательной функции $y = a^x$.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ обладает следующими свойствами (они вытекают из теоремы 3):

1) область определения — $(0; +\infty)$;

2) область значений — $(-\infty; +\infty)$;

3) функция возрастает на промежутке $(0; +\infty)$ при $a > 1$, убывает на $(0; +\infty)$ при $0 < a < 1$.

Отметим, что логарифмическая функция ни четная, ни нечетная.

График функции $y = \log_a x$ может быть получен из графика функции $y = a^x$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$. На рисунке 1.51 построен график логарифмической функции для $a > 1$, а на рисунке 1.52 — для $0 < a < 1$.

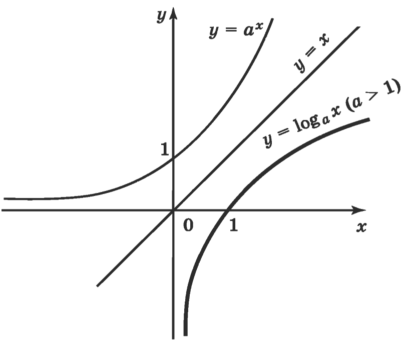


Рис. 1.51

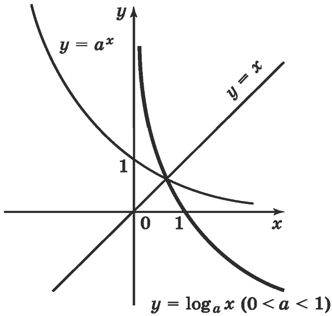


Рис. 1.52

97. Число e. Функция $y = e^x$. Функция $y = \ln x$. Среди показательных функций $y = a^x$, где $a > 1$, особый интерес для математики и ее приложений представляет функция, обладающая следующим свойством: касательная к графику функции (см. п. 215) в точке $(0; 1)$ образует с осью x угол $45°$ (рис. 1.53). Основание a такой показательной функции принято обозначать буквой e. Подсчитано, что $e = 2{,}718281828 4590...$, и установлено, что e — иррациональное число.

Логарифмическую функцию, обратную показательной функции $y = e^x$, т. е. функцию $y = \log_e x$,

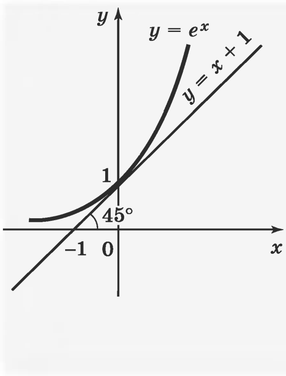


Рис. 1.53

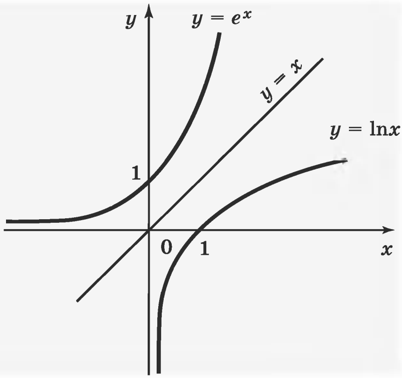


Рис. 1.54

принято обозначать $y = \ln x$ (ln читается «*натуральный логарифм*»). Графики функций $y = e^x$ и $y = \ln x$ симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 1.54).

98. Числовая окружность. Пусть дана окружность радиуса 1. Поставим в соответствие каждому действительному числу t точку окружности по следующему правилу:

1) если $t = 0$, то ему соответствует точка A — правый конец горизонтального диаметра;

2) если $t > 0$, то, отправляясь из точки A в направлении против часовой стрелки (положительное направление обхода окружности), опишем по окружности путь длины t; конец этого пути и будет искомой точкой $M(t)$ (рис. 1.55);

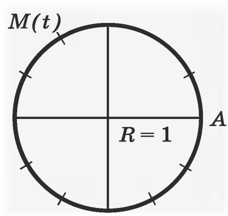


Рис. 1.55

3) если $t < 0$, то, отправляясь из точки A в направлении по часовой стрелке, опишем по окружности путь длины $|t|$; конец этого пути и будет искомой точкой $M(t)$.

Каждому действительному числу соответствует единственная точка окружности.

Единичную окружность с установленным соответствием называют *числовой окружностью*.

Если точка M соответствует числу t, то она соответствует любому числу вида $t + 2\pi k$, где 2π — длина единичной окружности, а k — целое число ($k \in Z$), показывающее количество полных обходов окружности в положительном или отрицательном направлении.

На рисунках 1.56 и 1.57 представлены два основных макета числовой окружности.

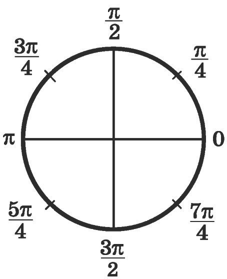


Рис. 1.56

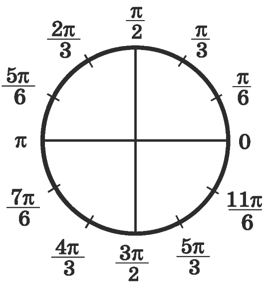


Рис. 1.57

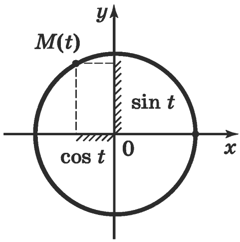


Рис. 1.58

99. Определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса. Поместим единичную числовую окружность в декартовой прямоугольной системе координат так, чтобы центр окружности совпал с началом координат (рис. 1.58). Если $M(t)$ — точка числовой окружности, соответствующая числу t, то ординату точки M называют *синусом числа* t и обозначают $\sin t$; абсциссу точки M называют *косинусом числа* t и обозначают $\cos t$; отношение $\frac{\sin t}{\cos t}$, где $\cos t \neq 0$, называют *тангенсом числа* t и обозначают $\operatorname{tg} t$; отношение $\frac{\cos t}{\sin t}$, где $\sin t \neq 0$, называют *котангенсом числа* t и обозначают $\operatorname{ctg} t$.

Функции

$$u = \sin t,\; u = \cos t,\; u = \operatorname{tg} t,\; u = \operatorname{ctg} t$$

называют *тригонометрическими функциями*. На практике переходят к более привычным обозначениям $y = \sin x$, $y = \cos x$ и т. д.

Основные значения тригонометрических функций приведены в таблице 1.

Таблица 1

Функция	Аргумент						
	$0\ (0°)$	$\frac{\pi}{6}$ $(30°)$	$\frac{\pi}{4}$ $(45°)$	$\frac{\pi}{3}$ $(60°)$	$\frac{\pi}{2}$ $(90°)$	π $(180°)$	$\frac{3\pi}{2}$ $(270°)$
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—
$\operatorname{ctg} t$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0

100. Знаки тригонометрических функций по четвертям числовой окружности. Знаки тригонометрических функций по четвертям числовой окружности схематически представлены на рисунке 1.59.

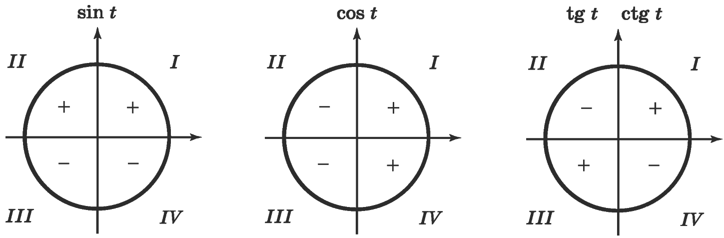


Рис. 1.59

101. Свойства тригонометрических функций.

1. Функции $\sin t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$ — нечетные:

$$\sin(-t) = -\sin t;$$

$$\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t;$$

$$\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t.$$

2. Функция $\cos t$ — четная:

$$\cos(-t) = \cos t.$$

3. Функции $\sin t$, $\cos t$ — периодические, 2π — основной период:

$$\sin(t \pm 2\pi k) = \sin t;$$

$$\cos(t \pm 2\pi k) = \cos t,$$

где k — любое целое число.

4. Функции $y = \operatorname{tg} t$, $y = \operatorname{ctg} t$ — периодические, π — основной период:

$$\operatorname{tg}(t \pm \pi k) = \operatorname{tg} t;$$

$$\operatorname{ctg}(t \pm \pi k) = \operatorname{ctg} t,$$

где k — любое целое число.

102. Свойства и график функции $y = \sin x$.

1) Область определения — множество всех действительных чисел.

2) Область значений — отрезок $[-1; 1]$.

3) Функция периодическая; основной период равен 2π.

4) Функция нечетная.

5) Функция возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$ и убывает на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$ (рис. 1.60).

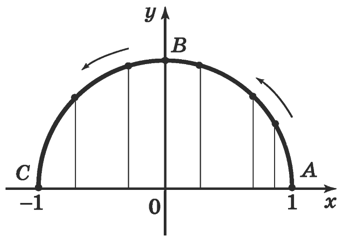


Рис. 1.60

Взяв контрольные точки (0; 0), $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$, ($\pi$; 0), построим полуволну — график функции $y = \sin x$ на отрезке [0; π] (рис. 1.61). Так как функция $y = \sin x$ нечетная, то, выполнив симметрию построенного графика относительно начала координат, получим график функции на отрезке [$-\pi$; π] (рис. 1.62). Наконец, воспользовавшись периодичностью функции $y = \sin x$, можно построить график на всей области определения (рис. 1.63).

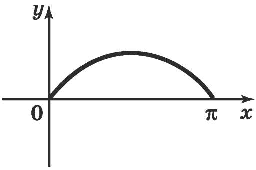


Рис. 1.61

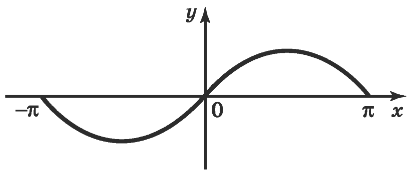


Рис. 1.62

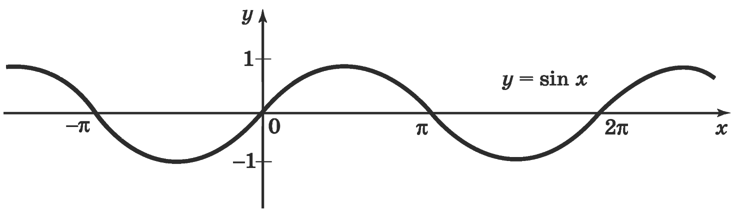


Рис. 1.63

103. Свойства и график функции $y = \cos x$.

1) Область определения функции — множество всех действительных чисел.

2) Область значений — отрезок $[-1; 1]$.

3) Функция периодическая с основным периодом 2π.

4) Функция четная.

5) Функция убывает на промежутках $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$ и возрастает на промежутках $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

График функции $y = \cos x$ изображен на рисунке 1.64.

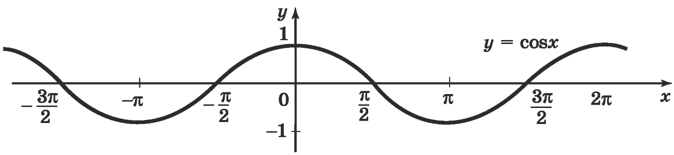


Рис. 1.64

104. Свойства в график функции $y = \operatorname{tg} x$.

1) Область определения: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2) Область значений — вся числовая прямая.

3) Функция периодическая с основным периодом π.

4) Функция нечетная.

5) Функция возрастает на промежутках $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$.

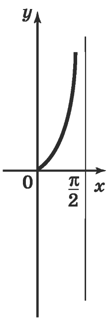


Рис. 1.65

Выбрав несколько контрольных точек: $(0; 0)$, $\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}; \sqrt{3}\right)$ — построим график функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 1.65). Воспользовавшись нечетностью функции $y = \operatorname{tg} x$, построим график на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис.1.66). Наконец, воспользовавшись периодичностью

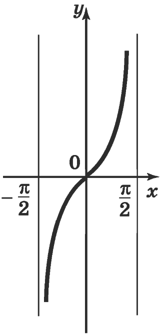


Рис. 1.66

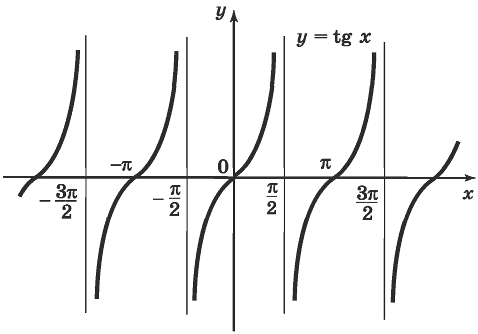


Рис. 1.67

функции $y = \operatorname{tg} x$, построим график на всей области определения (рис. 1.67).

105. Свойства и график функции $y = \operatorname{ctg} x$.

1) Область определения функции: $x \neq \pi k$, $k \in Z$.

2) Область значений функции — вся числовая прямая.

3) Функция периодическая с основным периодом π.

4) Функция нечетная.

5) Функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает на промежутках $(\pi n; \pi + \pi n)$.

График функции $y = \operatorname{ctg} x$ изображен на рисунке 1.68.

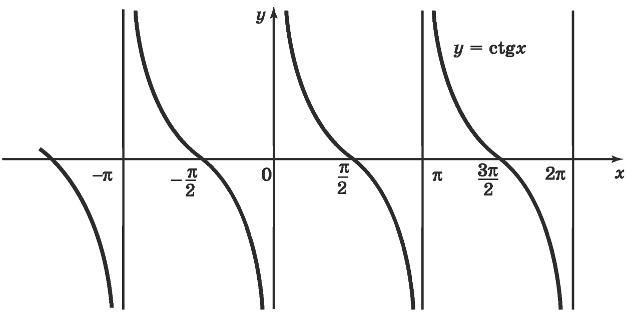


Рис. 1.68

106*. Функция $y = \arcsin x$. Функция $y = \sin x$ возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, принимает на нем все свои значения от -1 до 1 (см. рис. 1.63). Значит, для функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, существует обратная функция (см. п. 95). Эту функцию обозначают $y = \arcsin x$ (читается: «арксинус x»).

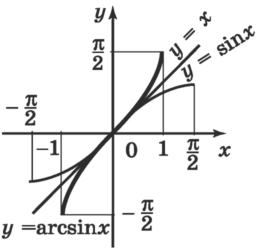


Рис. 1.69

График функции $y = \arcsin x$ может быть получен из графика функции $y = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, с помощью преобразования симметрии последнего относительно прямой $y = x$ (рис. 1.69).

Перечислим свойства функции $y = \arcsin x$.

1) Область определения — отрезок $[-1; 1]$.

2) Область значений — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3) Функция нечетная: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

4) Функция возрастающая.

Из сказанного выше следует, что записи $y = \arcsin x$ и $x = \sin y$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, эквивалентны. Подставив в равенство $x = \sin y$ вместо y его выражение, т. е. $\arcsin x$, получим $x = \sin(\arcsin x)$. Следовательно, для любого x из $[-1; 1]$ имеем:

$$\sin(\arcsin x) = x; \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Последние два соотношения позволяют истолковать $\arcsin m$, где $-1 \leqslant m \leqslant 1$, так: $\arcsin m$ — *это* *число, взятое в пределах от* $-\frac{\pi}{2}$ *до* $\frac{\pi}{2}$ *и такое, что его синус равен* m.

П р и м е р. Вычислить: а) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Р е ш е н и е. а) По определению, $y = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$ — это такое число, что $\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что $y = \frac{\pi}{3}$. Таким образом,

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

б) Рассуждая аналогично, получаем $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Но по свойству нечетности имеем $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin \frac{1}{2}$; следовательно, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

107*. Функция $y = \arccos x$. Функция $y = \cos x$ убывает на отрезке $[0; \pi]$, принимает на нем все значения от -1 до 1 (см. рис. 1.64). Значит, для функции $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$, существует обратная функция (см. п. 95). Ее обозначают $\arccos x$ (читается: «арккосинус x»).

График функции $y = \arccos x$ получается из графика функции $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 1.70).

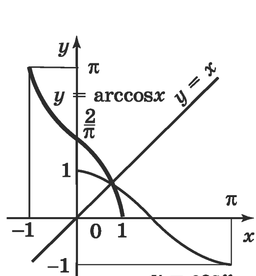


Рис. 1.70

Перечислим свойства функции $y = \arccos x$.

1) Область определения — отрезок $[-1; 1]$.

2) Область значений функции — отрезок $[0; \pi]$.

3) Функция не является ни четной, ни нечетной.

4) Функция убывающая.

Из сказанного выше следует, что записи $y = \arccos x$ и $x = \cos y$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$, эквивалентны. Подставив в равенство $x = \cos y$ вместо y выражение $\arccos x$, получим $\cos(\arccos x) = x$. Следовательно, для любого x из промежутка $[-1; 1]$ имеем:

$$\cos(\arccos x) = x; \ 0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi.$$

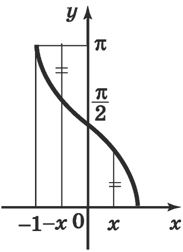


Рис. 1.71

Последние два соотношения позволяют истолковать $\arccos m$, где $-1 \leqslant m \leqslant 1$, так: $\arccos m$ — *это число, взятое в пределах от* 0 *до* π *и такое, что его косинус равен* m.

Отметим, что имеет место следующее тождество:

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x. \qquad (1)$$

В его справедливости можно убедиться с помощью графика функции $y = \arccos x$ (рис. 1.71).

П р и м е р. Вычислить: а) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Р е ш е н и е. а) По определению, $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ — это такое число y, что $\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $0 \leqslant y \leqslant \pi$. Отсюда следует, что $y = \frac{\pi}{4}$. Таким образом, $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

б) По формуле (1) имеем $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Значит, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

108*. Функция $y = \operatorname{arctg} x$. Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, принимает на нем все свои значения (см. рис. 1.67). Поэтому на указанном интервале для функции $y = \operatorname{tg} x$ существует обратная функция (см. п. 95). Ее обозначают $y = \operatorname{arctg} x$ (читается: «арктангенс x»).

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ получается из графика функции $y = \operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 1.72).

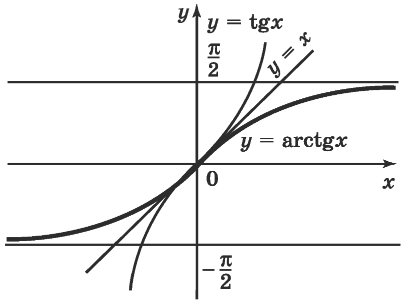


Рис. 1.72

Перечислим свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$.

1) Область определения — множество всех действительных чисел.

2) Область значений функции — интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

3) Функция нечетная: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

4) Функция возрастающая.

Из сказанного выше следует, что записи $y = \operatorname{arctg} x$ и $x = \operatorname{tg} y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, эквивалентны. Для любого x имеем:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x;\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}.$$

Последние соотношения позволяют истолковать $\operatorname{arctg} m$ так: $\operatorname{arctg} m$ — *это число, взятое в преде-*

лах от $-\frac{\pi}{2}$ *до* $\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{исключая сами значения } -\frac{\pi}{2} \text{ и } \frac{\pi}{2}\right)$ *и такое, что его тангенс равен* m.

П р и м е р. Вычислить: а) $\operatorname{arctg} 1$; б) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.

Р е ш е н и е. а) По определению, $y = \operatorname{arctg} 1$ — это такое число, что $\operatorname{tg} y = 1$ и $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что $y = \frac{\pi}{4}$. Таким образом, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

б) Рассуждая аналогично, получаем $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. Но $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3}$. Значит, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$.

109*. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает на интервале $(0; \pi)$, принимает на нем все свои значения (см. рис. 1.68). Следовательно, на этом интервале для функции $y = \operatorname{ctg} x$ существует обратная функция (см. п. 95). Ее обозначают $y = \operatorname{arcctg} x$ (читается: «арккотангенс x»).

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ получается из графика функции $y = \operatorname{ctg} x$, $0 < x < \pi$, с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 1.73).

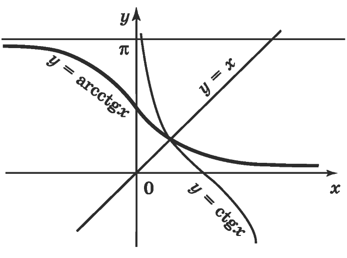


Рис. 1.73

Перечислим свойства функции $y = \operatorname{arcctg} x$.

1) Область определения — множество всех действительных чисел.

2) Область значений функции — интервал $(0; \pi)$.

3) Функция не является ни четной, ни нечетной.

4) Функция убывающая.

Из сказанного выше следует, что записи $y = \operatorname{arcctg} x$ и $x = \operatorname{ctg} y$, $0 < y < \pi$, эквивалентны. Для любого x имеем:

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x; \ 0 < \operatorname{arcctg} x < \pi.$$

Последние соотношения позволяют истолковать $\operatorname{arcctg} m$ так: $\operatorname{arcctg} m$ — *это число, взятое в пределах от* 0 *до* π (исключая сами значения 0 и π) *и такое, что его котангенс равен* m.

Имеет место тождество

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x. \qquad (1)$$

П р и м е р. Вычислить $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

Р е ш е н и е. Сначала вычислим $y = \operatorname{arcctg} \sqrt{3}$. Это такое число, что $\operatorname{ctg} y = \sqrt{3}$ и $0 < y < \pi$. Значит, $y = \frac{\pi}{6}$.

По формуле (1) имеем $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arcctg} \sqrt{3}$. Значит, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

§ 11. Преобразования графиков

110. Построение графика функции $y = mf(x)$.

З а д а ч а 1. Построить график функции $y = mf(x)$, где $m > 0$, $m \neq 1$, если задан график функции $y = f(x)$.

Р е ш е н и е. Ординаты точек графика функции $y = mf(x)$ получаются умножением на m соответствующих ординат точек графика функции $y = f(x)$. Такое преобразование графика функции $y = f(x)$ называют его *растяжением от оси x с коэффициентом m*, если $m > 1$, *и сжатием к оси x*, если $0 < m < 1$.

З а д а ч а 2. Построить график функции $y = -f(x)$, если задан график функции $y = f(x)$.

Р е ш е н и е. При одном и том же значении x ординаты точек графика функции $y = f(x)$ и графика функции $y = -f(x)$ отличаются только знаком. Значит, график функции $y = -f(x)$ можно получить из графика $y = f(x)$ преобразованием симметрии последнего относительно оси x (рис. 1.74).

На рисунке 1.75 изображены графики функций $y = 10^x$ и $y = -10^x$.

З а д а ч а 3. Построить график функции $y = mf(x)$, где $m < 0$, $m \neq -1$, если задан график функции $y = f(x)$.

Р е ш е н и е. Так как $mf(x) = -|m|\, f(x)$, то график функции $y = mf(x)$ может быть получен при помощи растяжения (сжатия) графика функции $y = f(x)$ от оси x с коэффициентом $|m|$ и последующим преобразованием симметрии относительно оси x (см. задачи 1 и 2).

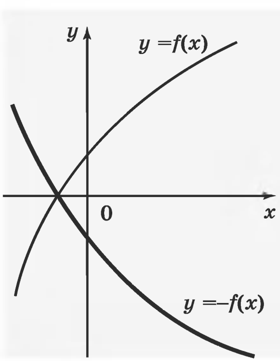


Рис. 1.74

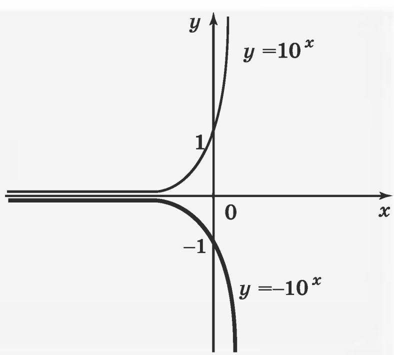


Рис. 1.75

На рисунке 1.76 изображены графики функций $y = x^4$ и $y = -3x^4$, а на рисунке 1.77 — графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \frac{1}{2}\log_2 x$.

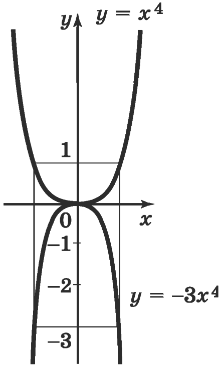


Рис. 1.76

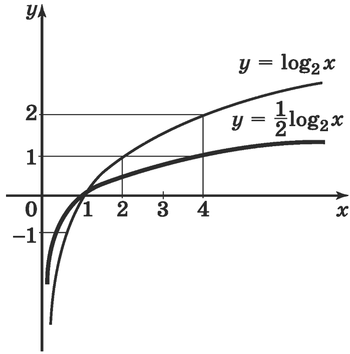


Рис. 1.77

111. Графики функций $y = ax^2$, $y = ax^3$. Графиком функции $y = x^2$ является парабола. Чтобы построить график функции $y = ax^2$, нужно осуществить растяжение (сжатие) параболы $y = x^2$ от оси x с коэффициентом $|a|$; при этом если $a < 0$, то график функции $y = |a|x^2$ нужно еще подвергнуть преобразованию симметрии относительно оси x (см. п. 110).

На рисунке 1.78 изображены графики функции $y = ax^2$ для a, равного 1; –1; 3; $-\frac{1}{2}$. Все эти графики называют *параболами*. При $a > 0$ ветви параболы, служащей графиком функции $y = ax^2$, направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз.

Аналогично, зная график функции $y = x^3$, можно построить график функции вида $y = ax^3$. На рисунке 1.79 изображены эти графики для случаев a, равного 1; –1; 3.

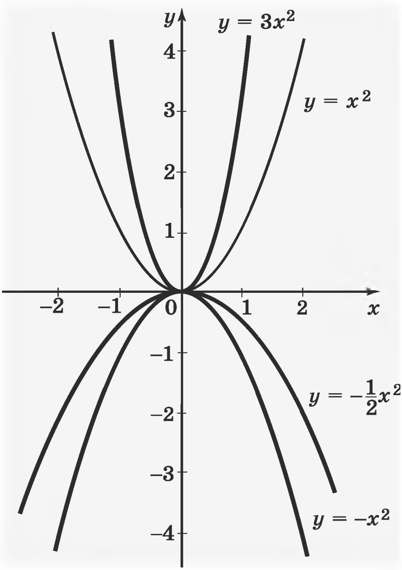


Рис. 1.78

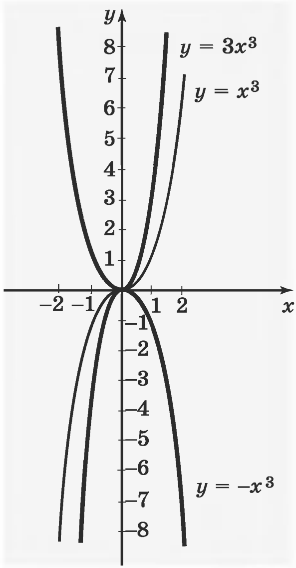


Рис. 1.79

112. Построение графика функции $y = f(x - m) + n$. Пусть известен график функции $y = f(x)$, а построить нужно график функции $y = f(x - m) + n$.

Положим $x' = x - m$, $y' = y - n$. Тогда формулу $y = f(x - m) + n$, или, что то же самое, $y - n = f(x - m)$, можно переписать в виде $y' = f(x')$. Таким образом, график функции $y = f(x - m) + n$, построенный в координатной плоскости xy, совпадает с графиком функции $y' = f(x')$, построенным в координатной плоскости $x'y'$.

Формулы $x' = x - m$, $y' = y - n$, или, что то же самое, $x = x' + m$, $y = y' + n$, задают параллельный перенос координатной плоскости xy в плоскости $x'y'$; при этом началом координат в плоскости $x'y'$ служит точка $(m; n)$ плоскости xy.

Чтобы построить график функции $y = f(x - m) + n$, нужно:

1) выполнить параллельный перенос плоскости, выбрав началом новой системы координат $x'y'$ точку O' $(m; n)$;

2) в плоскости $x'y'$ построить график функции $y' = f(x')$.

П р и м е р. Построить график функции $y = \sqrt{x-2} + 4$.

Р е ш е н и е. 1) Выполним параллельный перенос плоскости, поместив начало новой системы координат $x'y'$ в точку O' (2; 4).

2) В плоскости $x'y'$ построим график функции $y' = \sqrt{x'}$. Это и есть требуемый график (рис. 1.80).

На рисунке 1.81, а изображены графики функций $y = f(x)$, $y = f(x) - 2$, $y = f(x) + 3$, а на рисунке 1.82 — графики функций $y = f(x)$, $y = f(x - 2)$, $y = f(x + 3)$.

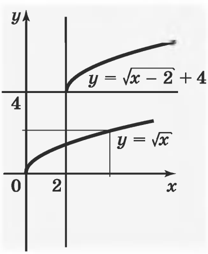


Рис. 1.80

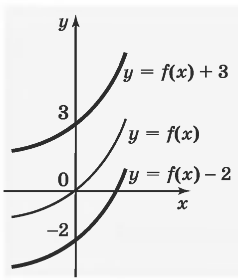


Рис. 1.81

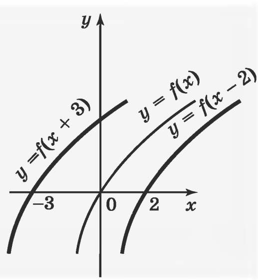


Рис. 1.82

113. График квадратичной функции. *Квадратичной функцией* называют функцию

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c — любые действительные числа, причем $a \neq 0$. Для построения графика этой функции выполним следующие преобразования квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=$$

$$=a\left(\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Итак, $y = ax^2 + bx + c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Для построения графика функции $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$ нужно (см. п. 112) выполнить параллельный перенос плоскости, поместив начало новой системы координат $x'y'$ в точку $O'\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, и в плоскости $x'y'$ построить параболу — график функции $y' = a\,(x')^2$. Прямая $x = -\frac{b}{2a}$ является *осью симметрии параболы*, служащей графиком квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$, а точка $O'\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ — точка пересечения параболы с ее осью симметрии — является *вершиной параболы*.

Если $a > 0$, то ветви параболы, служащей графиком функции $y = ax^2 + bx + c$, направлены вверх (рис. 1.83); в этом случае функция убывает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ и возрастает на промежутке

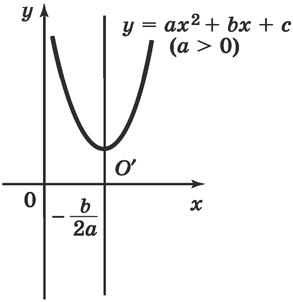


Рис. 1.83

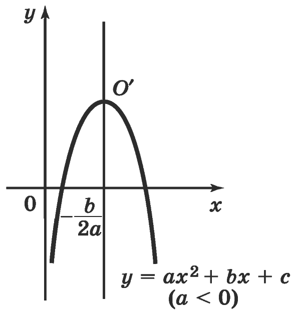


Рис. 1.84

$\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$. Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз (рис. 1.84); в этом случае функция возрастает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ и убывает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

П р и м е р. Построить график функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 5$.

Р е ш е н и е. Имеем: $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 5 = \frac{1}{2}(x^2 + 8x) + 5 = \frac{1}{2}((x^2 + 8x + 16) - 16) + 5 = \frac{1}{2}(x + 4)^2 - 3$. Выполним параллельный перенос плоскости, поместив начало новой системы координат $x'y'$ в точку $O'(-4; -3)$, и построим в координатной плоскости $x'y'$ параболу — график функции $y' = \frac{1}{2}(x')^2$.

Это и есть график функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 5$ (рис. 1.85).

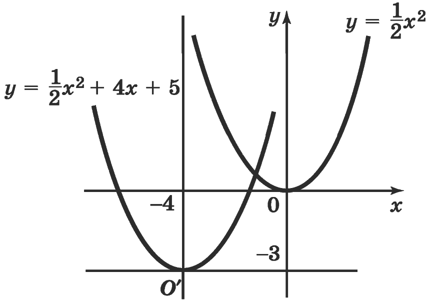


Рис. 1.85

114. Способы построения графика квадратичной функции. Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, является парабола (см. п. 113). Для ее построения на практике используют три способа.

Способ 1-й. *Отыскание координат вершины параболы по формулам.*

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Пример 1. Построить график функции $y = 2x^2 - 4x + 1$.

Решение. Здесь $a = 2$, $b = -4$, $c = 1$. Значит,

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 1, y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -1.$$

Итак, (1; −1) — вершина параболы. Для построения графика функции $y = 2x^2 - 4x + 1$ надо знать координаты еще нескольких точек:

x	0	2	3
y	1	1	7

Отметив вершину параболы, точки (0; 1), (2; 1), (3; 7) и точку (−1; 7), симметричную точке (3; 7) относительно прямой $x = 1$ — оси параболы, строим требуемый график (рис. 1.86). Заметим, что запоминать формулы координат вершины параболы не следует. Достаточно воспользоваться тем, что если x_0 — абсцисса вершины параболы, то в этой точке $y'(x_0) = 0$ (см. п. 217). Из уравнения $(ax^2 + bx + c)' = 0$, т. е. $2ax + b = 0$, находим $x = -\dfrac{b}{2a}$ — это абсцисса вершины параболы.

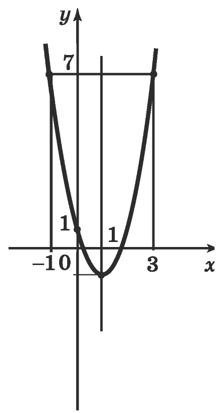


Рис. 1.86

Способ 2-й. *Построение параболы по точкам с ординатой, равной свободному члену квадратного трехчлена* $ax^2 + bx + c$.

П р и м е р 2. Построить график функции $y = x^2 - 4x + 5$.

Р е ш е н и е. Найдем точки графика, имеющие ординату, равную свободному члену квадратного трехчлена, т. е. равную пяти. Для этого решим уравнение $x^2 - 4x + 5 = 5$:

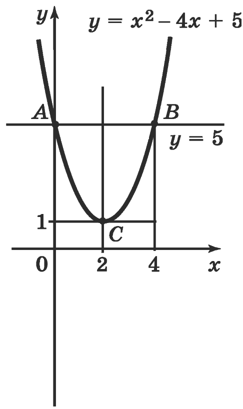


Рис. 1.87

$$x^2 - 4x = 0,\ x(x-4) = 0,\ \text{откуда}\ x_1 = 0,\ x_2 = 4.$$

Мы нашли две точки графика: $A(0;\ 5)$ и $B(4;\ 5)$. Отметим их на координатной плоскости (рис. 1.87).

Мы знаем, что графиком является парабола. Точки A и B лежат на этой параболе и имеют одинаковую ординату. Значит, точки A и B симметричны относительно оси симметрии параболы, а потому ось симметрии параболы проходит перпендикулярно отрезку AB через его середину. Так как абсцисса точки A равна нулю, а абсцисса точки B равна четырем, то уравнение оси параболы $x = 2$. Подставив значение $x = 2$ в формулу $y = x^2 - 4x + 5$, получим $y = 4 - 8 + 5 = 1$. Значит, вершина C параболы, т. е. единственная точка параболы, лежащая на ее оси симметрии, имеет координаты $x_0 = 2$, $y_0 = 1$. Отметив на координатной плоскости точку C (2; 1), построим параболу, проходящую через три точки: A, B, C. Это и будет график функции $y = x^2 - 4x + 5$ (рис. 1.87). Для более точного построения можно найти координаты еще нескольких точек и построить их.

Способ 3-й. ***Построение параболы по корням квадратного трехчлена.***

Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ (о решении уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ см. п. 137). Тогда парабола, служащая графиком функции $y = ax^2 + bx + c$, пересекает ось абсцисс в точках $A(x_1; 0)$ и $B(x_2; 0)$, а ось симметрии параболы проходит перпендикулярно отрезку AB через его середину. Зная абсциссу x_0 вершины C параболы (точка C лежит на оси симметрии параболы, поэтому $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$), найдем по формуле $y = ax^2 + bx + c$ ее ординату, а затем построим параболу по трем точкам: A, B, C.

П р и м е р 3. Построить график функции $y = -x^2 + 6x - 5$.

Р е ш е н и е. Из уравнения $-x^2 + 6x - 5 = 0$ находим $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. Значит, мы знаем две точки искомой параболы: $A(1; 0)$ и $B(5; 0)$. Уравнение оси симметрии параболы таково: $x = 3$. Подставив значение 3 вместо x в формулу $y = -x^2 + 6x - 5$, находим $y = 4$. Значит, вершиной параболы служит точка $C(3; 4)$. По трем точкам A, B и C строим параболу — график функции $y = -x^2 + 6x - 5$ (рис. 1.88).

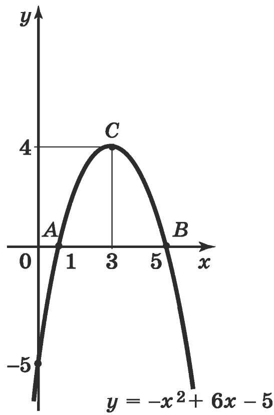


Рис. 1.88

115. Построение графика функции $y = f(kx)$.

З а д а ч а 1. Построить график функции $y = f(kx)$, где $k > 0$, $k \neq 1$, если задан график функции $y = f(x)$.

Р е ш е н и е. Ордината графика функции $y = f(kx)$ в точке x равна ординате графика функции $y = f(x)$ в точке kx. Это значит, что график функции $y = f(kx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ *сжатием с коэффициентом k к оси y* $\left(\text{если } 0 < k < 1\text{, то фактически получается растяжение от оси } y \text{ с коэффициентом } \frac{1}{k}\right)$.

На рисунке 1.89 изображены графики функций $y = \arccos x$ и $y = \arccos 2x$, на рисунке 1.90 — графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{\frac{x}{3}}$.

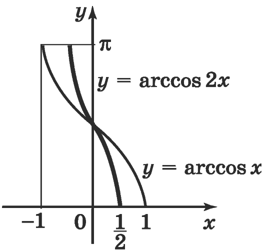


Рис. 1.89

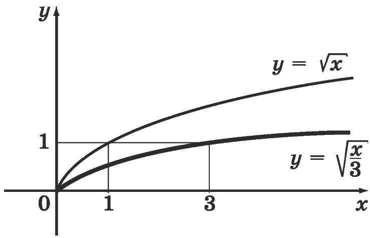


Рис. 1.90

З а д а ч а 2. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(-x)$.

Р е ш е н и е. Ордината графика функции $y = f(-x)$ в точке x равна ординате графика функции $y = f(x)$ в точке $-x$. Это значит, что график функции $y = f(-x)$ может быть получен из графика функции $y = f(x)$ преобразованием симметрии последнего относительно оси y.

На рисунке 1.91 изображены графики функций $y = \log_3 x$ и $y = \log_3(-x)$.

З а д а ч а 3. Зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(kx)$, где $k < 0$.

Р е ш е н и е. Имеем $f(kx) = f(-|k|\,x)$. Поэтому график функции $y = f(kx)$ может быть получен сжати-

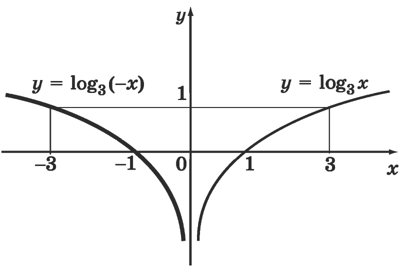


Рис. 1.91

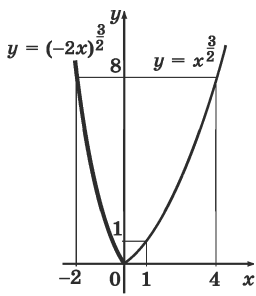


Рис. 1.92

ем графика функции $y = f(x)$ с коэффициентом $|k|$ к оси y и симметрией полученного графика $y = f(|k|\,x)$ относительно оси y.

На рисунке 1.92 изображены графики функций $y = x^{\frac{3}{2}}$ и $y = (-2x)^{\frac{3}{2}}$.

116. Сжатие и растяжение графиков тригонометрических функций. Здесь речь идет о построении графиков функций вида $y = m \sin kx$, $y = m \cos kx$, $y = m \operatorname{tg} kx$, $y = m \operatorname{ctg} kx$.

Вообще говоря, построение графика функции $y = m \sin kx$ осуществляется в три этапа:

1) строят график функции $y = \sin x$ (см. п. 102);

2) строят график функции $y = \sin kx$ (см. п. 115);

3) строят график функции $y = m \sin kx$ (см. п. 110).

Аналогично обстоит дело с другими тригонометрическими функциями.

На практике обычно при построении графика функции $y = = m \sin kx$ ($y = m \cos kx$) выполняют растяжение и сжатие для одной полуволны графика функции $y = \sin x$ ($y = \cos x$), а затем строят весь график. При построении графика функции $y = m \operatorname{tg} kx$ ($y = m \operatorname{ctg} kx$) выполняют растяжение и сжатие для одной ветви графика функции $y = \operatorname{tg} x$ ($y = \operatorname{ctg} x$), а затем строят весь график.

П р и м е р. Построить график функции $y = -3 \cos 2x$.

Р е ш е н и е. Построим одну полуволну графика функции $y = \cos x$. Осуществив ее сжатие к оси y с коэффициентом 2, получим график функции $y = \cos 2x$. Теперь осуществим растяжение полученного графика от оси x с коэффициентом 3, а затем преобразование симметрии относительно оси x. В результате мы получим график функции $y = -3 \cos 2x$.

На рисунке 1.93 показана одна полуволна графика, а на рисунке 1.94 — весь график.

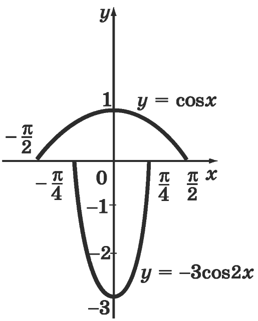


Рис. 1.93

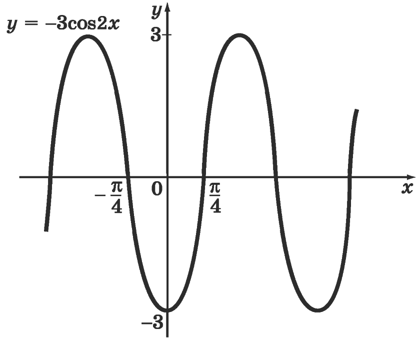


Рис. 1.94

117. График гармонического колебания $y = A\sin(\omega x + \alpha)$. Тригонометрические функции используются для описания колебательных процессов. Один из наиболее важных процессов такого рода описывается формулой

$$y = A\sin(\omega x + \alpha). \qquad (1)$$

Эту формулу называют формулой *гармонических* или *синусоидальных колебаний*. Величину A называют *амплитудой колебания*, она характеризует размах колебания. Величину ω называют *частотой колебания*. Чем больше ω, тем больше число колебаний за единицу времени $\left(\text{число колебаний за единицу времени равно } \frac{\omega}{2\pi}\right)$. Наконец, α называют *начальной фазой колебания*.

Если, например, груз, висящий на пружине, вывести из положения равновесия, то он начнет совершать вертикальные колебания. Закон движения выражается формулой (1), где y — отклонение груза от положения равновесия, а x — время. Тот же закон встречается в теории переменного электрического тока. При вращении прямоугольной рамки, сделанной из проводящего электрический ток материала, в магнитном поле по ней идет переменный ток. Если рамка вращается равномерно, сила тока меняется по закону гармонических колебаний (1).

Построим график функции $y = A\sin(\omega x + \alpha)$. Прежде всего преобразуем функцию к виду $y = A\sin\left(\omega\left(x + \frac{\alpha}{\omega}\right)\right)$. Построение графика этой функции выполним в несколько этапов.

1) Осуществим параллельный перенос системы координат, поместив начало новой системы $x'y'$ в точку $O'\left(-\frac{\alpha}{\omega}; 0\right)$.

2) В системе $x'y'$ построим график функции $y' = \sin x'$ (при этом можно ограничиться одной полуволной).

3) Осуществив сжатие построенного графика к оси y' с коэффициентом ω, получим график $y' = \sin \omega x'$.

4) Осуществив растяжение последнего графика от оси x' с коэффициентом A, получим требуемый график.

П р и м е р 1. Построить график функции $y = 2\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$.

Р е ш е н и е. Имеем $y = 2\sin\left(\frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$. Построение графика выполним в несколько этапов.

1) Осуществим параллельный перенос системы координат, выбрав началом новой системы точку O' $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$. В системе $x'y'$ нам нужно построить график функции $y' = 2\sin\frac{1}{3}x'$.

2) Строим график функции $y' = \sin x'$.

3) Выполнив сжатие графика к оси y' с коэффициентом $\frac{1}{3}$ (т. е. растяжение с коэффициентом 3), получим график функции $y' = \sin\frac{x'}{3}$.

4) Осуществим растяжение последнего графика от оси x' с коэффициентом 2. Полученный график является графиком функции $y = 2\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$ (рис. 1.95).

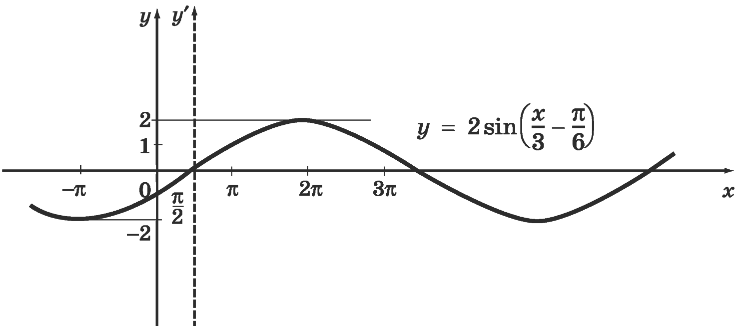


Рис. 1.95

На практике вместо сжатия, растяжения и параллельного переноса часто поступают иначе: отыскивают значения x, при которых заданная функция обращается в нуль, и значения, при которых она принимает наибольшее и наименьшее значения. Далее график строят по точкам.

Пример 2. Построить график гармонического колебания

$$y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Решение. Решим сначала уравнение $3\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$. Имеем (см. п. 154): $2x + \frac{\pi}{3} = \pi k$, $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Дадим параметру k два значения: 0 и 1. При $k = 0$ имеем $x = -\frac{\pi}{6}$, при $k = 1$ имеем $x = \frac{\pi}{3}$. Значит, точки $A_1\left(-\frac{\pi}{6}; 0\right)$ и $A_2\left(\frac{\pi}{3}; 0\right)$ служат концами одной полуволны искомой синусоиды. Далее, серединой отрезка $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ является точка $\frac{\pi}{12}$, в которой функция $3\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ принимает максимальное значение, равное трем. Значит, $M\left(\frac{\pi}{12}; 3\right)$ — точка максимума (см. п. 217). Отмечаем на координатной плоскости точки $A_1\left(-\frac{\pi}{6}; 0\right)$, $A_2\left(\frac{\pi}{3}; 0\right)$ и $M\left(\frac{\pi}{12}; 3\right)$ и строим полуволну искомого графика (рис. 1.96). После этого строим график заданного гармонического колебания (рис. 1.97).

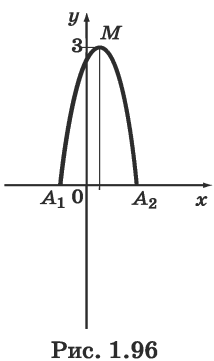


Рис. 1.96

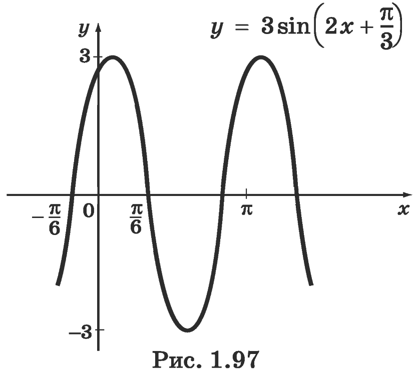


Рис. 1.97

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 12. Преобразование выражений, содержащих переменную под знаком логарифма

118. Понятие трансцендентного выражения. *Трансцендентным выражением* называют выражение, содержащее переменные под знаком трансцендентной функции, т. е. под знаком показательной, логарифмической, тригонометрических или обратных тригонометрических функций. Примеры трансцендентных выражений:

$$\log_2 a + \log_2 b; \quad \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma; \quad \arcsin(x^2 - x).$$

119. Определение логарифма положительного числа. Натуральные логарифмы. *Логарифмом* положительного числа x по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число x:

$$a^{\log_a x} = x.$$

Равенство $\log_a x = y$ означает, что $a^y = x$.

Например, $\log_3 81 = 4$, так как $3^4 = 81$; $\log_{10} 0{,}001 = -3$, так как $10^{-3} = 0{,}001$; $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} = -\frac{1}{2}$, так как $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

В записи $\log_a x$ число a — *основание логарифма*, x — *логарифмируемое число*.

Из определения логарифма вытекают следующие важные равенства:

$$\log_a 1 = 0,$$

$$\log_a a = 1.$$

Первое следует из того, что $a^0 = 1$, а второе — из того, что $a^1 = a$.

Вообще имеет место равенство

$$\log_a a^r = r.$$

Если основание логарифма равно числу e (см. п. 97), то логарифм называют *натуральным*. Вместо записи $\log_e x$ принята запись $\ln x$.

Справедливы равенства:

$$\ln 1 = 0;$$

$$\ln e = 1;$$

$$e^{\ln x} = x \quad (\text{для } x > 0).$$

120. Свойства логарифмов.

1°. Если $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, то

$$\log_a x_1x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

(*логарифм произведения равен сумме логарифмов множителей*).

Например, $\log_3 15 = \log_3 (3 \cdot 5) = \log_3 3 + \log_3 5 = 1 + \log_3 5$.

2°. Если $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, то

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

(*логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя*).

Например, $\log_2 1{,}25 = \log_2 \frac{5}{4} = \log_2 5 - \log_2 4 = \log_2 5 - 2$.

Если $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$, то написать

$$\log_a x_1x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

нельзя, так как правая часть такого «равенства» не имеет смысла (логарифм отрицательного числа не существует). Здесь можно рассуждать так: x_1 и x_2 — отрицательные числа, следовательно, $x_1x_2 > 0$. Но тогда $x_1x_2 = |x_1x_2| = |x_1| \cdot |x_2|$. Значит, $\log_a x_1x_2 = \log_a |x_1| \cdot |x_2|$.

Так как $|x_1| > 0$ и $|x_2| > 0$, то, применив свойство 1°, получим

$$\log_a |x_1| \cdot |x_2| = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|.$$

Итак, если $x_1x_2 > 0$, то

$$\log_a x_1x_2 = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|$$

и, аналогично

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a |x_1| - \log_a |x_2|.$$

3°. Если $x > 0$, то

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

(*логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания степени*).

Например, $\log_5 81 = \log_5 3^4 = 4 \log_5 3$;

$$\log_3 \sqrt{2} = \log_3 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_3 2.$$

П р и м е р. Вычислить $\log_2 \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$, если $\log_2 3 = a$.

Р е ш е н и е.

$$\log_2 \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \log_2 \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} (\log_2 3 - \log_2 4) = \frac{1}{3} (a - 2).$$

Справедливо следующее утверждение: *если k — четное число, то $\log_a x^k = k \log_a |x|$ для любого $x \neq 0$.*

Например, $\log_2 x^4 = 4 \log_2 |x|$; $\log_3 x^2 = 2 \log_3 |x|$.

121. Переход к новому основанию логарифма. Справедливы следующие два свойства, позволяющие перейти к новому основанию логарифма:

1°. Если $x > 0$, то

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

(*формула перехода к новому основанию*).

Например, $\log_2 3 = \dfrac{\log_5 3}{\log_5 2}$; $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}$; $\log_5 3 = \dfrac{\ln 3}{\ln 5}$.

2°. Если $x > 0$, то

$$\log_a x = \log_{a^k} x^k.$$

Например, $\log_2 5 = \log_{2^3} 5^3 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{5}$.

Пример 1. Вычислить $\log_5 6$, если $\log_2 3 = a$, $\log_2 10 = b$.

Решение. Перейдем в $\log_5 6$ к основанию 2:

$$\log_5 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 5} = \frac{\log_2 (2 \cdot 3)}{\log_2 \dfrac{10}{2}} = \frac{\log_2 2 + \log_2 3}{\log_2 10 - \log_2 2} = \frac{1+a}{b-1}.$$

Пример 2. Вычислить $\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt[6]{32}$.

Решение. Согласно свойству 2° основание логарифма и логарифмируемое число можно возвести в одну и ту же степень, при этом числовое значение выражения не изменится:

$$\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt[6]{32} = \log_{(\sqrt[3]{2})^3} (\sqrt[6]{32})^3 = \log_2 \sqrt{32} = \log_2 2^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}.$$

122. Логарифмирование и потенцирование. Если некоторое выражение A составлено из положительных чисел с помощью операций умножения, деления и возведения в степень, то, используя свойства логарифмов, можно выразить $\log_a A$ через логарифмы входящих в выражение A чисел. Такое преобразование называют *логарифмированием*.

Пример 1. Прологарифмировать по основанию 5 выражение $\dfrac{125a^3b^2}{\sqrt{c}}$, где a, b, c — положительные числа.

Решение. Используя свойства логарифмов (см. п. 120), получим

$$\log_5 \frac{125a^3b^2}{\sqrt{c}} = \log_5 (125a^3b^2) - \log_5 \sqrt{c} =$$

$$= \log_5 125 + \log_5 a^3 + \log_5 b^2 - \log_5 c^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 3 + 3\log_5 a + 2\log_5 b - \frac{1}{2}\log_5 c.$$

Часто приходится решать обратную задачу: находить выражение по его логарифму. Такое преобразование называют *потенцированием*.

П р и м е р 2. Найти x, если

$$\log_3 x = 2\log_3 5 + \frac{1}{2}\log_3 8 - 3\log_3 10.$$

Р е ш е н и е.

$$\log_3 x = \log_3 25 + \log_3 8^{\frac{1}{2}} - \log_3 10^3 = \log_3 \frac{25 \cdot 2\sqrt{2}}{1000} =$$

$$= \log_3 \frac{\sqrt{2}}{20}.$$

Из равенства $\log_3 x = \log_3 \frac{\sqrt{2}}{20}$ находим, что $x = \frac{\sqrt{2}}{20}$.

123. Десятичный логарифм. Характеристика и мантисса десятичного логарифма. Если основание логарифма равно 10, то логарифм называют *десятичным*. Вместо записи $\log_{10} x$ принята запись $\lg x$. На рисунках 1.98 и 1.99 изображены графики функций $y = 10^x$ и $y = \lg x$.

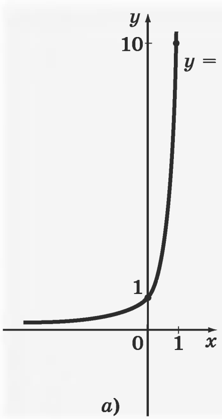


Рис. 1.98

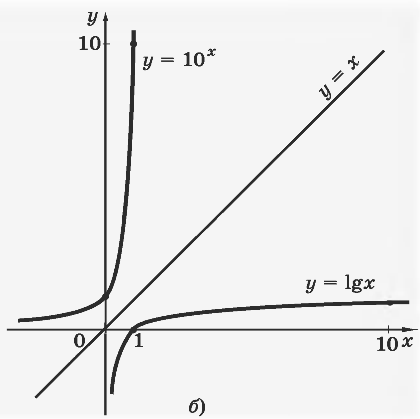


Рис. 1.99

В частности, для десятичных логарифмов справедливы равенства:

$$10^{\lg a} = a$$

$$\begin{array}{ll} \lg 1 = 0, & \lg 0{,}1 = -1, \\ \lg 10 = 1, & \lg 0{,}01 = -2, \\ \lg 100 = 2, & \lg 0{,}001 = -3, \\ \lg 1000 = 3, & \lg 0{,}0001 = -4, \end{array}$$

$$\lg 10^n = n.$$

Пусть положительное число a представлено в стандартном виде (см. п. 34) $a = a_1 \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a_1 < 10$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (n — порядок числа a). Прологарифмируем число a по основанию 10, воспользовавшись свойствами логарифма (см. п. 120):

$$\lg a = \lg (a_1 \cdot 10^n) = \lg a_1 + \lg 10^n = \lg a_1 + n.$$

$$\text{Итак, } \lg a = \lg a_1 + n. \qquad (1)$$

Поскольку $1 \leqslant a_1 < 10$, то $\lg 1 \leqslant \lg a_1 < \lg 10$, т. е. $0 \leqslant \lg a_1 < 1$. Поэтому из равенства (1) следует, что n есть наибольшее целое числа, не превосходящее число $\lg a$. Значит, n есть целая часть числа $\lg a$, т. е. $n = [\lg a]$ (см. п. 31). Слагаемое $\lg a_1$ есть дробная часть числа $\lg a$, т. е. $\lg a_1 = \{\lg a\}$ (см. п. 31). Целую часть числа $\lg a$, т. е. порядок числа a, называют *характеристикой* $\lg a$, а дробную часть числа $\lg a$ — его *мантиссой*.

Имеет место следующее утверждение: *если число $a > 0$ умножить на 10^k, где k — целое число, то мантисса логарифма не изменится*; иными словами, $\lg a$ и $\lg (a \cdot 10^k)$ имеют одинаковые мантиссы.

В самом деле, имеем

$$\lg (a \cdot 10^k) = \lg a + \lg 10^k = \lg (a_1 \cdot 10^n) + k = \lg a_1 + n + k.$$

Мантиссой числа $\lg (a \cdot 10^k)$ является $\lg a_1$, т. е. то же число, которое служит мантиссой для $\lg a$.

§ 13. Формулы тригонометрии и их использование для преобразования тригонометрических выражений

124. Тригонометрические выражения. Выражение, в котором переменная содержится под знаками тригонометрических функций, называют *тригонометрическим*. Для преобразования тригонометрических выражений используют свойства тригонометрических функций, отмеченные в пп. 100—105, и формулы тригонометрии, указанные ниже в пп. 125—131.

125. Формулы сложения и вычитания аргументов.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta, \qquad (1)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta, \qquad (2)$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \qquad (3)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta, \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \qquad (5)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (6)$$

Формулы (1)—(4) справедливы для любых α, β.

Формула (5) верна при α, β, $\alpha+\beta$, отличных от $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Формула (6) верна при α, β, $\alpha-\beta$, отличных от $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 1. Вычислить $\sin 75°$.

Решение. Имеем $\sin 75° = \sin(30°+45°)$. Воспользовавшись формулой (3) при $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, получим

$$\sin(30°+45°)=\sin 30°\cos 45°+\cos 30°\sin 45°.$$

Известно, что $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 45° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (см. п. 99). Значит, $\sin(30° + 45°) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Итак, $\sin 75° = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$.

Пример 2. Упростить выражение
$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}.$$

Решение. Воспользуемся для $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ и $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ формулами (3) и (1) и учтем, что $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$:
$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)} =$$
$$\frac{\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right) - \left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)}{\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right) + \left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)} =$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha - \cos\alpha + \sin\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha + \cos\alpha - \sin\alpha)} = \frac{2\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

П р и м е р 3. Вычислить $\cos 15°$.

Р е ш е н и е. Имеем $15° = 45° - 30°$. Воспользовавшись формулой (2) при $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$, получим

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1).$$

П р и м е р 4. Найти $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой (5) и учтем, что $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = 7.$$

126. Формулы приведения. Под *формулами приведения* понимают обычно формулы, сводящие значение тригонометрической функции аргумента вида $\frac{\pi n}{2} \pm \alpha$, $n \in \boldsymbol{Z}$, к функции аргумента α.

Пусть, например, нужно вычислить $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

Имеем:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha = 1 \cdot \cos\alpha + 0 \cdot \sin\alpha = \cos\alpha.$$

Аналогично,

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\pi\cos\alpha-\cos\pi\sin\alpha=$$
$$=0\cdot\cos\alpha-(-1)\cdot\sin\alpha=\sin\alpha;$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{3\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{3\pi}{2}\sin\alpha=$$
$$=0\cdot\cos\alpha-(-1)\cdot\sin\alpha=\sin\alpha.$$

Подобным же образом выводятся и остальные формулы приведения. Эти формулы даны в следующей таблице:

Функция	Аргумент t						
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin t$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos t$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\, t$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\, t$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

127. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Если в формуле (2) из п. 125 положить $\alpha=\beta=t$, то получим

$$\cos^2 t+\sin^2 t=1, \tag{1}$$

откуда, в свою очередь, находим, что

$$1+\mathrm{tg}^2\, t=\frac{1}{\cos^2 t}, \tag{2}$$

$$1+\mathrm{ctg}^2\, t=\frac{1}{\sin^2 t}. \tag{3}$$

Тождество (2) справедливо при $t\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$, а тождество (3) — при $t\neq\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

Равенства (1), (2), (3) связывают между собой различные тригонометрические функции одного и того же аргумента. Известны еще два равенства, связывающие между собой различные тригонометрические функции одного и того же аргумента:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Перемножая эти равенства, получаем равенство

$$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1, \qquad (4)$$

справедливое при $t \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

П р и м е р 1. Известно, что $\sin t = -\frac{3}{5}$, причем $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$. Найти $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$.

Р е ш е н и е. Из формулы (1) получаем $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$. Подставив вместо $\sin t$ его значение, получим

$$\cos^2 t = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

Итак, $\cos^2 t = \frac{16}{25}$; значит, либо $\cos t = \frac{4}{5}$, либо $\cos t = -\frac{4}{5}$.

По условию, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$, т. е. аргумент t принадлежит III четверти. Но в III четверти косинус отрицателен; значит, из двух указанных выше возможностей выбираем одну: $\cos t = -\frac{4}{5}$.

Зная $\sin t$ и $\cos t$, находим $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}, \operatorname{ctg} t = \frac{4}{3}.$$

Итак, $\cos t = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} t = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} t = \frac{4}{3}$.

Пример 2. Известно, что $\operatorname{ctg} t = -\frac{5}{12}$, причем $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Найти $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$.

Решение. Из формулы (3) находим $\sin^2 t = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 t}$.

Подставив вместо $\operatorname{ctg} t$ его значение, получим

$$\sin^2 t = \frac{1}{1+\left(-\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{25}{144}} = \frac{144}{169}.$$

Итак, $\sin^2 t = \frac{144}{169}$. Значит, либо $\sin t = \frac{12}{13}$, либо $\sin t = -\frac{12}{13}$. По условию, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Значит, t принадлежит II четверти, а во II четверти синус положителен. Поэтому из двух указанных возможностей выбираем одну: $\sin t = \frac{12}{13}$.

Для отыскания значения $\cos t$ воспользуемся определением котангенса: $\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$. Из этого равенства находим

$$\cos t = \operatorname{ctg} t \cdot \sin t = -\frac{5}{12} \cdot \frac{12}{13} = -\frac{5}{13}.$$

Осталось вычислить значение $\operatorname{tg} t$. Из равенства $\operatorname{tg} t = \frac{1}{\operatorname{ctg} t}$ находим, что $\operatorname{tg} t = -\frac{12}{5}$.

Итак,

$$\sin t = \frac{12}{13}, \quad \cos t = -\frac{5}{13}, \quad \operatorname{tg} t = -\frac{12}{5}.$$

128. Формулы двойного аргумента. Если в формулах (3), (1), (5) из п. 125 положить $\alpha = t$, $\beta = t$, то получим следующие тождества:

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t, \qquad (1)$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t, \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg} 2t = \frac{2\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}. \qquad (3)$$

С помощью формул (1), (2) и (3) можно выразить синус, косинус, тангенс любого (допустимого) аргумента через тригонометрические функции вдвое меньшего аргумента. Например, справедливы следующие равенства:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

$$\sin 5x = 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{5x}{2},$$

$$\cos 8t = \cos^2 4t - \sin^2 4t.$$

В ряде случаев полезным оказывается использование полученных формул «справа налево», т. е. замена выражения $2 \sin t \cos t$ выражением $\sin 2t$ (или выражения $\sin t \cos t$ — выражением $\frac{\sin 2t}{2}$), выражения $\cos^2 t - \sin^2 t$ — выражением $\cos 2t$ и, наконец, выражения $\frac{2\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}$ — выражением $\operatorname{tg} 2t$.

П р и м е р. Упростить выражение $\operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t$.

Р е ш е н и е. $\operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t = \frac{\sin t}{\cos t} - \frac{\cos t}{\sin t} =$

$$= \frac{\sin^2 t - \cos^2 t}{\sin t \cos t} = -\frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\frac{1}{2}\sin 2t} = -2\,\frac{\cos 2t}{\sin 2t} = -2 \operatorname{ctg} 2t.$$

129. Формулы понижения степени. Зная, что $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ (см. п. 127), а $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$ (см. п. 128), находим, что

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}; \tag{1}$$

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) называют *формулами понижения степени*. Они позволяют преобразовывать $\sin^2 t$ и $\cos^2 t$ в выражения, содержащие первую степень косинуса двойного аргумента. Например, используя формулы (1) и (2), можем получить следующие равенства:

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2},$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\alpha\right)}{2}.$$

Формулы (1) и (2) используют и «справа налево» для преобразования сумм $1 + \cos 2t$, $1 - \cos 2t$ в произведения. Например, верны следующие равенства:

$$1 + \cos 5x = 2\cos^2 \frac{5x}{2}, \quad 1 - \cos(\alpha + \beta) = 2\sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

П р и м е р 1. Доказать тождество $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{\sin t}{1 + \cos t}$.

Р е ш е н и е. Знаменатель правой части преобразуем по формуле (1), а числитель — по формуле синуса двойного аргумента (см. п. 128). Получим

$$\frac{\sin t}{1 + \cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}} = \frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}} = \operatorname{tg}\frac{t}{2}.$$

П р и м е р 2. Вычислить $\sin^4 x + \cos^4 x$, если известно, что $\cos 2x = \frac{5}{13}$.

Р е ш е н и е. Воспользовавшись тем, что $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2$ и $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2$, применим формулы понижения степени. Получим

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 =$$

$$= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{2 + 2\cos^2 2x}{4} = \frac{1 + \cos^2 2x}{2} = \frac{1 + \frac{25}{169}}{2} = \frac{97}{169}.$$

130. Преобразование сумм тригонометрических функций в произведение.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Пример 1. Преобразовать в произведение $\cos 48° - \cos 12°$.

Решение. Применив формулу разности косинусов при $\alpha = 48°$, $\beta = 12°$, получим

$$\cos 48° - \cos 12° = -2\sin\frac{48°+12°}{2}\sin\frac{48°-12°}{2} =$$
$$= -2\sin 30° \sin 18°.$$

Так как $\sin 30° = \frac{1}{2}$, то окончательно получим

$$\cos 48° - \cos 12° = -\sin 18°.$$

Пример 2. Преобразовать в произведение

$$\sin x + \cos 2x - \sin 3x.$$

Решение.

$$\sin x + \cos 2x - \sin 3x = \cos 2x - (\sin 3x - \sin x) =$$
$$= \cos 2x - 2\sin x\cos 2x = 2\cos 2x\left(\frac{1}{2} - \sin x\right) =$$
$$= 2\cos 2x\left(\sin\frac{\pi}{6} - \sin x\right) = 2\cos 2x \cdot 2\sin\frac{\frac{\pi}{6} - x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{6} + x}{2} =$$
$$= 4\cos 2x \sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2}\right).$$

131. Преобразование произведений тригонометрических функций в сумму.

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}, \qquad (1)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}. \qquad (3)$$

П р и м е р. Преобразовать в сумму произведение $\sin 43^\circ \cos 19^\circ$.

Р е ш е н и е. Воспользовавшись формулой (1) при $\alpha = 43^\circ$, $\beta = 19^\circ$, получим

$$\sin 43^\circ \cos 19^\circ = \frac{\sin(43^\circ - 19^\circ) + \sin(43^\circ + 19^\circ)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 24^\circ + \sin 62^\circ).$$

132*. Преобразование выражения $a \cos t + b \sin t$ к виду $A \cos (t — \alpha)$. Любое выражение вида $a \cos t + b \sin t$ можно представить в виде $A \sin (t + \alpha)$. Для этого вынесем за скобки выражение $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t\right).$$

Но $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$. Это значит, что точка с координатами $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ удовлетворяет уравнению $x^2 + y^2 = 1$, т. е. лежит на числовой окружности; поэтому существует такое α, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha.$$

Обозначив для краткости $a^2 + b^2$ через A, получаем

$$a \cos t + b \sin t = A(\cos \alpha \cos t + \sin \alpha \sin t).$$

Применив к выражению в скобках формулу (2) из п. 125, получим

$$a \cos t + b \sin t = A \cos (t - a).$$

Числа a, b, A, α связаны друг с другом соотношениями:

$$a = A\cos\alpha, \quad b = A\sin\alpha, \quad A = \sqrt{a^2+b^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Например, $3 \sin 2t + 4 \cos 2t = 5 \cos (2t - \alpha)$, где $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

133*. Примеры преобразований выражений, содержащих обратные тригонометрические функции.

Пример 1. Упростить выражение $\cos(\arcsin x)$, где $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Решение. Положим $\arcsin x = y$. Тогда $\sin y = x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Нужно найти $\cos y$.

Известно, что $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$; значит, $\cos^2 y = 1 - x^2$. Но $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, а на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ косинус принимает лишь неотрицательные значения. Поэтому $\cos y = \sqrt{1-x^2}$, т. е. $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

Пример 2. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$.

Решение. Положим $\alpha = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$. Тогда $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Нужно вычислить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Имеем $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$; значит, $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\frac{3}{5}}{2} = \frac{1}{5}$. Так как, далее, $1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$, то $1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = 5$, откуда $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = 4$, т. е. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2$ или $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -2$.

По условию, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; значит, $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, а в интервале $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ имеем $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} > 0$. Итак, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2$, т. е. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = 2$.

Пример 3. Доказать, что для любого x из $[-1; 1]$ справедливо тождество

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x. \qquad (1)$$

Решение. Вычислим значения синуса левой и правой частей проверяемого равенства:

$$\sin(\arcsin x) = x;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x.$$

Синусы, как мы видим, равны, поэтому, чтобы убедиться в справедливости равенства (1), осталось показать, что $\arcsin x$ и $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcos} x$ принадлежат одному и тому же промежутку монотонности функции $y = \sin x$ (без проверки этого условия можно получить неверный результат, ведь тригонометрические функции могут принимать одинаковые значения и для различных значений аргумента, например $\frac{\pi}{6} \neq \frac{5\pi}{6}$, но $\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$).

Имеем $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Далее, $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$, а поэтому $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - \arccos x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Итак, $\arcsin x$ и $\frac{\pi}{2} - \arccos x$ принадлежат одному промежутку монотонности $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функции $y = \sin x$. Теперь можно считать, что тождество (1) доказано.

Аналогично можно доказать, что

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

§ 14. Уравнения с одной переменной

134. Определение уравнения. Корни уравнения. Равенство с переменной $f(x) = g(x)$ называют *уравнением с одной переменной* x, если поставлена задача найти все те же значения x, при которых равенство с переменной обращается в верное числовое равенство. Всякое значение переменной, при котором выражения $f(x)$ и $g(x)$ принимают равные числовые значения, называют *корнем уравнения*.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Пример 1. Уравнение $3 + x = 7$ имеет единственный корень 4, так как при этом и только при этом значении переменной равенство $3 + x = 7$ является верным.

Пример 2. Уравнение $(x - 1)(x - 2) = 0$ имеет два корня: 1 и 2.

Пример 3. Уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

Заметим, что можно говорить и о мнимых корнях уравнений. Так, уравнение $x^2 + 1 = 0$ имеет два мнимых корня: $x_1 = i$, $x_2 = -i$ (см. п. 47). Всюду ниже речь идет только о *действительных корнях* уравнений.

135. Равносильность уравнений. Уравнения, имеющие одни и те же корни, называют *равносильными*. Равносильными считаются и уравнения, каждое из которых не имеет корней.

Например, уравнения $x + 2 = 5$ и $x + 5 = 8$ равносильны, так как каждое из них имеет единственный корень — число 3. Равносильны и уравнения $x^2 + 1 = 0$ и $2x^2 + 5 = 0$ — ни одно из них не имеет корней.

Уравнения $x - 5 = 1$ и $x^2 = 36$ неравносильны, так как первое имеет только один корень 6, тогда как второе имеет два корня: 6 и -6.

В процессе решения уравнения его стараются заменить более простым, но равносильным данному. Поэтому важно знать, при каких преобразованиях данное уравнение переходит в равносильное ему уравнение.

Теорема 1. Если в уравнении какое-нибудь слагаемое перенести из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному.

Например, уравнение $x^2 + 2 = 3x$ равносильно уравнению $x^2 + 2 - 3x = 0$.

Теорема 2. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

Например, уравнение $\frac{x^2 - 1}{3} = 2x$ равносильно уравнению $x^2 - 1 = 6x$ (обе части первого уравнения мы умножили на 3).

136. Линейные уравнения. *Линейным уравнением с одной переменной x* называют уравнение вида

$$ax = b,$$

где a и b — действительные числа; a называют *коэффициентом при переменной*, b — *свободным членом*.

Для линейного уравнения $ax = b$ могут представиться три случая:

1) $a \neq 0$; в этом случае корень уравнения равен $\frac{b}{a}$;

2) $a = 0$, $b = 0$; в этом случае уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$, что верно при любом x, т. е. корнем уравнения служит любое действительное число;

3) $a = 0$, $b \neq 0$; в этом случае уравнение принимает вид $0 \cdot x = b$, оно не имеет корней.

Многие уравнения в результате преобразований сводятся к линейным.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{1}{5}x + \frac{2}{15} = 0$.

Решение. По теореме 1 (см. п. 135), данное уравнение равносильно уравнению $\frac{1}{5}x = -\frac{2}{15}$. Если разделить обе части этого уравнения на коэффициент при x, то по теореме 2 получим равносильное данному уравнение $x = -\frac{2}{15} : \frac{1}{5}$, т. е. $x = -\frac{2}{3}$. Итак, $-\frac{2}{3}$ — корень уравнения.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{2}{3} + \frac{x}{4} + \frac{1-x}{6} = \frac{5x}{12} - 1.$$

Решение. Это уравнение сводится к линейному уравнению. Умножив обе части уравнения на 12 (наименьшее общее кратное знаменателей 3, 4, 6, 12), получим

$$12\left(\frac{2}{3} + \frac{x}{4} + \frac{1-x}{6}\right) = 12\left(\frac{5x}{12} - 1\right)$$

и далее

$$8 + 3x + 2 - 2x = 5x - 12,$$

$$8 + 2 + 12 = 5x - 3x + 2x,$$

$$4x = 22,$$

$$x = 5{,}5.$$

137. Квадратные уравнения. Уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (1)$$

где a, b, c — действительные числа, причем $a \neq 0$, называют *квадратным уравнением*. Если $a = 1$, то квадратное уравнение называют *приведенным*, если $a \neq 1$, то *неприведенным*. Коэффициенты a, b, c имеют следующие названия: a — *первый коэффициент*, b — *второй коэффициент*, c — *свободный член*. Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ находят по формуле

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (2)$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют *дискриминантом* квадратного уравнения (1). Если $D < 0$, то *уравнение* (1) *не имеет действительных корней; если $D = 0$, то уравнение имеет один действительный корень; если $D > 0$, то уравнение имеет два действительных корня.*

В случае, когда $D = 0$, иногда говорят, что квадратное уравнение имеет два одинаковых корня.

Используя обозначение $D = b^2 - 4ac$, можно переписать формулу (2) в виде $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Если $b = 2k$, то формулу (2) можно упростить:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Итак,

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}, \text{ где } k = \frac{b}{2}. \qquad (3)$$

Формула (3) особенно удобна, если $\frac{b}{2}$ — целое число, т. е. коэффициент b — четное число.

П р и м е р 1. Решить уравнение $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

Р е ш е н и е. Здесь $a = 2$, $b = -5$, $c = 2$. Имеем:

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9.$$

Так как $D > 0$, то уравнение имеет два корня, которые найдем по формуле (2):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}.$$

Итак, $x_1 = \frac{5+3}{4} = 2$, $x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$, т. е. $x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{1}{2}$ — корни заданного уравнения.

П р и м е р 2. Решить уравнение $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Р е ш е н и е. Здесь $a = 1$, $b = -6$, $c = 9$. По формуле (3) находим $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 9 \cdot 1}}{1} = \frac{3 \pm 0}{1} = 3$, т. е. $x = 3$ — единственный корень уравнения.

П р и м е р 3. Решить уравнение $2x^2 - 3x + 5 = 0$.

Р е ш е н и е. Здесь $a = 2$, $b = -3$, $c = 5$; $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -31$. Так как $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.

138. Неполные квадратные уравнения. Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ второй коэффициент b или свободный член c равен нулю, то квадратное уравнение называют *неполным*. Неполные уравнения выделяют потому, что для отыскания их корней можно не пользоваться формулой корней квадратного уравнения — проще решить уравнение методом разложения его левой части на множители.

Пример 1. Решить уравнение $2x^2 - 5x = 0$.

Решение. Имеем $x(2x - 5) = 0$. Значит, либо $x = 0$, либо $2x - 5 = 0$, т. е. $x = 2{,}5$.

Итак, уравнение имеет два корня: 0 и 2,5.

Пример 2. Решить уравнение $3x^2 - 10 = 0$.

Решение. Разделив обе части уравнения на 3, получим $x^2 - \frac{10}{3} = 0$, т. е. $\left(x - \sqrt{\frac{10}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{10}{3}}\right) = 0$. Значит, либо $x - \sqrt{\frac{10}{3}} = 0$, откуда $x = \sqrt{\frac{10}{3}}$, либо $x + \sqrt{\frac{10}{3}} = 0$, откуда $x = -\sqrt{\frac{10}{3}}$.

Итак, уравнение имеет два корня: $\sqrt{\frac{10}{3}}$ и $-\sqrt{\frac{10}{3}}$.

Пример 3. Решить уравнение $2x^2 + 5 = 0$.

Решение. Так как $2x^2 + 5 > 0$ при любых x, то уравнение $2x^2 + 5 = 0$ не имеет корней.

139. Теорема Виета.

Теорема 3. Если приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0$$

имеет действительные корни, то их сумма равна $-p$, а произведение равно q, т. е.

$$x_1 + x_2 = -p,$$
$$x_1 x_2 = q \qquad (1)$$

(*сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену*).

Выведем еще некоторые соотношения между корнями и коэффициентами приведенного квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0.$$

Найдем сумму квадратов корней:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - 2x_1x_2 =$$
$$= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$$

Воспользовавшись формулами (1), получим

$$x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q. \qquad (2)$$

Найдем сумму кубов корней:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) =$$
$$= (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2).$$

Воспользовавшись формулами (1) и (2), получим

$$x_1^3 + x_2^3 = -p\,(p^2 - 3q).$$

Справедлива теорема, обратная теореме Виета.

Теорема 4. **Если числа x_1 и x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$, то x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.**

Эта теорема позволяет в ряде случаев находить корни квадратного уравнения без использования формулы корней.

П р и м е р 1. Решить уравнение $x^2 - 9x + 14 = 0$.

Р е ш е н и е. Попробуем найти два числа x_1 и x_2 такие, что

$$x_1 + x_2 = 9,$$

$$x_1 x_2 = 14.$$

Такими числами являются 2 и 7. По теореме 4, они и служат корнями заданного квадратного уравнения.

П р и м е р 2. Решить уравнение $x^2 + 3x - 28 = 0$.

Р е ш е н и е. Попробуем найти такие два числа x_1 и x_2, чтобы выполнялись равенства

$$x_1 + x_2 = -3,$$

$$x_1 x_2 = -28.$$

Такими числами будут -7 и 4. Они и являются корнями заданного уравнения.

140. Системы и совокупности уравнений. Рассмотрим уравнение

$$(x^2 - 1)^2 + ((x - 1)(x - 2))^2 = 0.$$

Ясно, что $(x^2 - 1)^2 \geqslant 0$ и $((x - 1)(x - 2))^2 \geqslant 0$, а сумма двух неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю. Поэтому сначала надо решить уравнения $(x^2-1)^2=0$ и $((x-1)(x-2))^2=0$, а затем найти их общие корни. Корнями уравнения $(x^2-1)^2=0$ служат числа 1 и −1, а корнями уравнения $((x-1)(x-2))^2=0$ — числа 1 и 2. Общим является число 1 — это корень исходного уравнения.

В том случае, когда нужно найти значения переменной, удовлетворяющие обоим заданным уравнениям, говорят, что задана *система уравнений*. Для обозначения системы используют фигурную скобку:

$$\begin{cases}(x^2-1)^2=0,\\((x-1)(x-2))^2=0.\end{cases}$$

Рассмотрим теперь уравнение $(x^2-1)(x^2-4)=0$. Произведение двух чисел равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел равно нулю. Поэтому сначала надо решить уравнения $x^2-1=0$ и $x^2-4=0$, а затем объединить их корни. Корнями первого уравнения являются числа 1 и −1, а корнями второго — числа 2 и −2. Значит, 1, −1, 2, −2 — корни исходного уравнения.

Несколько уравнений с одной переменной образуют *совокупность уравнений*, если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является корнем хотя бы одного из данных уравнений. Для обозначения совокупности иногда используют квадратную скобку:

$$\left[\begin{array}{l}x^2-1=0,\\x^2-4=0.\end{array}\right.$$

141. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля.

Пример 1. Решить уравнение $|3x-5|=2$.

Решение. Если $|a|=2$, то либо $a=2$, либо $-a=2$. Это значит, что заданное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $3x-5=2$; $-(3x-5)=2$. Из уравнения $3x-5=2$ находим $x_1=\frac{7}{3}$; из уравнения $-(3x-5)=2$ находим $x_2=1$.

Итак, уравнение имеет два корня. $x_1=\frac{7}{3}$, $x_2=1$.

Пример 2. Решить уравнение $|2x-8|=3x+1$.

Решение. Способ 1-й. Если $2x-8\geqslant 0$, то $|2x-8|=2x-8$ и данное уравнение примет вид $2x-8=3x+1$. Это можно записать так:

$$\begin{cases} 2x-8\geqslant 0, \\ 2x-8=3x+1. \end{cases}$$

Из уравнения $2x-8=3x+1$ находим $x=-9$. Однако при этом значении переменной неравенство $2x-8\geqslant 0$ не выполняется; значит, найденное значение не может быть корнем данного уравнения.

Если $2x-8<0$, то $|2x-8|=-(2x-8)$ и данное уравнение примет вид $8-2x=3x+1$. Это можно записать так:

$$\begin{cases} 2x-8<0, \\ 8-2x=3x+1. \end{cases}$$

Из уравнения $8-2x=3x+1$ находим $x=\frac{7}{5}$. Неравенство $2\cdot\left(\frac{7}{5}\right)-8<0$ верно; значит, $x=\frac{7}{5}$ — корень данного уравнения.

Способ 2-й. Так как $3x + 1 = |2x - 8|$, должно выполняться условие $3x + 1 \geqslant 0$. Так как уравнение $|f(x)| = a$, где $a > 0$, сводится к совокупности уравнений $f(x) = a$; $f(x) = -a$, то получаем

$$2x - 8 = 3x + 1; \quad 2x - 8 = -(3x + 1).$$

Из первого уравнения находим $x = -9$, из второго $x = \frac{7}{5}$. Из найденных двух значений неравенству $3x + 1 \geqslant 0$ удовлетворяет второе значение и не удовлетворяет первое. Значит, $x = \frac{7}{5}$ — единственный корень уравнения.

Уравнение вида $|x - a| = b$ можно решать геометрически (см. п. 26).

142. Понятие следствия уравнения. Посторонние корни.

Пусть даны два уравнения:

$$f_1(x) = g_1(x), \qquad (1)$$

$$f_2(x) = g_2(x). \qquad (2)$$

Если каждый корень уравнения (1) является одновременно и корнем уравнения (2), то уравнение (2) называют *следствием уравнения* (1). Равносильность уравнений означает, что каждое из уравнений является следствием другого.

В процессе решения уравнения часто приходится применять такие преобразования, которые приводят к уравнению, являющемуся следствием исходного. Уравнению-следствию удовлетворяют все корни исходного уравнения, но кроме них уравнение-следствие может иметь и такие решения, которые не являются корнями исходного уравнения; это так называемые *посторонние* корни. Чтобы выявить и отсеять посторонние корни, обычно поступают так: все найденные корни уравнения-следствия проверяют подстановкой в исходное уравнение.

Если при решении уравнения мы заменили его уравнением-следствием, то указанная выше проверка является неотъемлемой частью решения уравнения. Поэтому важно знать, при каких преобразованиях данное уравнение переходит в уравнение-следствие.

Рассмотрим уравнение

$$f(x) = g(x) \tag{3}$$

и умножим обе его части на одно и то же выражение $h(x)$, имеющее смысл при всех значениях x. Получим уравнение

$$f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x), \tag{4}$$

корнями которого служат как корни уравнения (3), так и корни уравнения $h(x) = 0$. Значит, уравнение (4) есть следствие уравнения (3). Ясно, что уравнения (3) и (4) равносильны, если «постороннее» уравнение $h(x) = 0$ не имеет корней.

Итак, *если обе части уравнения умножить на выражение $h(x)$, имеющее смысл при любых значениях x, то получится уравнение, являющееся следствием исходного*. Полученное уравнение будет равносильно исходному, если уравнение $h(x) = 0$ не имеет корней. Заметим, что обратное преобразование, т. е. переход от уравнения (4) к уравнению (3) путем деления обеих частей уравнения (4) на выражение $h(x)$, как правило, недопустимо, поскольку может привести к потере корней (в этом случае могут «потеряться» корни уравнения $h(x) = 0$). Например, уравнение $(x - 2)(x - 3) = 2(x - 3)$ имеет два корня: 3 и 4. Деление же обеих частей уравнения на $x-3$ приводит к уравнению $x-2=2$, имеющему только один корень 4; произошла потеря корня.

Снова возьмем уравнение (3) и возведем обе его части в квадрат. Получим уравнение

$$(f(x))^2=(g(x))^2, \tag{5}$$

корнями которого служат как корни уравнения (3), так и корни «постороннего» уравнения $f(x)=-g(x)$; уравнение (5) — следствие уравнения (3).

Например, уравнение $x-1=3$ имеет корень 4. Если обе части уравнения $x-1=3$ возвести в квадрат, то получится уравнение $(x-1)^2=9$, имеющее два корня: 4 и -2. Значит, уравнение $(x-1)^2=9$ — следствие уравнения $x-1=3$. При переходе от уравнения $x-1=3$ к уравнению $(x-1)^2=9$ появился посторонний корень $x=-2$.

Итак, *при возведении обеих частей уравнения в квадрат* (*и вообще в любую четную степень*) *получается уравнение, являющееся следствием исходного*. Значит, при указанном преобразовании возможно появление посторонних корней. Заметим, что возведение обеих частей уравнения в одну и ту же нечетную степень приводит к уравнению, равносильному данному.

143. Уравнения с переменной в знаменателе. Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{p(x)}{q(x)}=0. \tag{1}$$

Решение уравнения (1) основано на следующем утверждении: *дробь* $\frac{m}{n}$ *равна нулю тогда и только тогда, когда ее числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля* (на 0 делить нельзя!). Записывают это так:

$$\begin{cases} m = 0, \\ n \neq 0. \end{cases}$$

В соответствии со сказанным, решение уравнения $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$ проводится в два этапа: сначала нужно решить уравнение $p(x) = 0$, а затем для каждого его корня выяснить, обращается ли при найденном значении переменной x знаменатель $q(x)$ в нуль. Если $q(x) \neq 0$, то найденный корень уравнения $p(x) = 0$ является и корнем уравнения (1); если $q(x) = 0$, то полученный корень уравнения $p(x) = 0$ не является корнем уравнения (1).

Таким образом, уравнение $p(x) = 0$ является следствием (см. п. 142) уравнения $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$. При переходе от уравнения $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$ к уравнению $p(x) = 0$ (*освобождение от знаменателя*) могут появиться посторонние корни. Отсеять их можно с помощью условия $q(x) \neq 0$ (или с помощью непосредственной подстановки каждого корня уравнения $p(x) = 0$ в уравнение (1)).

П р и м е р. Решить уравнение $\frac{3x - 6}{x^2 - x - 2} = 0$.

Р е ш е н и е. Из уравнения $3x - 6 = 0$ находим $x = 2$. Так как при $x = 2$ знаменатель $x^2 - x - 2$ обращается в нуль, $x = 2$ — посторонний корень, а потому заданное уравнение не имеет корней.

144. Область определения уравнения (ОДЗ). *Областью определения уравнения* $f(x) = g(x)$ называют множество всех тех значений переменной x, при которых выражения $f(x)$ и $g(x)$ имеют смысл (одновременно).

П р и м е р 1. Найти область определения уравнения:

а) $x^2 - 5x = 1 + 2x$; в) $\sqrt{x} - \sqrt[4]{x-1} = \sqrt[6]{x-2}$;

б) $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} = 3$; г) $\log_3(x-3) = \log_3(5-x)$.

Р е ш е н и е. а) Выражения $x^2 - 5x$ и $1 + 2x$ определены при всех x. Значит, область определения уравнения — вся числовая прямая.

б) Выражение $\dfrac{x}{x-1}$ не определено при $x = 1$, а выражение $\dfrac{1}{x-2}$ не определено при $x = 2$. Значит, область определения уравнения можно задать условиями $x \neq 1$, $x \neq 2$.

в) Корень четной степени имеет смысл лишь при неотрицательных значениях подкоренного выражения. Значит, одновременно должны выполняться условия $x \geqslant 0$, $x - 1 \geqslant 0$ и $x - 2 \geqslant 0$. Все эти неравенства справедливы при $x \geqslant 2$, т. е. $[2; +\infty)$ — область определения уравнения.

г) Логарифм имеет смысл лишь при положительных значениях логарифмируемого выражения. Значит, должны одновременно выполняться два неравенства: $x - 3 > 0$, откуда $x > 3$, и $5 - x > 0$, откуда $x < 5$. Итак, $(3; 5)$ — область определения уравнения.

Вместо термина «область определения уравнения» часто используют термин «область допустимых значений переменной» (ОДЗ).

Ясно, что корни уравнения $f(x) = g(x)$ должны принадлежать его области определения (его ОДЗ). Но иногда бывает так, что в процессе преобразований уравнения его область определения меняется (чаще всего она расширяется) и из найденных значений переменной одни принадлежат области определения уравнения $f(x) = g(x)$, а другие не принадлежат. Тогда первые являются корнями уравнения, а вторые — нет (это посторонние корни).

Так, при решении уравнения $\frac{3x-6}{x^2-x-2} = 0$ (см. п. 143), область определения которого задается условием $x^2 - x - 2 \neq 0$, мы перешли к уравнению $3x - 6 = 0$, областью определения которого является вся числовая прямая (область определения расширилась). Уравнение $3x - 6 = 0$ имеет корень $x = 2$, который не принадлежит области определения исходного уравнения и, следовательно, является посторонним корнем.

Общий вывод таков: *если в процессе преобразований уравнения его область определения расширилась, то могут появиться посторонние корни*. Поэтому все найденные значения переменной надо проверить подстановкой в исходное уравнение или с помощью области определения (ОДЗ) исходного уравнения.

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$\lg(x-5) = \lg(2x-9). \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. Если $\lg a = \lg b$, то, в силу монотонности логарифмической функции, $a = b$ (если $a \neq b$, например $a < b$, то и $\lg a \neq \lg b$, а именно $\lg a < \lg b$). Значит, от заданного уравнения можно перейти к уравнению

$$x - 5 = 2x - 9, \qquad (2)$$

откуда находим $x = 4$. Но при переходе от уравнения (1) к уравнению (2) область определения расширилась: в уравнении (1) она задается неравенством $x > 5$, тогда как для уравнения (2) областью определения служит вся числовая прямая. Поэтому найденное значение $x = 4$, являющееся корнем уравнения (2), может оказаться посторонним корнем для уравнения (1). В данном случае именно это и происходит, поскольку $x = 4$ не принадлежит области определения уравнения (1) (не удовлетворяет неравенству $x > 5$). Итак, $x = 4$ — посторонний корень, т. е. заданное уравнение не имеет корней.

145. Рациональные уравнения. Уравнение $f(x) = g(x)$ называют *рациональным*, если $f(x)$ и $g(x)$ — рациональные выражения. При этом если $f(x)$ и $g(x)$ — целые выражения, то уравнение называют *целым*; если же хотя бы одно из выражений $f(x)$, $g(x)$ является дробным, то рациональное уравнение $f(x) = g(x)$ называют *дробным*.

Например, целыми являются линейные (см. п. 136), квадратные (см. п. 137) уравнения.

Чтобы решить рациональное уравнение, нужно:

1) найти общий знаменатель всех имеющихся дробей;

2) заменить данное уравнение целым, умножив обе его части на общий знаменатель;

3) решить полученное целое уравнение;

4) исключить из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель.

П р и м е р. Решить уравнение

$$\frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{x(2-x)}.$$

Р е ш е н и е. Общим знаменателем имеющихся дробей является $2x(2 - x)$. Найдя дополнительные множители для каждой дроби, освободимся от знаменателей. Имеем:

$$\frac{\overset{2x}{2}}{2-x}+\frac{\overset{x(2-x)}{1}}{2}=\frac{\overset{2}{4}}{x(2-x)};$$

$$4x+x(2-x)=8;$$

$$x^2-6x+8=0.$$

Из уравнения $x^2 - 6x + 8 = 0$ находим $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ (см. п. 137). Осталось проверить, обращают ли найденные корни выражение $2x(2 - x)$ в нуль, т. е. проверить выполнение условия $2x(2 - x) \neq 0$. Замечаем, что 2 не удовлетворяет этому условию, а 4 удовлетворяет. Значит, $x = 4$ — единственный корень уравнения.

146. Решение уравнения $p(x) = 0$ методом разложения его левой части на множители. Суть этого метода состоит в следующем. Пусть нужно решить уравнение $p(x) = 0$, где $p(x)$ — многочлен степени n. Предположим, что удалось разложить многочлен на множители: $p(x) = p_1(x)\, p_2(x)\, p_3(x)$, где $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ — многочлены более низкой степени, чем n. Тогда уравнение $p(x) = 0$ принимает вид $p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot p_3(x) = 0$. Если a — корень уравнения $p(x) = 0$, то $p_1(a) \cdot p_2(a) \cdot p_3(a) = 0$, а потому хотя бы одно из чисел $p_1(a)$, $p_2(a)$, $p_3(a)$ равно нулю.

Значит, a — корень хотя бы одного из уравнений

$$p_1(x)=0,\;\; p_2(x)=0,\;\; p_3(x)=0.$$

Верно и обратное: если b — корень хотя бы одного из уравнений $p_1(x) = 0$, $p_2(x) = 0$, $p_3(x) = 0$, то

b — корень уравнения $p_1(x)\,p_2(x)p_3(x) = 0$, т. е. уравнения $p\,(x) = 0$.

Итак, если $p\,(x) = p_1(x)\,p_2(x)\,p_3(x)$, где $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ — многочлены, то вместо уравнения $p(x) = 0$ нужно решить совокупность уравнений $p_1(x) = 0$, $p_2(x) = 0$, $p_3(x) = 0$. Все найденные корни этих уравнений, и только они, будут корнями уравнения $p(x) = 0$.

Пример 1. Решить уравнение $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0$.

Решение. Разложим на множители левую часть уравнения. Имеем $x^2\,(x + 2) + 3\,(x + 2) = 0$, откуда $(x + 2)(x^2 + 3) = 0$.

Значит, либо $x + 2 = 0$, либо $x^2 + 3 = 0$. Из первого уравнения находим $x = -2$, второе уравнение не имеет корней. Итак, получили ответ: -2.

Метод разложения на множители применим к любым уравнениям вида $p(x) = 0$, где $p(x)$ необязательно многочлен. Пусть $p(x) = p_1(x) \cdot p_2\,(x) \cdot p_3(x)$, но среди выражений $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ есть выражения более сложного вида, чем многочлены (например, иррациональные, логарифмические и т. д.). Среди корней уравнений $p_1(x) = 0$, $p_2(x) = 0$, $p_3(x) = 0$ могут быть посторонние для уравнения $p(x) = 0$.

Пример 2. Решить уравнение $x^2\sqrt{x} - 9\sqrt{x} = 0$.

Решение. Имеем $\sqrt{x}\,(x^2 - 9) = 0$; значит, либо $\sqrt{x} = 0$, либо $x^2 - 9 = 0$. Из уравнения $\sqrt{x} = 0$ находим $x = 0$, из уравнения $x^2 - 9 = 0$ находим $x = \pm 3$.

Но $x = -3$ не удовлетворяет исходному уравнению, так как при этом значении не определено выражение $\sqrt{x}$. Это посторонний корень.

Итак, уравнение имеет два корня: 3; 0.

147. Решение уравнений методом введения новой переменной. Суть этого метода поясним на примерах.

Пример 1. Решить уравнение

$$(x^2 - 3x)^2 + 3(x^2 - 3x) - 28 = 0.$$

Решение. Положив $x^2 - 3x = y$, получим уравнение

$$y^2 + 3y - 28 = 0,$$

откуда находим $y_1 = -7$, $y_2 = 4$. Теперь задача сводится к решению совокупности уравнений

$$x^2 - 3x = -7; \qquad x^2 - 3x = 4, \text{ т. е.}$$

$$x^2 - 3x + 7 = 0; \quad x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Первое квадратное уравнение не имеет действительных корней, так как его дискриминант отрицателен.

Из второго квадратного уравнения находим $x_1 = 4$, $x_2 = -1$. Это корни заданного уравнения.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{24}{x^2 + 2x - 8} - \frac{15}{x^2 + 2x - 3} = 2.$$

Решение. Положим $x^2 + 2x - 3 = y$, тогда

$$x^2 + 2x - 8 = (x^2 + 2x - 3) - 5 = y - 5$$

и уравнение примет вид

$$\frac{24}{y - 5} - \frac{15}{y} = 2.$$

Решив это уравнение (см. п. 145), получим

$$y_1 = 12{,}5, \qquad y_2 = -3.$$

Но $y = x^2 + 2x - 3$. Значит, нам остается решить совокупность уравнений

$$x^2 + 2x - 3 = 12,5; \quad x^2 + 2x - 3 = -3,$$

или

$$x^2 + 2x - 15,5 = 0; \quad x^2 + 2x = 0.$$

Из первого уравнения находим $x_1 = \frac{-2 + \sqrt{66}}{2}$, $x_2 = \frac{-2 - \sqrt{66}}{2}$; из второго уравнения получаем $x_3 = 0$, $x_4 = -2$. Тем самым найдены четыре корня заданного уравнения.

148. Биквадратные уравнения. *Биквадратным уравнением* называют уравнение вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \text{ где } a \neq 0.$$

Биквадратное уравнение решается методом введения новой переменной: положив $x^2 = y$, придем к квадратному уравнению $ay^2 + by + c = 0$.

Пример. Решить уравнение $x^4 + 4x^2 - 21 = 0$.

Решение. Положив $x^2 = y$, получим квадратное уравнение $y^2 + 4y - 21 = 0$, откуда находим $y_1 = -7$, $y_2 = 3$. Теперь задача сводится к решению совокупности уравнений $x^2 = -7$; $x^2 = 3$. Первое уравнение не имеет действительных корней, из второго находим $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$. Это — корни заданного биквадратного уравнения.

149. Решение задач с помощью составления уравнений. С помощью уравнений решаются многочисленные задачи, к которым приводят самые разнообразные вопросы физики, механики, экономики и т. д. Прежде всего напомним общий порядок решения задач с помощью уравнений.

1) Вводят переменные, т. е. буквами x, y, z обозначают неизвестные величины, которые либо требуется найти в задаче, либо они необходимы для отыскания искомых величин.

2) С помощью введенных переменных и данных в задаче чисел и их соотношений составляют систему уравнений (или одно уравнение).

3) Решают составленную систему уравнений (или уравнение) и из полученных решений отбирают те, которые подходят по смыслу задачи.

4) Если буквами x, y, z обозначили не искомые величины, то с помощью полученных решений находят ответ на вопрос задачи.

З а д а ч а 1. Для перевозки 60 т груза из одного места в другое затребовали некоторое количество машин. Ввиду неисправности дороги на каждую машину пришлось грузить на 0,5 т меньше, чем предполагалось, поэтому дополнительно потребовались 4 машины. Какое количество машин было затребовано первоначально?

Р е ш е н и е. Обозначим через x количество машин, затребованных первоначально. Тогда на самом деле было вызвано $(x + 4)$ машин. Так как надо было перевезти 60 т груза, то предполагалось, что на одну машину будут грузить $\frac{60}{x}$ т груза, а на самом деле грузили $\frac{60}{x+4}$ т груза, что на 0,5 т меньше, чем предполагалось. В результате мы приходим к уравнению

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+4} = 0{,}5.$$

Это уравнение имеет два корня: $x = -24$, $x = 20$. Ясно, что по смыслу задачи значение $x = -24$ не подходит. Таким образом, первоначально было затребовано 20 машин.

З а д а ч а 2. Моторная лодка, движущаяся со скоростью 20 км/ч, прошла расстояние между двумя пунктами по реке туда и обратно без остановок за 6 ч 15 мин. Расстояние между пунктами равно 60 км. Найти скорость течения реки.

Р е ш е н и е. Пусть x км/ч — скорость течения реки. Тогда лодка, собственная скорость которой 20 км/ч, идет по течению со скоростью $(20 + x)$ км/ч, а против течения — со скоростью $(20 - x)$ км/ч. Время, за которое лодка пройдет путь между пунктами по течению, составит $\frac{60}{20+x}$ ч, а время, за которое лодка пройдет обратный путь, составит $\frac{60}{20-x}$ ч. Так как путь туда и обратно лодка проходит за 6 ч 15 мин, т. е. $\frac{25}{4}$ ч, приходим к уравнению

$$\frac{60}{20+x} + \frac{60}{20-x} = \frac{25}{4},$$

решив которое, находим два корня: $x = 4$, $x = -4$. Ясно, что значение $x = -4$ не подходит по смыслу задачи. Итак, скорость течения реки равна 4 км/ч.

З а д а ч а 3. Найти двузначное число, зная, что цифра его единиц на 2 больше цифры десятков и что произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144.

Р е ш е н и е. Напомним, что любое двузначное число может быть записано в виде $10x + y$, где x — цифра десятков, а y — цифра единиц. Согласно условию, если x — цифра десятков, то цифра единиц равна $x + 2$ и мы получаем

$$(10x+(x+2))(x+(x+2))=144.$$

Решив это уравнение, найдем $x_1 = 2$, $x_2 = -3\frac{2}{11}$. Второй корень не подходит по смыслу задачи.

Итак, цифра десятков равна 2, цифра единиц равна 4; значит, искомое число равно 24.

З а д а ч а 4. Двое рабочих, работая вместе, выполнили некоторую работу за 6 ч. Первый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу на 5 ч скорее, чем второй рабочий, если последний будет работать отдельно. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу?

Р е ш е н и е. Производительность труда, т. е. часть работы, выполняемая в единицу времени (обозначим ее через A), и время, необходимое для выполнения всей работы (обозначим его через t), — взаимно обратные величины, т. е. $At = 1$. Поэтому если обозначить через x ч время, необходимое для выполнения всей работы первому рабочему, а через $(x + 5)$ ч — второму, то часть работы, выполняемая первым рабочим за 1 ч, равна $\frac{1}{x}$, а часть работы, выполняемая вторым рабочим за 1 ч, равна $\frac{1}{x+5}$. Согласно условию, они, работая вместе, выполнили всю работу за 6 ч. Доля работы, выполненная за 6 ч первым рабочим, есть $\frac{6}{x}$, а доля работы, выполненная за 6 ч вторым рабочим, есть $\frac{6}{x+5}$. Так как вместе они выполнили всю работу, т. е. доля выполненной работы равна 1, получаем уравнение

$$\frac{6}{x} + \frac{6}{x+5} = 1,$$

решив которое, найдем $x = 10$.

Итак, первый рабочий может выполнить всю работу за 10 ч, а второй — за 15 ч.

З а д а ч а 5. Из сосуда емкостью 54 л, наполненного кислотой, вылили несколько литров и долили сосуд водой, потом опять вылили столько же литров смеси. Тогда в оставшейся в сосуде смеси оказалось 24 л чистой кислоты. Сколько кислоты вылили в первый раз?

Р е ш е н и е. Пусть в первый раз было вылито x л кислоты. Тогда в сосуде осталось $(54 - x)$ л кислоты. Долив сосуд водой, получили 54 л смеси, в которой растворилось $(54 - x)$ л кислоты. Значит, в 1 л смеси содержится $\frac{54-x}{54}$ л кислоты (концентрация раствора). Во второй раз из сосуда вылили x л смеси, в этом количестве смеси содержалось $\frac{54-x}{54} \cdot x$ л кислоты. Таким образом, в первый раз было вылито x л кислоты, во второй $\frac{54-x}{54} \cdot x$ л кислоты, а всего за два раза вылито $54 - 24 = 30$ л кислоты. В результате приходим к уравнению

$$x + \frac{54 - x}{54} \cdot x = 30.$$

Решив это уравнение, найдем два корня: $x_1 = 90$ и $x_2 = 18$. Ясно, что значение 90 не удовлетворяет условию задачи.

Итак, в первый раз было вылито 18 л кислоты.

Задача 6. Имеется кусок сплава меди с оловом массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску, чтобы получившийся новый сплав содержал 40% меди?

Решение. Пусть масса добавленного олова составляет x кг. Тогда получится сплав массой $(12 + x)$ кг, содержащий 40% меди. Значит, в новом сплаве имеется $0{,}4(12 + x)$ кг меди. Исходный сплав массой 12 кг содержал 45% меди, т. е. меди в нем было $0{,}45 \cdot 12$ кг. Так как масса меди и в имевшемся, и в новом сплаве одна и та же, приходим к уравнению

$$0{,}4\,(12 + x) = 0{,}45 \cdot 12.$$

Решив это уравнение, получим $x = 1{,}5$. Таким образом, к исходному сплаву надо добавить 1,5 кг олова.

Задача 7. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько стали того и другого сорта надо взять, чтобы после переплавки получить 140 т стали с содержанием никеля 30%?

Решение. Пусть масса стали первого сорта равна x т, тогда стали второго сорта надо взять $(140 - x)$ т. Содержание никеля в стали первого сорта составляет 5%; значит, в x т стали первого сорта содержится $0{,}05x$ т никеля. Содержание никеля в стали второго сорта составляет 40%; значит, в $(140 - x)$ т стали второго сорта содержится $0{,}4\,(140 - x)$ т никеля. По условию после соединения взятых двух сортов должно получиться 140 т стали с 30%-ным содержанием никеля, т. е. после переплавки в полученной стали должно быть $0{,}3 \cdot 140$ т никеля. Но это количество никеля складывается из $0{,}05x$ т, содержащихся в стали первого сорта, и из $0{,}4\,(140 - x)$ т, содержащихся в стали второго сорта. Таким образом, приходим к уравнению

$$0{,}05x + 0{,}4\,(140 - x) = 0{,}3 \cdot 140,$$

из которого находим $x = 40$. Следовательно, надо взять 40 т стали с 5%-ным и 100 т стали с 40%-ным содержанием никеля.

150. Иррациональные уравнения. *Иррациональным* называют уравнение, в котором переменная содержится под знаком радикала или под знаком возведения в дробную степень. Например, иррациональными являются уравнения $\sqrt{x-2} = 2x - 1$, $x^{\frac{1}{3}} - 5 = 0$.

Используются два основных метода решения иррациональных уравнений:

1) метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень;

2) метод введения новых переменных (см. п. 147).

Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень состоит в следующем:

а) преобразуют заданное иррациональное уравнение к виду

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)};$$

б) возводят обе части полученного уравнения в n-ю степень:

$$\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^n = \left(\sqrt[n]{g(x)}\right)^n;$$

в) учитывая, что $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, получают уравнение

$$f(x) = g(x);$$

г) решают уравнение и, в случае четного n, делают проверку, так как возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень может привести к появлению посторонних корней (см. п. 142). Эта проверка чаще всего осуществляется с помощью подстановки найденных значений переменной в исходное уравнение.

П р и м е р 1. Решить уравнение $\sqrt[6]{x-3} = 2$.

Р е ш е н и е. Возведем обе части уравнения в шестую степень; получим $x - 3 = 64$, откуда $x = 67$.

П р о в е р к а. Подставив 67 вместо x в данное уравнение, получим $\sqrt[6]{67-3} = 2$, т. е. $2 = 2$ — верное равенство.

О т в е т: 67.

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+6} = 6.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем уравнение к виду

$$\sqrt{2x+6} = 6 - \sqrt{x-1}$$

и возведем обе части его в квадрат. Получим

$$\left(\sqrt{2x+6}\right)^2 = \left(6 - \sqrt{x-1}\right)^2;$$

далее,

$$2x + 6 = 36 - 12\sqrt{x-1} + x - 1,$$

$$12\sqrt{x-1} = 29 - x.$$

Еще раз возведем обе части уравнения в квадрат:

$$144(x-1)=(29-x)^2, \text{ т. е. } x^2-202x+985=0,$$

откуда $x_1 = 5$, $x_2 = 197$.

П р о в е р к а. 1) При $x = 5$ имеем

$$\sqrt{5-1}+\sqrt{2\cdot 5+6}=6 \text{ — верное равенство.}$$

Таким образом, $x = 5$ является корнем заданного уравнения.

2) При $x = 197$ имеем $\sqrt{197-1}+\sqrt{2\cdot 197+6}\neq 6$. Таким образом, $x = 197$ — посторонний корень.

О т в е т: 5.

П р и м е р 3. Решить уравнение

$$(x-2)^{\frac{2}{5}}-(x-2)^{\frac{1}{5}}=2.$$

Р е ш е н и е. Применим метод введения новой переменной.

Положим $y=(x-2)^{\frac{1}{5}}$. Тогда $(x-2)^{\frac{2}{5}}=y^2$, и мы получаем уравнение $y^2-y-2=0$, откуда находим $y_1 = 2$, $y_2 = -1$.

Теперь задача свелась к решению совокупности уравнений

$$(x-2)^{\frac{1}{5}}=2; \quad (x-2)^{\frac{1}{5}}=-1.$$

Возведя обе части уравнения $(x-2)^{\frac{1}{5}}=2$ в пятую степень, получим $x-2=32$, откуда $x = 34$.

Уравнение $(x-2)^{\frac{1}{5}}=-1$ не имеет корней, поскольку под знаком возведения в дробную степень может содержаться только неотрицательное число, а любая степень неотрицательного числа неотрицательна.

О т в е т: 34.

151. Показательные уравнения. *Показательное* уравнение вида

$$a^{f(x)} = a^{g(x)},$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Имеются два основных метода решения показательных уравнений:

1) метод уравнивания показателей, т. е. преобразование заданного уравнения к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, а затем к виду $f(x) = g(x)$;

2) метод введения новой переменной.

П р и м е р 1. Решить уравнение $2^{3x^2+3} = 2^{10x}$.

Р е ш е н и е. Данное уравнение равносильно уравнению $3x^2 + 3 = 10x$, откуда находим $3x^2 - 10x + 3 = 0$. Решив это квадратное уравнение, получим $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$\frac{(0{,}2)^{x-0{,}5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0{,}04^{x-1}.$$

Р е ш е н и е. Приведем все степени к одному основанию $\frac{1}{5}$. Получим уравнение $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-0{,}5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{0{,}5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\left(\frac{1}{5}\right)^{2}\right)^{x-1}$, которое преобразуем к виду $\left(\frac{1}{5}\right)^{x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x-3}$. Уравнение равносильно уравнению $x = 2x - 3$, откуда находим $x = 3$.

Пример 3. Решить уравнение $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$.

Решение. Применим метод введения новой переменной. Так как $4^x = (2^x)^2$, $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$, то данное уравнение можно переписать в виде

$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0.$$

Введем новую переменную, положив $2^x = y$. Получим квадратное уравнение $y^2 + 2y - 24 = 0$ с корнями $y_1 = 4$, $y_2 = -6$. Теперь задача сводится к решению совокупности уравнений $2^x = 4$, $2^x = -6$.

Из первого уравнения находим $x = 2$. Второе уравнение не имеет корней, так как $2^x > 0$ при любых значениях x.

Ответ: 2.

152. Логарифмические уравнения. Чтобы решить *логарифмическое уравнение* вида

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \qquad (1)$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, нужно:

1) решить уравнение $f(x) = g(x)$;

2) из найденных корней отобрать те, которые удовлетворяют неравенствам $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$; остальные корни уравнения $f(x) = g(x)$ являются посторонними для уравнения (1).

Имеются два основных метода решения логарифмических уравнений:

1) метод, заключающийся в преобразовании уравнения к виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, затем к виду $f(x) = g(x)$;

2) метод введения новой переменной.

П р и м е р 1. Решить уравнение

$$\log_3(x^2 - 3x - 5) = \log_3(7 - 2x).$$

Р е ш е н и е. Перейдем от заданного уравнения к уравнению $x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x$ и решим его. Имеем $x^2 - x - 12 = 0$, откуда $x_1 = -3$, $x_2 = 4$. Проверку найденных значений x выполним с помощью неравенств $x^2 - 3x - 5 > 0$ и $7 - 2x > 0$. Число -3 этим неравенствам удовлетворяет, а число 4 — нет. Значит, 4 — посторонний корень.

О т в е т: -3.

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$\lg(x + 4) + \lg(2x + 3) = \lg(1 - 2x).$$

Р е ш е н и е. Воспользовавшись тем, что сумма логарифмов равна логарифму произведения (см. п. 120), преобразуем уравнение к виду

$$\lg(x + 4)(2x + 3) = \lg(1 - 2x)$$

и далее

$$(x + 4)(2x + 3) = 1 - 2x.$$

Из последнего уравнения находим $x_1 = -1$, $x_2 = -5{,}5$.

Осталось сделать проверку. Ее можно выполнить с помощью системы неравенств

$$\begin{cases} x + 4 > 0, \\ 2x + 3 > 0, \\ 1 - 2x > 0. \end{cases}$$

Подставив поочередно найденные значения -1 и $-5{,}5$ в эти неравенства, убеждаемся, что -1 удовлетворяет всем неравенствам, а $-5{,}5$ — нет, например при этом значении не выполняется первое неравенство. Значит, $-5{,}5$ — посторонний корень.

Ответ: -1.

Пример 3. Решить уравнение

$$\log_2^2 x + \log_2 x + 1 = \frac{7}{\log_2 0{,}5x}.$$

Решение. Так как $\log_2 0{,}5x = \log_2 x + \log_2 0{,}5 = \log_2 x - 1$, заданное уравнение можно переписать следующим образом:

$$\log_2^2 x + \log_2 x + 1 = \frac{7}{\log_2 x - 1}.$$

Введем новую переменную, положив $\log_2 x = y$. Получим

$$y^2 + y + 1 = \frac{7}{y-1}$$

и далее

$$(y-1)(y^2+y+1) = 7;\ y^3 - 1 = 7;\ y^3 = 8;\ y = 2.$$

Но $y = \log_2 x$; из уравнения $\log_2 x = 2$ находим $x = 4$.

Ответ: 4.

153. Примеры решения показательно-логарифмических уравнений.

Пример 1. Решить уравнение

$$x^{1-\lg x} = 0{,}01. \tag{1}$$

Решение. Область определения уравнения: $x > 0$. При этом условии выражения, входящие в обе части уравнения (1), принимают только положительные значения. Прологарифмировав обе части уравнения (1) по основанию 10, получим уравнение

$$\lg x^{1-\lg x} = \lg 0{,}01,$$

равносильное уравнению (1). Далее имеем $(1 - \lg x) \times \lg x = -2$.

Полагая $u = \lg x$, получим уравнение $(1 - u)\,u = -2$, откуда $u_1 = -1$, $u_2 = 2$. Остается решить совокупность уравнений $\lg x = -1$, $\lg x = 2$. Из этой совокупности получим $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 100$ — корни уравнения (1).

Здесь применен *метод логарифмирования*, заключающийся в переходе от уравнения $f(x) = g(x)$ к уравнению

$$\log_a f(x) = \log_a g(x).$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\log_x (3x^{\log_5 x} + 4) = 2\log_5 x. \qquad (2)$$

Решение. Воспользовавшись определением логарифма, преобразуем уравнение (2) к виду

$$x^{2\log_5 x} = 3x^{\log_5 x} + 4.$$

Полагая $u = x^{\log_5 x}$, получим уравнение $u^2 - 3u - 4 = 0$, корнями которого являются $u_1 = -1$, $u_2 = 4$.

Теперь задача сводится к решению совокупности уравнений

$$x^{\log_5 x} = -1; \quad x^{\log_5 x} = 4.$$

Так как $x^{\log_5 x} > 0$, а $-1 < 0$, первое уравнение совокупности не имеет решения. Прологарифмировав обе части второго уравнения совокупности по основанию 5, получим

$$\log_5^2 x = \log_5 4,\ \text{т. е. } \log_5 x = \pm\sqrt{\log_5 4},$$

откуда находим $x_{1,2} = 5^{\pm\sqrt{\log_5 4}}$ — корни уравнения (2).

154. Простейшие тригонометрические уравнения. Уравнение $\sin x = a$, где $|a| \leqslant 1$, имеет бесконечно много корней. Например, уравнению $\sin x = \frac{1}{2}$ удовлетворяют следующие значения: $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$, $x_3 = \frac{\pi}{6} + 2\pi$, $x_4 = \frac{\pi}{6} - 2\pi$, $x_5 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi$, $x_6 = \frac{5\pi}{6} - 2\pi$ и т. д. Общая формула, по которой находят все корни уравнения $\sin x = a$, где $|a| \leqslant 1$, такова:

$$\boldsymbol{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n.} \qquad (1)$$

Здесь n может принимать любые целые значения, каждому из них соответствует определенный корень уравнения; в этой формуле (равно как и в других формулах, по которым решаются простейшие тригонометрические уравнения) n называют *параметром*. Записывают обычно $n \in \mathbf{Z}$, подчеркивая тем самым, что параметр n может принимать любые целые значения.

Решения уравнения $\cos x = a$, где $|a| \leqslant 1$, находят по формуле

$$\boldsymbol{x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z.} \qquad (2)$$

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ решается по формуле

$$\boldsymbol{x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z,} \qquad (3)$$

а уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ — по формуле

$$\boldsymbol{x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z.} \qquad (4)$$

Пример 1. Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

Решение. По формуле (1) имеем

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Так как $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ (см. п. 106), то $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2. Решить уравнение $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Воспользовавшись формулой (2), получим

$$3x = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Так как $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ (см. п. 107), то получаем

$$3x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,$$

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 3. Решить уравнение $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2$.

Решение. Воспользовавшись формулой (3), получим

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,$$

откуда находим

$$x = 2\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Заметим, что в некоторых случаях удобнее пользоваться частными формулами:

1) $\sin x = 0$; $x = \pi n$.

2) $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

3) $\sin x = -1$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

4) $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

5) $\cos x = 1$; $x = 2\pi n$.

6) $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n$.

7) $\operatorname{tg} x = 0$; $x = \pi n$.

8) $\operatorname{ctg} x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Во всех формулах n — любое целое число.

155. Методы решения тригонометрических уравнений.

Имеются два основных метода решения тригонометрических уравнений:

1) метод разложения на множители;

2) метод введения новой переменной.

П р и м е р 1. Решить уравнение

$$\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1.$$

Р е ш е н и е. Перенесем 1 в левую часть и, выполнив преобразования левой части, разложим ее на множители.

Применим к $\sin 5x + \sin x$ формулу для суммы синусов (см. п. 130) и воспользуемся тем, что $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ (см. п. 129). Тогда уравнение примет вид $2\sin 3x \cos 2x + (1 - \cos 2x) - 1 = 0$ и далее $\cos 2x \times (2\sin 3x - 1) = 0$. Теперь задача свелась к решению совокупности уравнений $\cos 2x = 0$; $2\sin 3x - 1 = 0$.

Из уравнения $\cos 2x = 0$ находим $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, т. е.

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Из уравнения $2\sin 3x - 1 = 0$ находим $\sin 3x = \frac{1}{2}$ и далее

$$3x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k,$$

$$3x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbf{Z}.$$

Таким образом, решения заданного уравнения таковы:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, n \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}.$$

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$2\cos^2 x + 14\cos x = 3\sin^2 x.$$

Р е ш е н и е. Так как $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, уравнение можно переписать следующим образом:

$$2\cos^2 x + 14\cos x - 3(1 - \cos^2 x) = 0$$

и далее $5\cos^2 x + 14\cos x - 3 = 0$.

Положив $\cos x = y$, получим квадратное уравнение $5y^2 + 14y - 3 = 0$. Решив это уравнение, получим $y_1 = \frac{1}{5}$, $y_2 = -3$. Значит, либо $\cos x = \frac{1}{5}$, откуда находим $x = \pm\arccos\frac{1}{5} + 2\pi n$, либо $\cos x = -3$ — это уравнение не имеет решений, так как $|\cos x| \leqslant 1$.

О т в е т: $x = \pm\arccos\frac{1}{5} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

156. Однородные тригонометрические уравнения. *Однородными тригонометрическими уравнениями* называют уравнения вида

$$a \sin x + b \cos x = 0$$

(однородное уравнение 1-й степени),

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

(однородное уравнение 2-й степени).

Рассмотрим случай, когда $a \neq 0$. Разделим обе части первого уравнения на $\cos x$, а обе части второго уравнения на $\cos^2 x$. В результате получим следующие уравнения, алгебраические относительно $\operatorname{tg} x$, а потому решаемые подстановкой $\operatorname{tg} x = y$:

$$a \operatorname{tg} x + b = 0,$$

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0.$$

При $a \neq 0$ однородному уравнению не удовлетворяют те значения x, при которых $\cos x = 0$. Поэтому деление на $\cos x$ (или $\cos^2 x$) обеих частей однородного уравнения в случае $a \neq 0$ не приводит к потере корней.

П р и м е р 1. Решить уравнение

$$8 \sin x - 7 \cos x = 0.$$

Р е ш е н и е. Разделив обе части уравнения почленно на $\cos x$, получим $8 \operatorname{tg} x - 7 = 0$. Далее имеем $\operatorname{tg} x = \frac{7}{8}$, откуда

$$x = \operatorname{arctg} \frac{7}{8} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0.$$

Р е ш е н и е. Разделив обе части этого однородного уравнения второй степени на $\cos^2 x$, получим $\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$. Далее положим $u = \operatorname{tg} x$, тогда приходим к квадратному уравнению

$$u^2 + 2u - 3 = 0, \text{ откуда } \quad u_1 = -3, u_2 = 1.$$

Решив совокупность уравнений $\operatorname{tg} x = -3$, $\operatorname{tg} x = 1$, получим

$$x = \operatorname{arctg}(-3) + \pi k; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, k \in \boldsymbol{Z}, n \in \boldsymbol{Z}.$$

П р и м е р 3. Решить уравнение

$$5 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 5.$$

Р е ш е н и е.

$$5 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 5 (\sin^2 x + \cos^2 x);$$

$$\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 0. \qquad (1)$$

В полученном уравнении отсутствует член вида $a \sin^2 x$, т. е. $a = 0$. Здесь делить обе части уравнения на $\cos^2 x$ нельзя, так как те значения x, при которых $\cos^2 x = 0$, удовлетворяют уравнению (1), а потому деление на $\cos^2 x$ приведет к потере корней. Поступим иначе: разложив левую часть уравнения (1) на множители, получим $\cos x (\sqrt{3} \sin x + \cos x) = 0$.

Теперь задача сводится к решению совокупности уравнений

$$\cos x = 0; \quad \sqrt{3} \sin x + \cos x = 0. \qquad (2)$$

Из первого уравнения совокупности (2) находим $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Разделив обе части однородного уравнения первой степени $\sqrt{3}\,\sin x + \cos x = 0$ на $\cos x$, получим $\sqrt{3}\,\operatorname{tg} x + 1 = 0$, откуда

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n,$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Итак, получаем две серии решений:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ k \in \boldsymbol{Z},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

157*. Универсальная подстановка (для тригонометрических уравнений). Если $x \neq \pi + 2\pi n$, то справедливы следующие тождества:

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}. \qquad (1)$$

В самом деле,

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos x,$$

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2 \cdot \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin x.$$

Итак, $\sin x$ и $\cos x$ (а значит, и $\operatorname{tg} x$, и $\operatorname{ctg} x$) рационально выражаются через $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, поэтому подстановку $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u$ называют *универсальной*. Она может быть использована в уравнениях вида $R(\sin x; \cos x) = 0$, где $R(\sin x; \cos x)$ — рациональное выражение относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Поскольку использование универсальной подстановки возможно лишь при $x \neq \pi + 2\pi n$, нужно проверять, не являются ли числа вида $x = \pi + 2\pi n$ решениями заданного уравнения.

Пример 1. Решить уравнение

$$3 \sin x + 4 \cos x = 5.$$

Решение. Выразив $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ по формулам (1) и введя новую переменную $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u$, придем к рациональному уравнению

$$3 \cdot \frac{2u}{1+u^2} + 4 \cdot \frac{1-u^2}{1+u^2} = 5.$$

Решив это уравнение, получим $u = \frac{1}{3}$. Из уравнения $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$ находим

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, \text{ т. е. } x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Проверкой убеждаемся, что значения $x = \pi + 2\pi n$ не удовлетворяют заданному уравнению.

Ответ: $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$3\sin 2x + \cos 2x + 1 = 0.$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся универсальной подстановкой. Выразив $\sin 2x$ и $\cos 2x$ через $\operatorname{tg} x$ и введя новую переменную $\operatorname{tg} x = u$, получим рациональное уравнение

$$\frac{6u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2} + 1 = 0,$$

откуда $u = -\frac{1}{3}$. Из уравнения $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}$ находим

$$x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Нужно еще проверить, не удовлетворяют ли заданному уравнению те значения x, при которых $2x = \pi + 2\pi n$, т. е. значения $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Подставив $\frac{\pi}{2} + \pi n$ вместо x в выражение $3\sin 2x + \cos 2x + 1$, получим

$$3\sin(\pi + 2\pi n) + \cos(\pi + 2\pi n) + 1 =$$
$$= 3\sin\pi + \cos\pi + 1 = 3\cdot 0 - 1 + 1 = 0.$$

Таким образом, значения $\frac{\pi}{2} + \pi n$ являются решениями заданного уравнения.

О т в е т: $x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k;\quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ k \in \boldsymbol{Z},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

158*. Метод введения вспомогательного аргумента (для тригонометрических уравнений). Иногда при решении тригонометрических уравнений оказывается полезным заменить выражение $a \cos x + b \sin x$ на $A \sin (x + \varphi)$, где $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (см. п. 132). В этом случае φ называют *вспомогательным аргументом*.

П р и м е р 1. Решить уравнение

$$8 \cos x + 15 \sin x = 17.$$

Р е ш е н и е. Разделив обе части уравнения на $\sqrt{8^2 + 15^2} = 17$, получим

$$\frac{8}{17} \cos x + \frac{15}{17} \sin x = 1. \qquad (1)$$

Так как $\left(\frac{8}{17}\right)^2 + \left(\frac{15}{17}\right)^2 = 1$, существует такое φ, что $\frac{8}{17} = \sin \varphi$ и $\frac{15}{17} = \cos \varphi$. Перепишем уравнение (1) в виде

$$\sin \varphi \cos x + \sin x \cos \varphi = 1.$$

Но $\sin \varphi \cos x + \sin x \cos \varphi = \sin (x + \varphi)$. Значит, $\sin (x + \varphi) = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n - \varphi$. Так как $\varphi = \arcsin \frac{8}{17}$, получаем следующие решения заданного уравнения:

$$x = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{8}{17} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$5 \sin x - 12 \cos x + 13 \sin 3x = 0.$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\sqrt{5^2+12^2}\left(\frac{5}{\sqrt{5^2+12^2}}\sin x-\frac{12}{\sqrt{5^2+12^2}}\cos x\right)=$$
$$=-13\sin 3x,$$

$$\frac{5}{13}\sin x-\frac{12}{13}\cos x=-\sin 3x.$$

Полагая $\frac{5}{13}=\cos\varphi$, $\frac{12}{13}=\sin\varphi$, получим

$$\sin x\cos\varphi-\cos x\sin\varphi=-\sin 3x$$

и далее

$$\sin(x-\varphi)+\sin 3x=0;\ 2\sin\left(2x-\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\varphi}{2}\right)=0.$$

Решив совокупность уравнений $\sin\left(2x-\frac{\varphi}{2}\right)=0$; $\cos\left(x+\frac{\varphi}{2}\right)=0$, получим $x=\frac{\varphi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}+\pi k$.

Учтя, что $\varphi=\arccos\frac{5}{13}$, получаем

$$x=\frac{1}{4}\arccos\frac{5}{13}+\frac{\pi n}{2},\ x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{13}+\pi k,$$
$$n\in\boldsymbol{Z},\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

159. Графическое решение уравнений. На практике довольно часто оказывается полезным *графический метод* решения уравнений. Он заключается в следующем: для решения уравнения $f(x)=0$ строят график функции $y = f(x)$ и находят абсциссы точек пересечения графика с осью x; эти абсциссы и являются корнями уравнения. Так, для решения уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ достаточно построить график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ и найти абсциссы точек пересечения этого графика с осью x.

Например, график функции $y = -x^2 + 6x - 5$ (см. рис. 1.88) пересекает ось x в точках (1; 0) и (5; 0); значит, уравнение $-x^2 + 6x - 5 = 0$ имеет два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = 5$. График функции $y = x^2 - 4x + 5$ (см. рис. 1.87) не пересекает ось абсцисс; значит, уравнение $x^2 - 4x + 5 = 0$ не имеет действительных корней.

Часто уравнение $f(x) = 0$ заменяют равносильным уравнением $g(x) = h(x)$, затем строят графики функций $y = g(x)$ и $y = h(x)$ (если это проще, чем построение графика функции $y = f(x)$) и находят абсциссы точек пересечения построенных графиков.

Так, для решения уравнения $x^3 - 3x + 1 = 0$ можно преобразовать уравнение к виду $x^3 = 3x - 1$, затем построить графики функций $y = x^3$ и $y = 3x - 1$ и найти абсциссы точек пересечения этих графиков.

П р и м е р 1. Решить графически уравнение

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Р е ш е н и е. Уравнение целесообразно переписать в виде

$$x^2 = x + 2.$$

Теперь решение уравнения может быть сведено к нахождению абсцисс точек пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = x + 2$.

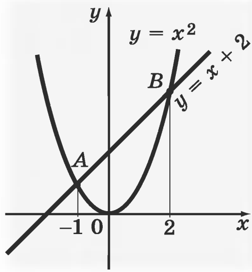


Рис. 1.100

На рисунке 1.100 построены в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = x + 2$. Определяем абсциссы точек A и B пересечения этих графиков: $x_A = -1$, $x_B = 2$. Таким образом, заданное уравнение имеет два корня: -1; 2.

П р и м е р 2. Решить уравнение $\sqrt{x} = |x - 2|$.

Р е ш е н и е. Построим в одной системе координат графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = |x - 2|$. График функции $y = \sqrt{x}$ изображен на рисунке 1.101. Чтобы построить график функции $y = |x - 2|$, рассмотрим два случая: если $x \geqslant 2$, то $x - 2 \geqslant 0$ и потому $|x - 2| = x - 2$; если же $x < 2$, то $x - 2 < 0$ и потому $|x - 2| = 2 - x$. Таким образом, запись $y = |x - 2|$ эквивалентна записи

$$y = \begin{cases} x - 2, \text{ если } x \geqslant 2, \\ 2 - x, \text{ если } x < 2. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке 1.102. На рисунке 1.103, оба графика изображены

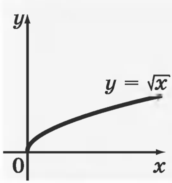


Рис. 1.101

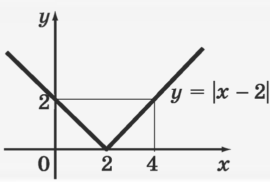


Рис. 1.102

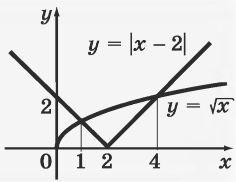


Рис. 1.103

в одной системе координат. Они пересекаются в двух точках с абсциссами $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Это два корня данного уравнения.

С графическим методом решения уравнения $f(x) = g(x)$ связан *функциональный метод* решения уравнения, основанный на том, что если одна из функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ возрастает, а другая убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ либо не имеет корней (рис. 1.104), либо имеет единственный корень (рис. 1.105).

Пример 3. Решить уравнение $2^x = 6 - x$.

Решение. Легко заметить, что $x = 2$ — корень уравнения. Так как функция $y = 2^x$ возрастает, а функция $y = 6 - x$ убывает, то других корней это уравнение не имеет (рис. 1.106).

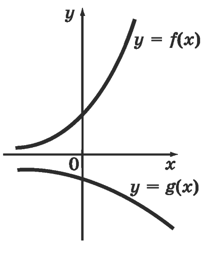


Рис. 1.104

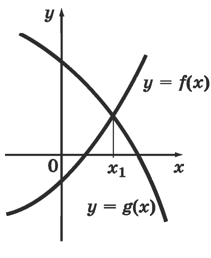


Рис. 1.105

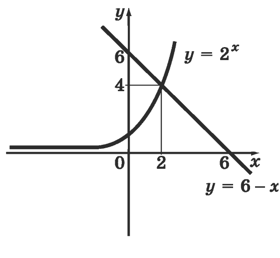


Рис. 1.106

160. Уравнения с параметром. Пусть дано равенство с переменными x, a:

$$f(x; a) = 0.$$

Если ставится задача для каждого действительного значения a решить это уравнение относительно x, то уравнение $f(x; a) = 0$ называют уравнением с переменной x и *параметром* a.

Решить уравнение с параметром a — значит для каждого значения a найти значения x, удовлетворяющие этому уравнению.

Пример 1. Решить уравнение

$$2a(a-2)\,x = a-2.$$

Решение. Рассмотрим прежде всего те значения параметра, которые обращают в нуль коэффициент при x (при этих значениях параметра невозможно деление обеих частей уравнения на коэффициент при x, а при остальных значениях параметра такое деление возможно). Такими значениями являются $a = 0$, $a = 2$. При $a = 0$ уравнение принимает вид $0 \cdot x = -2$. Это уравнение не имеет корней. При $a = 2$ данное уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$, корнем его служит любое действительное число. При $a \neq 0$ и $a \neq 2$ уравнение можно преобразовать к виду $x = \dfrac{a-2}{2a(a-2)}$, откуда находим $x = \dfrac{1}{2a}$.

Таким образом, если $a = 0$, то уравнение не имеет корней; если $a = 2$, то корнем служит любое действительное число; если $a \neq 0$ и $a \neq 2$, то $x = \dfrac{1}{2a}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$(a-1)\,x^2 + 2\,(2a+1)\,x + 4a + 3 = 0.$$

Решение. Выделим особо значение параметра $a = 1$. Дело в том, что при $a = 1$ данное уравнение не является квадратным, а при $a \neq 1$ оно квадратное. Решать уравнение в каждом из этих случаев надо по-своему. При $a = 1$ уравнение принимает вид $6x + 7 = 0$, откуда находим $x = -\dfrac{7}{6}$. В случае $a \neq 1$ для квадратного уравнения выделим те значения параметра, при которых дискриминант уравнения обращается в нуль. Имеем $\frac{D}{4} = 5a + 4$. Значит, $a = -\frac{4}{5}$ — значение параметра, на которое нам надо обратить внимание.

Если $a < -\frac{4}{5}$, то $D < 0$ и, следовательно, уравнение не имеет действительных корней; если $a > -\frac{4}{5}$ и $a \neq 1$, то $D > 0$ и мы получаем

$$x = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1};$$

если $a = -\frac{4}{5}$, то $D = 0$ и мы получаем $x = -\frac{2a+1}{a-1}$, т. е. $\left(\text{поскольку } a = -\frac{4}{5}\right)$ $x = -\frac{1}{3}$.

Итак, если $a < -\frac{4}{5}$, то действительных корней нет; если $a = 1$, то $x = -\frac{7}{6}$; если $a = -\frac{4}{5}$, то $x = -\frac{1}{3}$; если $a > -\frac{4}{5}$ и $a \neq 1$, то

$$x = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}.$$

П р и м е р 3. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2 + 2(a+1)x + 9a - 5 = 0$$

имеет два различных отрицательных корня?

Решение. Так как уравнение должно иметь два различных действительных корня x_1 и x_2, его дискриминант должен быть положительным. Имеем

$$D = 4(a+1)^2 - 4(9a-5) = 4a^2 - 28a + 24 = \\ = 4(a-1)(a-6).$$

Значит, должно выполняться неравенство $4(a-1)\times$ $\times(a-6) > 0$.

По теореме Виета для заданного уравнения имеем

$$x_1 + x_2 = -2(a+1),$$

$$x_1 x_2 = 9a - 5.$$

Так как, по условию, $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$, то $-2(a+1) < 0$ и $9a - 5 > 0$.

В итоге мы приходим к системе неравенств (см. п. 177):

$$\begin{cases} 4(a-1)(a-6) > 0, \\ -2(a+1) < 0, \\ 9a - 5 > 0. \end{cases}$$

Из первого неравенства системы находим (см. п. 180, 183) $a < 1$; $a > 6$; из второго $a > -1$; из третьего $a > \frac{5}{9}$. С помощью координатной прямой (рис. 1.107) находим, что либо $\frac{5}{9} < a < 1$, либо $a > 6$.

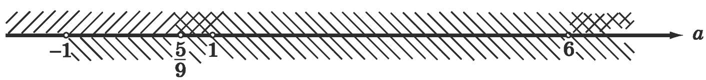


Рис. 1.107

§ 15. Уравнения с двумя переменными

161. Решение уравнения с двумя переменными. График уравнения с двумя переменными. Рассмотрим *уравнение с двумя переменными* $f(x; y) = 0$. Пару значений переменных, обращающую уравнение с двумя переменными в верное равенство, называют *решением уравнения*. Если дано уравнение с двумя переменными x и y, то принято в записи его решения на первое место ставить значение переменной x, а на второе — значение y.

Так, пары (10; 0), (16; 2), (−2; −4) являются решениями уравнения $x - 3y = 10$. В то же время пара (1; 5) решением уравнения не является.

Это уравнение имеет и другие решения. Для их отыскания удобно выразить одну переменную через другую, например x через y, получив уравнение $x = 10 + 3y$. Выбрав произвольное значение y, можно вычислить соответствующее значение x. Например, если $y = 7$, то $x = 10 + 3 \cdot 7 = 31$; значит, пара (31; 7) является решением уравнения; если $y = -2$, то $x = 10 + 3(-2) = 4$; значит, пара (4; −2) также является решением заданного уравнения.

Уравнения с двумя переменными называют *равносильными*, если они имеют одни и те же решения (или оба не имеют решений).

Для уравнений с двумя переменными справедливы теоремы 1 и 2 (см. п. 135) о равносильных преобразованиях уравнения.

Пусть дано уравнение с двумя переменными $f(x; y) = 0$. Если все его решения изобразить точками на координатной плоскости, то получится некоторое множество точек плоскости. Это множество называют *графиком уравнения* $f(x; y) = 0$.

Например, графиком уравнения $y - x^2 = 0$ является парабола $y = x^2$ (см. рис. 1.10); графиком уравнения $y - x = 0$ является прямая (биссектриса первого и третьего координатных углов, см. рис. 1.8); графиком уравнения $y - 3 = 0$ является прямая, параллельная оси x (рис. 1.108), а графиком уравнения $x + 2 = 0$ — прямая, параллельная оси y (рис. 1.109). Графиком уравнения $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-2} = 0$ является одна точка (1; 2), так как координаты только этой точки удовлетворяют уравнению.

162. Линейное уравнение с двумя переменными и его график. Уравнение вида $ax + by = c$, где x, y — переменные, а a, b, c — числа, называют *линейным*; числа a и b называют *коэффициентами при переменных*, c — *свободным членом*.

Графиком любого линейного уравнения $ax + by = c$, у которого хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля, является прямая; если $b = 0$, то эта прямая параллельна оси y, если $a = 0$, то эта прямая параллельна оси x.

П р и м е р. Построить график уравнения $2x - 3y = -6$.

Р е ш е н и е. Графиком этого линейного уравнения является прямая. Для построения прямой

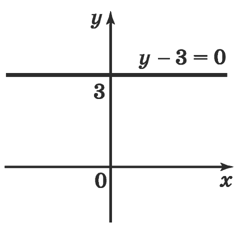


Рис. 1.108

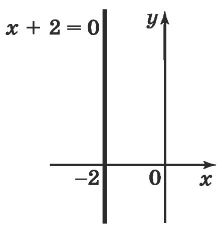


Рис. 1.109

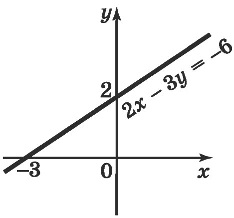


Рис. 1.110

достаточно знать две ее точки. Подставив в уравнение $2x - 3y = -6$ вместо x значение 0, получим $-3y = -6$, откуда $y = 2$. Подставив в уравнение $2x - 3y = -6$ вместо y значение 0, получим $2x = -6$, откуда $x = -3$.

Итак, мы нашли две точки графика: $(0; 2)$ и $(-3; 0)$. Проведя через них прямую, получим график уравнения $2x - 3y = -6$ (рис. 1.110).

Если линейное уравнение имеет вид $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$, то могут представиться два случая:

1) $c = 0$; в этом случае уравнению удовлетворяет любая пара $(x; y)$, а потому графиком уравнения является вся координатная плоскость;

2) $c \neq 0$; в этом случае уравнение не имеет решения; значит, его график не содержит ни одной точки.

§ 16. Системы уравнений

163. Системы двух уравнений с двумя переменными. Равносильные системы. Пусть даны два уравнения с двумя переменными: $f(x; y) = 0$ и $g(x; y) = 0$. Если ставится задача найти все общие решения двух уравнений с двумя переменными, то говорят, что надо решить *систему уравнений*. Пару значений переменных, обращающую в верное равенство каждое уравнение системы, называют *решением системы* уравнений. Решить систему — значит найти все ее решения или доказать, что их нет.

Уравнения, образующие систему, объединяются фигурной скобкой. Например, запись

$$\begin{cases} x - 3y = 10, \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$$

означает, что уравнения $x - 3y = 10$ и $3x - 2y = 2$ образуют систему.

Две системы уравнений называют *равносильными*, если эти системы имеют одни и те же решения. Если, в частности, обе системы не имеют решений, то они также считаются равносильными. При решении системы уравнений обычно заменяют данную систему другой, более простой или по каким-либо причинам более «удобной», но равносильной первоначальной. Возможность такой замены обусловлена следующими двумя теоремами.

Теорема 5. Если одно уравнение системы двух уравнений с двумя переменными оставить без изменения, а другое уравнение системы заменить уравнением, ему равносильным, то полученная система будет равносильна заданной.

Так, системы

$$\begin{cases} x - 3y = 10, \\ 3x - 2y = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 3y + 10, \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$$

равносильны.

Следствие. Если каждое уравнение системы заменить равносильным уравнением, то получится система, равносильная данной.

Так, равносильными будут следующие системы:

$$\begin{cases} x - 3y = 10, \\ 3x - 2y = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 3y + 10, \\ x = \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Теорема 6. Если одно уравнение системы двух уравнений с двумя переменными оставить без изменения, а другое уравнение заменить суммой или разностью обоих уравнений системы, то полученная система будет равносильна заданной.

Так, системы

$$\begin{cases} x - 3y = 10, \\ 3x - 2y = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} (x - 3y) + (3x - 2y) = 10 + 2, \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$$

равносильны: мы заменили уравнение $x - 3y = 10$ суммой двух уравнений заданной системы, а уравнение $3x - 2y = 2$ оставили неизменным.

164. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методом подстановки. *Метод подстановки* заключается в следующем.

1) Одно из уравнений системы преобразуют к виду, в котором y выражен через x (или x через y).

2) Полученное выражение подставляют вместо y (или вместо x) во второе уравнение. В результате получается уравнение с одной переменной.

3) Находят корни этого уравнения.

4) Воспользовавшись выражением y через x (или x через y), находят соответствующие значения y (или x).

П р и м е р. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - 3y = 10, \\ x^2 - 24y = 100. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Из первого уравнения находим $x = 3y + 10$. Подставим выражение $3y + 10$ вместо x

во второе уравнение системы. Получим $(3y + 10)^2 - 24y = 100$, откуда находим $y_1 = 0$, $y_2 = -4$. Соответствующие значения x найдем из уравнения $x = 3y + 10$. Если $y = 0$, то $x = 10$; если $y = -4$, то $x = -2$. Итак, система имеет два решения: $(-2; -4)$ и $(10; 0)$.

165. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методом сложения. *Метод сложения* основан на теоремах 5 и 6 (см. п. 163). Суть его поясним на примерах.

П р и м е р 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 3x - y = 16. \end{cases} \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. Умножив обе части второго уравнения системы на 3, получим систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 9x - 3y = 48, \end{cases} \qquad (2)$$

равносильную данной по теореме 5.

Сложим уравнения полученной системы. По теореме 6, система

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ (2x + 3y) + (9x - 3y) = 7 + 48 \end{cases} \qquad (3)$$

равносильна системе (2). Система (3), в свою очередь, преобразуется к виду

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 11x = 55. \end{cases}$$

Из уравнения $11x = 55$ находим $x = 5$. Подставив это значение в уравнение $2x + 3y = 7$, находим $y = -1$.

Итак, $(5; -1)$ — решение системы (3), а значит, и решение равносильной ей системы (1).

П р и м е р 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + y = 0, \\ 2x^2 + 2y^2 + x - 3y - 5 = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Если обе части первого уравнения системы умножить на 2 и вычесть полученное уравнение из второго уравнения системы, то взаимно уничтожатся члены, содержащие переменные во второй степени:

$$(2x^2 + 2y^2 + x - 3y - 5) - (2x^2 + 2y^2 - 4x + 2y) = 0,$$
$$5x - 5y - 5 = 0,$$
$$x - y - 1 = 0.$$

Мы приходим к более простой системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + y = 0, \\ x - y - 1 = 0, \end{cases}$$

которую нетрудно решить методом подстановки. Имеем $y = x - 1$; значит,

$$x^2 + (x - 1)^2 - 2x + (x - 1) = 0,$$
$$2x^2 - 3x = 0,$$
$$x_1 = 0, x_2 = 1{,}5.$$

Если $x = 0$, то $y = x - 1 = 0 - 1 = -1$; если $x = 1{,}5$, то $y = x - 1 = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$

О т в е т: (0; –1) и (1,5; 0,5).

166. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методом введения новых переменных. *Метод введения новых переменных* применяется при решении систем двух уравнений с двумя переменными одним из следующих способов: 1) вводится одна новая переменная только для одного уравнения системы; 2) вводятся две новые переменные сразу для обоих уравнений.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{6}, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Решение. Положим $\dfrac{x}{y} = z$, тогда $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{z}$ и первое уравнение системы примет вид $z + \dfrac{1}{z} = \dfrac{13}{6}$. Решим полученное уравнение относительно новой переменной z:

$$6z^2 - 13z + 6 = 0, \text{ откуда } z_1 = \frac{2}{3}, z_2 = \frac{3}{2}.$$

Таким образом, либо $\dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3}$, т. е. $y = \dfrac{3x}{2}$, либо $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{2}$, т. е. $y = \dfrac{2x}{3}$.

Итак, первое уравнение заданной системы распалось на два уравнения: $y = \dfrac{3x}{2}$; $y = \dfrac{2x}{3}$. В соответствии с этим нам предстоит теперь решить совокупность двух систем:

$$\begin{cases} y = \dfrac{3x}{2}, \\ x + y = 5; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{2x}{3}, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Из первой системы находим $x = 2$, $y = 3$, из второй $x = 3$, $y = 2$.

Ответ: (2; 3); (3; 2).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 32, \\ xy + 2(x + y) = 26. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Положим $x + y = u$, $xy = v$.

Тогда $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$ и система примет вид

$$\begin{cases} u^2 - 2v + u = 32, \\ v + 2u = 26. \end{cases} \qquad (1)$$

Полученную систему можно решить методом подстановки. Выразив из второго уравнения v через u, получим $v = 26 - 2u$. Подставим этот результат в первое уравнение системы (1):

$$u^2 - 2(26 - 2u) + u = 32,$$

$$u^2 + 5u - 84 = 0,$$

$$u_1 = -12, u_2 = 7.$$

Соответственно находим $v_1 = 50$, $v_2 = 12$.

Итак, нашли два решения системы (1):

$$\begin{cases} u_1 = -12, \\ v_1 = 50; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = 7, \\ v_2 = 12. \end{cases}$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим совокупность двух систем

$$\begin{cases} x + y = -12, \\ xy = 50; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12, \end{cases}$$

каждую из которых нетрудно решить методом подстановки (выразив, например, y через x из первого уравнения). Первая система не имеет действительных решений, а вторая имеет два решения: (3; 4) и (4; 3). Они и будут решениями исходной системы.

167. Графическое решение систем двух уравнений с двумя переменными. Для того чтобы графически решить систему двух уравнений с двумя переменными, нужно в одной системе координат построить графики уравнений и найти координаты точек пересечения этих графиков.

П р и м е р 1. Решить графически систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 2x - y = 8. \end{cases}$$

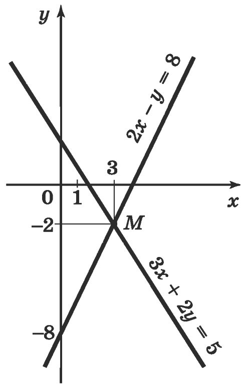


Рис. 1.111

Р е ш е н и е. Построим прямую — график уравнения $3x + 2y = 5$ — по двум точкам, например (1; 1) и (3; –2) (рис. 1.111).

Построим прямую — график уравнения $2x - y = 8$ — по точкам (0; –8) и (4; 0) (рис. 1.111).

Полученные прямые не параллельны, их пересечением служит точка $M(3; -2)$. Значит, (3; –2) — решение заданной системы.

П р и м е р 2. Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Графиком уравнения $x^2 + y^2 = 25$ является окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 5 (см. «Геометрия», п. 107). Графиком уравнения $xy = 12$ является гипербола $y = \frac{12}{x}$ (см. п. 82). Построив графики в одной системе координат (рис. 1.112), найдем координаты точек A, B, C, D пересечения окружности и гиперболы: $A(4; 3)$, $B(3; 4)$, $C(-4; -3)$, $D(-3; -4)$. Значит, решения заданной системы таковы:

$$(4; 3), (3; 4), (-4; -3), (-3; -4).$$

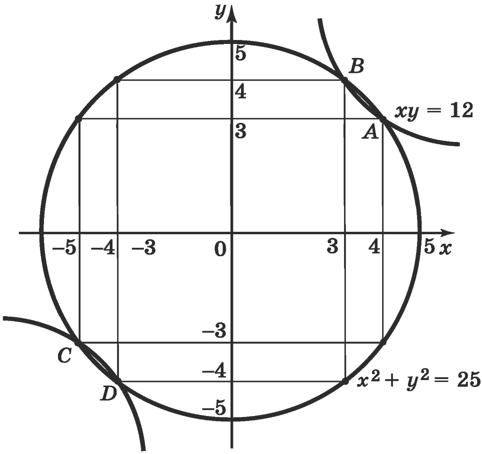


Рис. 1.112

168. Исследование системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Пусть даны два линейных уравнения с двумя переменными и все коэффициенты при переменных отличны от нуля:

$$a_1x + b_1y = c_1; a_2x + b_2y = c_2.$$

Графиком каждого из этих линейных уравнений является прямая (см. п. 162). Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то прямые пересекаются в одной точке; если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то прямые совпадают; если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$, то прямые параллельны и не совпадают.

Отсюда следует, что *система двух линейных уравнений с двумя переменными*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

имеет единственное решение, если $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$,

имеет бесконечно много решений, если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$,

не имеет решений, если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.

Например, система

$$\begin{cases} 5x + 2y = 3, \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$$

имеет одно решение, так как $\dfrac{5}{3} \neq \dfrac{2}{4}$. Система

$$\begin{cases} 2x - 4y = 1, \\ 4x - 8y = 3 \end{cases}$$

не имеет решений, поскольку $\dfrac{2}{4} = \dfrac{-4}{-8} \neq \dfrac{1}{3}$. Система

$$\begin{cases} 3x - y = -4, \\ -9x + 3y = 12 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений, поскольку $\dfrac{3}{-9} = \dfrac{-1}{3} = \dfrac{-4}{12}$.

169*. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методами умножения и деления. Методы умножения и деления при решении систем уравнений основаны на следующем утверждении.

Теорема 7. Если обе части уравнения $f_2(x;\, y) = g_2(x;\, y)$ ни при каких значениях $(x;\, y)$ одновременно не обращаются в нуль, то системы

$$\begin{cases} f_1(x;\, y) = g_1(x;\, y), \\ f_2(x;\, y) = g_2(x;\, y), \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x;\, y) = g_1(x;\, y), \\ f_1(x;\, y)\, f_2(x;\, y) = g_1(x;\, y)\, g_2(x;\, y), \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x;\, y) = g_1(x;\, y), \\ \dfrac{f_1(x;\, y)}{f_2(x;\, y)} = \dfrac{g_1(x;\, y)}{g_2(x;\, y)} \end{cases}$$

равносильны.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}\,, \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}\,. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим первое уравнение. Левая его часть обращается в 0 при $y = 0$. Если $y = 0$, то правая часть обращается в 0 при $x = 0$. Но при $x = 0$ левая часть не имеет смысла. Значит, нет таких пар $(x;\, y)$, при которых обе части первого уравнения системы одновременно обращаются в 0. Поэтому можно заменить первое уравнение произведением обоих уравнений системы, оставив второе уравнение системы без изменений.

Получим

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}} \cdot \sqrt{\dfrac{16x}{5y}} = (\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}\,)(\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}\,), \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}\,. \end{cases}$$

Преобразовав первое уравнение этой системы, получим

$$8=(x+y)-(x-y), \text{ т. е. } y=4.$$

Подставив найденное значение y во второе уравнение системы, получим

$$\sqrt{\frac{4x}{5}}=\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}. \qquad (1)$$

Решим это иррациональное уравнение (см. п. 150):

$$\left(\sqrt{\frac{4x}{5}}\right)^2=(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4})^2,$$

$$\frac{4x}{5}=x+4-2\sqrt{x^2-16}+x-4,$$

$$5\sqrt{x^2-16}=3x,$$

$$25x^2-400=9x^2,$$

$$x^2=25,$$

$$x_1=5, \quad x_2=-5.$$

Второе значение не удовлетворяет уравнению (1), т. е. является посторонним корнем. Значит, система имеет одно решение

$$\begin{cases} x=5, \\ y=4. \end{cases}$$

П р и м е р 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x-y)xy=30, \\ (x+y)xy=120. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Ни при каких значениях $(x;\ y)$ обе части второго уравнения системы не обращаются в нуль одновременно. Значит, можно применить метод деления, перейдя от заданной системы к системе

$$\begin{cases} (x - y)xy = 30, \\ \dfrac{(x-y)xy}{(x+y)xy} = \dfrac{30}{120}. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы находим

$$\frac{x-y}{x+y} = \frac{1}{4},\ 4x - 4y = x + y,\ 3x = 5y,\ y = \frac{3x}{5}.$$

Подставим найденное выражение y через x в первое уравнение системы. Получим $\left(x - \frac{3}{5}\ x\right) \cdot x \cdot \frac{3}{5}x = 30$ и далее $\frac{6}{25}x^3 = 30$, $x^3 = 125$, $x = 5$. Из уравнения $y = \frac{3}{5}x$ находим, что если $x = 5$, то $y = 3$. Итак, (5; 3) — решение системы.

170. Системы показательных и логарифмических уравнений. Решение систем показательных и логарифмических уравнений не содержит каких-либо принципиально новых моментов. Используются обычные приемы решения логарифмических и показательных уравнений (см. пп. 151, 152) и обычные приемы решения систем уравнений (см. пп. 164—166, 169).

П р и м е р. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4, \\ 3^{x^2} = 9 \cdot 3^{15y + 2}. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим первое уравнение системы. Воспользуемся тем, что $\log_2 x = \log_{2^2} x^2 =$

$= \log_4 x^2$ (см. п. 121). Тогда уравнение можно записать в виде $\log_4 x^2 + \log_4 y = 4$ и далее $\log_4 x^2 y = 4$ (см. п. 120), откуда $x^2 y = 4^4$, т. е. $x^2 y = 256$.

Теперь рассмотрим второе уравнение системы:

$$3^{x^2} = 3^2 \cdot 3^{15y+2},$$
$$x^2 = 15y + 4.$$

Задача свелась к решению следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 y = 256, \\ x^2 = 15y + 4. \end{cases}$$

Подставим $15y + 4$ вместо x^2 в первое уравнение: $(15y+4)y = 256$, $15y^2 + 4y - 256 = 0$, $y_1 = 4$, $y_2 = -\frac{64}{15}$.

Если $y = 4$, то $x^2 = 15y + 4 = 15 \cdot 4 + 4 = 64$, т. е. $x^2 = 64$, откуда находим $x_1 = 8$, $x_2 = -8$. Если $y = -\frac{64}{15}$, то

$$x^2 = 15y + 4 = 15 \cdot \left(-\frac{64}{15}\right) + 4 = -60,$$

т. е. $x^2 = -60$ — это уравнение не имеет действительных корней.

Итак, мы нашли две пары значений переменных:

$$\begin{cases} x_1 = 8, \\ y_1 = 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -8, \\ y_2 = 4. \end{cases}$$

Так как заданная система содержит выражения $\log_2 x$, $\log_4 y$, то должны выполняться условия $x > 0$, $y > 0$. Поэтому пара $\begin{cases} x_2 = -8, \\ y_2 = 4 \end{cases}$ исходной системе не удовлетворяет.

О т в е т: (8; 4).

171*. Системы тригонометрических уравнений с двумя переменными. При решении систем тригонометрических уравнений используются обычные приемы решения систем уравнений и формулы тригонометрии.

П р и м е р. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1{,}5, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1{,}25. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Положим $\sin x = u$, $\cos y = v$. Тогда получим систему $\begin{cases} u + v = 1{,}5, \\ u^2 + v^2 = 1{,}25. \end{cases}$ Из первого уравнения этой системы находим $v = \frac{3}{2} - u$. Подставив выражение $\frac{3}{2} - u$ вместо v во второе уравнение системы, получим

$$u^2 + \left(\frac{3}{2} - u\right)^2 = \frac{5}{4},$$

$$2u^2 - 3u + 1 = 0, \quad u_1 = 1, u_2 = \frac{1}{2}.$$

Если $u = 1$, то $v = \frac{3}{2} - u = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.

Если $u = \frac{1}{2}$, то

$$v = \frac{3}{2} - u = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

Итак, мы получили две пары решений:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ v_1 = \frac{1}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = \frac{1}{2}, \\ v_2 = 1. \end{cases}$$

Так как $u = \sin x$, $v = \cos y$, то нам остается решить две системы уравнений:

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos y = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2}, \\ \cos y = 1. \end{cases}$$

Из уравнения $\sin x = 1$ находим $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Из уравнения $\cos y = \dfrac{1}{2}$ находим $y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Значит, решения системы $\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ имеют вид

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

Из уравнения $\sin x = \dfrac{1}{2}$ находим $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Из уравнения $\cos y = 1$ находим $y = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Значит, решения системы $\begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2}, \\ \cos y = 1 \end{cases}$ имеют вид

$$\begin{cases} x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ y = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е. При решении систем тригонометрических уравнений следует использовать различные обозначения для параметра (n, k, m, ...) в записи решений первого и второго уравнений системы. Иными словами, если в первом уравнении системы при записи решения в качестве параметра использована буква k, то для второго уравнения эту букву уже использовать нельзя — в рассмотренном примере для этой цели использовалась буква n.

172. Системы трех уравнений с тремя переменными. Рассмотрим *систему трех уравнений с тремя переменными*

$$\begin{cases} f(x;\ y;\ z) = 0, \\ g(x;\ y;\ z) = 0, \\ h(x;\ y;\ z) = 0. \end{cases}$$

Решением такой системы называют всякую тройку чисел, удовлетворяющую каждому уравнению системы.

Для систем трех уравнений с тремя переменными применяются методы решения, аналогичные тем, что используются для систем двух уравнений с двумя переменными.

П р и м е р. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ x^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 9. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Применим метод подстановки. Выразим из первого уравнения x через y и z и подставим результат во второе и третье уравнения системы.

$$\begin{cases} x = 2 - y - z, \\ 2(2 - y - z) + 3y + z = 1, \\ (2 - y - z)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 - y - z, \\ y - z = -3, \\ y^2 + z^2 + yz - 3z = 0. \end{cases}$$

Последние два уравнения полученной системы в свою очередь образуют систему двух уравнений с двумя переменными. Решим эту систему методом подстановки.

$$\begin{cases} y = z - 3, \\ (z - 3)^2 + z^2 + z(z - 3) - 3z = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = z - 3, \\ z^2 - 4z + 3 = 0. \end{cases}$$

Из уравнения $z^2 - 4z + 3 = 0$ находим $z_1 = 1$, $z_2 = 3$. Из уравнения $y = z - 3$ получаем соответственно $y_1 = -2$, $y_2 = 0$, а из уравнения $x = 2 - y - z$ находим $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

Итак, получили два решения исходной системы: $(3; -2; 1)$ и $(-1; 0; 3)$.

173. Решение задач с помощью составления систем уравнений.

З а д а ч а 1. Два пешехода идут навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми равно 30 км. Если первый выйдет на 2 ч раньше второго, то встреча произойдет через 2,5 ч после выхода второго. Если же второй пешеход выйдет на 2 ч раньше первого, то встреча произойдет через 3 ч после выхода первого. С какой скоростью идет каждый пешеход?

Р е ш е н и е. Пусть x км/ч — скорость первого пешехода, а y км/ч — скорость второго пешехода. Если первый выйдет на 2 ч раньше второго, то, согласно условию, он будет идти до встречи 4,5 ч, тогда как второй — 2,5 ч. За 4,5 ч первый пройдет путь $4{,}5x$ км, а за 2,5 ч второй пройдет путь $2{,}5y$ км. Их встреча означает, что суммарно они прошли путь 30 км, т. е.

$$4{,}5x + 2{,}5y = 30 \text{ — первое уравнение.}$$

Если второй выйдет на 2 ч раньше первого, то, согласно условию, он будет идти до встречи 5 ч, тогда как первый — 3 ч. Рассуждая, как и выше, придем ко второму уравнению:

$$3x + 5y = 30.$$

В итоге получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 4{,}5x + 2{,}5y = 30, \\ 3x + 5y = 30, \end{cases}$$

откуда находим $x = 5$, $y = 3$.

Ответ: первый пешеход идет со скоростью 5 км/ч, а второй — 3 км/ч.

Задача 2. У старшего брата было вдвое больше денег, чем у младшего. Они положили свои деньги на год на счета в разные банки, причем младший брат нашел банк, который дает на 5% годовых больше, чем банк старшего брата. Сняв свои деньги со счетов через год, старший брат получил 4600 руб., а младший — 2400 руб. Сколько денег было бы у братьев в сумме, если бы они с самого начала поменяли свои банки?

Решение. Пусть x руб. — сумма денег, которую положил в банк младший брат, тогда $2x$ руб. — сумма денег, которую положил в банк старший брат.

Пусть, далее, банк старшего брата дает y% годовых, тогда банк младшего брата дает $(y + 5)$% годовых.

Значит, через год на счету старшего брата будет $\left(2x + \frac{2xy}{100}\right)$ руб., а на счету младшего брата будет $\left(x + \frac{x(y+5)}{100}\right)$ руб.

В итоге приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{2xy}{100} = 4600, \\ x + \dfrac{x(y+5)}{100} = 2400. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $x = 2000$, $y = 15$.

Осталось получить ответ на вопрос задачи: сколько денег было бы у братьев в сумме, если бы они с самого начала поменяли свои банки? В этом случае младший брат положил бы свои 2000 руб. в банк под 15% годовых, а старший — 4000 руб. в банк под 20% годовых. Младший брат в конце года получил бы 2300 руб., а старший — 4800 руб. Всего у них стало бы 7100 руб.

О т в е т: 7100 руб.

НЕРАВЕНСТВА

§ 17. Решение неравенств

174. Основные понятия, связанные с решением неравенств с одной переменной. Пусть дано неравенство $f(x) > g(x)$. Всякое значение переменной x, при котором данное неравенство, обращается в верное числовое неравенство, называют *решением неравенства*. *Решить неравенство с переменной* — значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Два неравенства с одной переменной называют *равносильными*, если решения этих неравенств совпадают; в частности, неравенства равносильны, если оба не имеют решений.

При решении неравенств обычно заменяют данное неравенство другим, более простым, но равносильным данному; полученное неравенство снова заменяют более простым, равносильным данному неравенством и т. д. Такие замены осуществляются на основе следующих утверждений.

Теорема 1. Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится неравенство, равносильное данному.

Теорема 2. Если обе части неравенства с одной переменной умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится неравенство, равносильное данному.

Теорема 3. Если обе части неравенства с одной переменной умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.

Например, неравенства $x^2 + 5x < 6$ и $x^2 + 5x - 6 < 0$ равносильны по теореме 1. Неравенства $3x^2 + 6x < 9$ и $x^2 + 2x < 3$ равносильны по теореме 2 (обе части неравенства $3x^2 + 6x < 9$ разделили на положительное число 3, оставив без изменения знак $<$ исходного неравенства). Неравенства $-6x < 12$ и $x > -2$ равносильны по теореме 3 (обе части неравенства $-6x < 12$ разделили на отрицательное число -6, изменив при этом знак $<$ исходного неравенства на знак $>$).

На практике иногда полезны теоремы, являющиеся обобщениями теорем 2 и 3.

Теорема 4. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же выражение, принимающее при всех значениях переменной положительные значения, то получится неравенство, равносильное данному.

Теорема 5. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же выражение, принимающее при всех значениях переменной отрицательные значения, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.

175. Графическое решение неравенств с одной переменной. Для *графического* решения неравенства $f(x) > g(x)$ нужно построить графики функций

$y = f(x)$ и $y = g(x)$ и выбрать те участки оси абсцисс, на которых график функции $y = f(x)$ расположен выше графика функции $y = g(x)$.

Пример. Решить графически неравенство

$$\log_2 x > \frac{2}{x}.$$

Решение. Построим в одной системе координат графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \frac{2}{x}$ (рис. 1.113). Из рисунка видно, что график функции $y = \log_2 x$ расположен выше графика функции $y = \frac{2}{x}$ при $x > 2$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

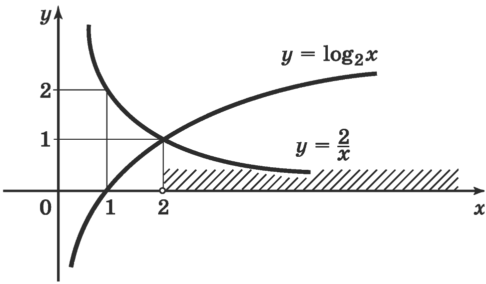


Рис. 1.113

176. Линейные неравенства с одной переменной. *Линейным* называют неравенство вида $ax > b$ (или соответственно $ax < b$, $ax \geqslant b$, $ax \leqslant b$). Если $a > 0$, то неравенство $ax > b$ равносильно неравенству $x > \frac{b}{a}$ (см. теорему 2); значит, множество решений неравенства есть промежуток $\left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$. Если $a < 0$, то неравенство $ax > b$ равносильно неравенству $x < \frac{b}{a}$

(см. теорему 3); значит, множество решений неравенства есть промежуток $\left(-\infty;\ \frac{b}{a}\right)$. Если $a = 0$, то неравенство принимает вид $0 \cdot x > b$; оно не имеет решений, если $b \geqslant 0$, и верно при любых x, если $b < 0$.

Многие неравенства в процессе преобразований сводятся к линейным.

Пример. Решить неравенство

$$2(x-3)+5(1-x) \geqslant 3(2x-5).$$

Решение. Раскрыв скобки, получим

$$2x-6+5-5x \geqslant 6x-15,$$

$$-3x-1 \geqslant 6x-15,$$

$$-3x-6x \geqslant -15+1,$$

$$-9x \geqslant -14. \qquad (1)$$

По теореме 1 это неравенство равносильно заданному неравенству. Разделим теперь обе части неравенства (1) на отрицательное число -9 и изменим знак неравенства. Получим согласно теореме 3 неравенство, равносильное неравенству (1): $x \leqslant \frac{14}{9}$. Значит, множество решений заданного неравенства есть луч $\left(-\infty;\ \frac{14}{9}\right]$.

177. Системы неравенств с одной переменной. Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют *систему неравенств*, если ставится задача найти все общие решения заданных неравенств.

Значение переменной, при котором каждое неравенство системы обращается в верное числовое неравенство, называют *решением системы неравенств.*

Неравенства, образующие систему, объединяют фигурной скобкой. Например, запись

$$\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ 3x - 2 < 11 \end{cases}$$

означает, что неравенства $2x - 1 > 3$ и $3x - 2 < 11$ образуют систему.

Иногда используют запись в виде двойного неравенства.

Например, систему неравенств

$$\begin{cases} 2x + 1 > 1, \\ 2x + 1 < 5 \end{cases}$$

можно записать в виде двойного неравенства

$$1 < 2x + 1 < 5.$$

П р и м е р 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 5x + 2 > 3x - 1, \\ 3x + 1 > 7x - 4. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Первое неравенство системы преобразуется в равносильное ему неравенство $x > -\frac{3}{2}$, а второе — в неравенство $x < \frac{5}{4}$. Таким образом, задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} x > -\dfrac{3}{2}, \\ x < \dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

С помощью координатной прямой (рис. 1.114) находим, что множество решений системы есть интервал $\left(-\frac{3}{2};\ \frac{5}{4}\right)$ (пересечение заштрихованных на рис. 1.114 промежутков).

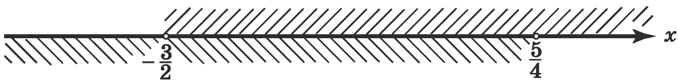


Рис. 1.114

Пример 2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 3(x+1) - \dfrac{x-2}{4} < 5x - 7 \cdot \dfrac{x+3}{2}, \\ 2x - \dfrac{x}{3} + 6 \leqslant 4x - 3. \end{cases}$$

Решение. Выполнив преобразования каждого из неравенств системы, получим

$$\begin{cases} x < -\dfrac{56}{5}, \\ x \geqslant \dfrac{27}{7}. \end{cases}$$

Значений x, удовлетворяющих одновременно неравенствам $x < -\frac{56}{5}$ и $x \geqslant \frac{27}{7}$, нет; следовательно, заданная система неравенств не имеет решений.

178. Совокупность неравенств с одной переменной. Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют *совокупность неравенств*, если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является решением хотя бы одного из данных неравенств.

Значение переменной, при котором хотя бы одно из неравенств, образующих совокупность, обращается в верное числовое неравенство, называют *решением совокупности неравенств*.

П р и м е р. Решить совокупность неравенств

$$\frac{2x-3}{5} > \frac{3x-2}{2}; \quad \frac{x}{3} + 1 > \frac{3x}{2}.$$

Р е ш е н и е. Преобразовав каждое из неравенств, получим совокупность, равносильную заданной: $x < \frac{4}{11}$; $x < \frac{6}{7}$. С помощью числовой прямой находим, что решением заданной совокупности является промежуток $\left(-\infty; \frac{6}{7}\right)$ (рис. 1.115) (объединения заштрихованных на рис. 1.115. промежутков).

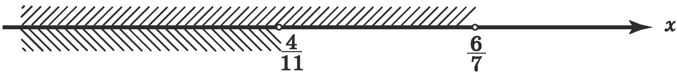


Рис. 1.115

179. Дробно-линейные неравенства. *Дробно-линейные неравенства* — это неравенства вида $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$ (< 0).

П р и м е р 1. Решить неравенство $\frac{2x+1}{3x-2} > 0$.

Р е ш е н и е. Дробь положительна, если числитель и знаменатель ее имеют одинаковые знаки, т. е. либо оба положительны, либо оба отрицательны. Значит, мы получаем совокупность двух систем неравенств

$$\begin{cases} 2x + 1 > 0, \\ 3x - 2 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 1 < 0, \\ 3x - 2 < 0. \end{cases}$$

Из первой находим $\begin{cases} x > -\frac{1}{2}, \\ x > \frac{2}{3}, \end{cases}$ т. е. $x > \frac{2}{3}$

Из второй находим $\begin{cases} x < -\dfrac{1}{2}, \\ x < \dfrac{2}{3}, \end{cases}$ т. е. $x < -\dfrac{1}{2}$.

В итоге получили следующие решения заданного неравенства:

$$x < -\frac{1}{2}; \quad x > \frac{2}{3}.$$

П р и м е р 2. Решить неравенство $\dfrac{3x+7}{2x-7} \geqslant 5$.

Р е ш е н и е. Имеем последовательно:

$$\frac{3x+7}{2x-7} - 5 \geqslant 0,$$

$$\frac{3x+7-10x+35}{2x-7} \geqslant 0,$$

$$\frac{-7x+42}{2x-7} \geqslant 0.$$

Умножим обе части неравенства на -1, изменив при этом знак неравенства (см. теорему 3, п. 174). Получим

$$\frac{7x-42}{2x-7} \leqslant 0.$$

Дробь меньше или равна нулю в двух случаях: 1) если числитель меньше или равен нулю, а знаменатель больше нуля; 2) если числитель больше или равен нулю, а знаменатель меньше нуля. Значит, мы получаем совокупность двух систем неравенств

$$\begin{cases} 7x - 42 \leqslant 0, \\ 2x - 7 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x - 42 \geqslant 0, \\ 2x - 7 < 0. \end{cases}$$

Из первой находим $\begin{cases} x \leqslant 6, \\ x > \frac{7}{2}, \end{cases}$ т. е. $\frac{7}{2} < x \leqslant 6$.

Из второй находим $\begin{cases} x \geqslant 6, \\ x < \frac{7}{2}, \end{cases}$ т. е. система не имеет решений.

Значит, множество решений заданного неравенства есть промежуток $\left(\frac{7}{2}; 6\right]$.

180. Квадратные неравенства. Здесь речь идет о неравенствах вида

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ или } ax^2 + bx + c < 0, \text{ где } a \neq 0.$$

Теорема 6. Если дискриминант $D = b^2 - 4ac$ квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ отрицателен, а старший коэффициент a положителен, то при всех значениях x выполняется неравенство $ax^2 + bx + c > 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $D \geqslant 0$. Для решения неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ (или $ax^2 + bx + c < 0$) нужно разложить квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ на множители по формуле

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

(см. п. 56), затем разделить обе части неравенства $a(x-x_1)(x-x_2) > 0$ (или $a(x - x_1)(x - x_2) < 0$) на число a, сохранив знак неравенства, если $a > 0$, и изменив знак неравенства на противоположный, если $a < 0$ (см. п. 174), т. е. перейти к неравенству

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0$$

(или $(x - x_1)(x - x_2) < 0$). Теперь остается воспользоваться тем, что произведение двух чисел положительно (отрицательно), если множители имеют одинаковые (разные) знаки.

Пример 1. Решить неравенство $2x^2 + 5x + 2 > 0$.

Решение. Найдем корни трехчлена $2x^2 + 5x + 2$. Из уравнения $2x^2 + 5x + 2 = 0$ получаем $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. Значит, $2x^2 + 5x + 2 = 2(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$, и мы приходим к неравенству $2(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right) > 0$ и далее $(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right) > 0$. Выражения $x + 2$ и $x + \frac{1}{2}$ должны иметь одинаковые знаки, т. е.

$$\begin{cases} x + 2 > 0, \\ x + \frac{1}{2} > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + 2 < 0, \\ x + \frac{1}{2} < 0. \end{cases}$$

Из первой системы находим $x > -\frac{1}{2}$, а из второй $x < -2$.

Пример 2. Решить неравенство $7x + 10 \geqslant 3x^2$.

Решение. Преобразуем неравенство к виду $7x + 10 - 3x^2 \geqslant 0$ и, умножив обе части последнего неравенства на -1, получим $3x^2 - 7x - 10 \leqslant 0$. Корни квадратного трехчлена $3x^2 - 7x - 10$ таковы: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{10}{3}$. Разложив квадратный трехчлен на множители, получим $3(x + 1)\left(x - \frac{10}{3}\right) \leqslant 0$ и далее

$(x+1)\left(x-\frac{10}{3}\right) \leqslant 0$. От последнего неравенства переходим к совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} x+1 \leqslant 0, \\ x-\frac{10}{3} \geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+1 \geqslant 0, \\ x-\frac{10}{3} \leqslant 0. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений, а из второй находим

$$-1 \leqslant x \leqslant \frac{10}{3}.$$

Пример 3. Решить неравенство $x^2-6x+9>0$.

Решение. Квадратный трехчлен x^2-6x+9 имеет два одинаковых корня $x_1=x_2=3$. Значит, $x^2-6x+9=(x-3)^2$ и неравенство принимает вид $(x-3)^2>0$. Это неравенство выполняется при всех x, кроме $x=3$.

Пример 4. Решить неравенство $x^2 \geqslant 25$.

Решение. Последовательно имеем

$$x^2-25 \geqslant 0, \quad (x-5)(x+5) \geqslant 0,$$

откуда $\begin{cases} x-5 \geqslant 0, \\ x+5 \geqslant 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-5 \leqslant 0, \\ x+5 \leqslant 0. \end{cases}$

Из первой системы получаем $x \geqslant 5$, из второй $x \leqslant -5$.

181. Графическое решение квадратных неравенств. Графиком квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола с ветвями, направленными вверх, если $a>0$, и вниз, если $a<0$. При этом возможны три случая:

1) парабола пересекает ось x (т. е. уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня);

2) парабола имеет вершину на оси x (т. е. уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет один корень);

3) парабола не пересекает ось x (т. е. уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней).

Итого возможны шесть положений параболы, служащей графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ относительно оси x, — они представлены на рисунках 1.116—1.121. Опираясь на эти графические иллюстрации, можно решать квадратные неравенства.

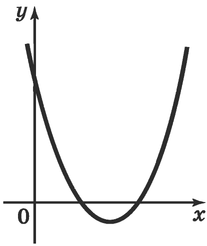


Рис. 1.116

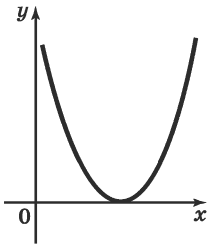


Рис. 1.117

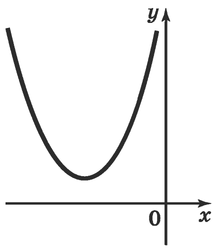


Рис. 1.118

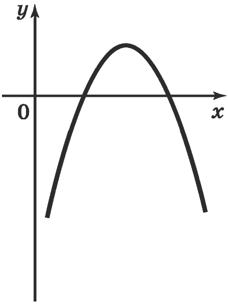


Рис. 1.119

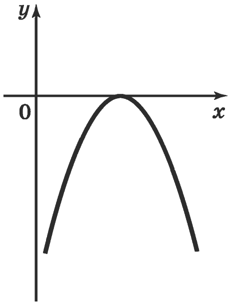


Рис. 1.120

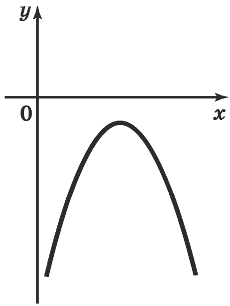


Рис. 1.121

Пример 1. Решить неравенство $2x^2 + 5x + 2 > 0$.

Решение. Уравнение $2x^2 + 5x + 2 = 0$ имеет два корня: $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. Парабола, служащая графиком функции $y = 2x^2 + 5x + 2$, имеет вид, изображенный на рисунке 1.116. Неравенство $2x^2 + 5x + 2 > 0$ выполняется при тех значениях x, при которых точки параболы лежат выше оси x: это будет при $x < x_1$ или при $x > x_2$, т. е. при $x < -2$ или при $x > -\frac{1}{2}$.

Значит, решения неравенства таковы: $x < -2$, $x > -\frac{1}{2}$ (см. пример 1 из п. 180).

Пример 2. Решить неравенство $3x^2 - 7x - 10 \leqslant 0$.

Решение. Уравнение $3x^2 - 7x - 10 = 0$ имеет два корня: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{10}{3}$. Парабола, служащая графиком функции $y = 3x^2 - 7x - 10$, имеет вид, изображенный на рисунке 1.116. Неравенство $3x^2 - 7x - 10 \leqslant 0$ выполняется при тех значениях x, при которых точки параболы лежат на оси x или ниже ее: это будет при x из промежутка $[x_1;\ x_2]$. Значит, множество решений неравенства есть отрезок $\left[-1;\ \frac{10}{3}\right]$ (см. пример 2 из п. 180).

Пример 3. Решить неравенство $-x^2 + 4x - 4 > 0$.

Решение. Уравнение $-x^2 + 4x - 4 = 0$ имеет один корень $x = 2$. Парабола, служащая графиком функции $y = -x^2 + 4x - 4$, имеет вид, изображенный на рисунке 1.120. Неравенство $-x^2 + 4x - 4 > 0$ выполняется при тех значениях x, при которых точки параболы лежат выше оси x. Таких точек нет; значит, неравенство не имеет решений.

Пример 4. Решить неравенство $-3x^2 + x - 5 < 0$.

Решение. Уравнение $-3x^2 + x - 5 = 0$ не имеет действительных корней. Парабола, служащая графиком функции $y = -3x^2 + x - 5$, имеет вид, изображенный на рисунке 1.121. Неравенство $-3x^2 + x - 5 < 0$ выполняется при тех значениях x, при которых точки параболы лежат ниже оси x. Так как вся парабола лежит ниже оси x, то неравенство выполняется при любых значениях x.

182. Неравенства с модулями. При решении неравенств, содержащих переменные под знаком модуля, используют определение модуля:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Иногда полезно воспользоваться геометрической интерпретацией модуля действительного числа, согласно которой $|a|$ означает расстояние точки a координатной прямой от начала отсчета O, а $|a - b|$ означает расстояние между точками a и b на координатной прямой (см. п. 27).

Кроме того, можно использовать метод возведения в квадрат обеих частей неравенства, основанный на следующей теореме.

Теорема 7. Если выражения $f(x)$ *и* $g(x)$ при любых x принимают только неотрицательные значения, то неравенства $f(x) > g(x)$ и $(f(x))^2 > (g(x))^2$ равносильны.

Применяется эта теорема при решении неравенств с модулями так.

Пусть нужно решить неравенство

$$|f(x)| > |g(x)|.$$

Так как при любых x из области определения выражений $f(x)$ и $g(x)$ справедливы соотношения $|f(x)| \geqslant 0$, $|g(x)| \geqslant 0$, $(|f(x)|)^2 = (f(x))^2$ и $(|g(x)|)^2 = (g(x))^2$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$(f(x))^2 > (g(x))^2.$$

Пример 1. Решить неравенство $|x - 1| < 2$.

Решение.

Способ 1-й. $|x - 1|$ можно рассматривать как расстояние на координатной прямой между точками x и 1. Значит, нам нужно указать на координатной прямой все точки x, которые удалены от точки 1 меньше чем на 2 единицы. С помощью координатной прямой (рис. 1.122) устанавливаем, что множество решений неравенства есть интервал $(-1; 3)$.

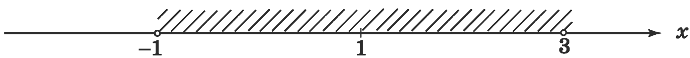


Рис. 1.122

Способ 2-й. Возведя обе части данного неравенства в квадрат, получим равносильное ему неравенство $(x - 1)^2 < 4$. Решая последнее неравенство, получим $x^2 - 2x - 3 < 0$, откуда находим, что $-1 < x < 3$ (см. п. 180 или 181).

Способ 3-й. По определению модуля числа,

$$|x-1| = \begin{cases} x - 1, \text{ если } x - 1 \geqslant 0, \\ -(x - 1), \text{ если } x - 1 < 0, \end{cases}$$

поэтому данное неравенство можно заменить совокупностью двух систем неравенств

$$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0, \\ x - 1 < 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 1 < 0, \\ -(x - 1) < 2. \end{cases}$$

Из первой системы получаем $1 \leqslant x < 3$, из второй системы $-1 < x < 1$. Объединив эти решения, получим промежуток $(-1; 3)$.

П р и м е р 2. Решить неравенство $|2x + 5| \geqslant 7$.

Р е ш е н и е. Имеем $|x + 2{,}5| \geqslant 3{,}5$. Нам нужно указать на координатной прямой все такие точки x, которые удалены от точки $-2{,}5$ на расстояние, большее или равное $3{,}5$. С помощью координатной прямой (рис. 1.123) находим решения: $x \leqslant -6$; $x \geqslant 1$.

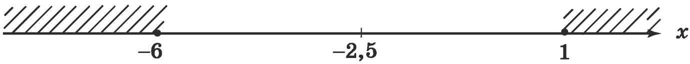


Рис. 1.123

П р и м е р 3. Решить неравенство $|2x - 1| \leqslant |3x + 1|$.

Р е ш е н и е. Возведя обе части неравенства в квадрат, получим неравенство $(2x - 1)^2 \leqslant (3x + 1)^2$, равносильное данному. Преобразовав последнее неравенство, получим $5x^2 + 10x \geqslant 0$, откуда находим $x \leqslant -2$; $x \geqslant 0$.

П р и м е р 4. Решить неравенство $|2x + 4| \leqslant 3x + 2$.

Р е ш е н и е. Если $2x + 4 \geqslant 0$, то $|2x + 4| = 2x + 4$ и, следовательно, неравенство примет вид $2x + 4 \leqslant 3x + 2$. Если же $2x + 4 < 0$, то $|2x + 4| = -(2x + 4)$ и неравенство примет вид $-(2x + 4) \leqslant 3x + 2$. Таким образом, данное неравенство можно заменить совокупностью двух систем неравенств:

$$\begin{cases} 2x + 4 \geqslant 0, \\ 2x + 4 \leqslant 3x + 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 4 < 0, \\ -(2x + 4) \leqslant 3x + 2. \end{cases}$$

Из первой системы находим $x \geqslant 2$, вторая система не имеет решений. Значит, множество решений неравенства — луч $[2; +\infty)$.

183. Решение рациональных неравенств методом промежутков[1]. Решение рациональных неравенств вида $\frac{p(x)}{q(x)} > 0$ (вместо знака $>$ может быть и любой другой знак неравенства), где $p(x)$ и $q(x)$ — многочлены, основано на следующем рассуждении.

Рассмотрим выражение $h(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$, где $a < b < c < d$. Если $x > d$, то каждый из множителей $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$ положителен и, следовательно, на промежутке $(d; +\infty)$ имеем $h(x) > 0$. Если $c < x < d$, то $x - d < 0$, а остальные множители по-прежнему положительны. Значит, на интервале $(c; d)$ имеем $h(x) < 0$. Аналогично, на интервале $(b; c)$ будет $h(x) > 0$ и т. д. (рис. 1.124).

Изменение знаков $h(x)$ удобно иллюстрировать с помощью волнообразной кривой (ее называют «*кривой знаков*»), которую чертят справа налево, начиная сверху (рис. 1.125). Эту иллюстрацию нужно понимать так: на тех промежутках, где эта кривая проходит выше координатной прямой, выполняется неравенство $h(x) > 0$, на тех же промежутках, где кривая проходит ниже прямой, имеем $h(x) < 0$.

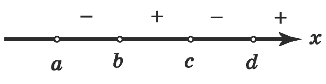


Рис. 1.124

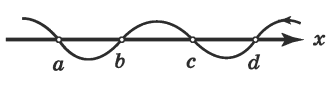


Рис. 1.125

[1] Этот метод иногда называют методом интервалов.

Для проведенного выше рассуждения было несущественно количество линейных множителей в числителе и знаменателе, а также взаимное расположение корней числителя и знаменателя дроби на координатной прямой. Поэтому оно применимо для любой функции $y = f(x)$ вида

$$f(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_k)},$$

где числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_k$ попарно различны. Изменение знаков функции $y = f(x)$ мы также можем иллюстрировать с помощью кривой знаков, которую чертят справа налево, начиная сверху, и проводят через все отмеченные на координатной прямой точки $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_k$. На этом основан *метод промежутков,* который с успехом применяется для решения рациональных неравенств.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{(2x-3)(4x+5)} < 0.$$

Решение. Выполним преобразования левой части неравенства

$$\frac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)\cdot 4\left(x+\frac{5}{4}\right)} < 0$$

и умножим обе части неравенства на 8; получим неравенство $\dfrac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{4}\right)} < 0$ равносильное данному.

Изменение знаков функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \frac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{4}\right)},$$

иллюстрируем с помощью кривой знаков (рис. 1.126). Значения x, при которых $f(x) < 0$ (заштриховано), удовлетворяют следующим неравенствам:

$$x < -5; -\sqrt{2} < x < -\frac{5}{4}; \frac{3}{2} < x < \sqrt{3}.$$

Это решения исходного неравенства.

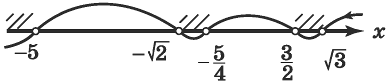


Рис. 1.126

П р и м е р 2. Решить неравенство $\frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1} < 1$.

Р е ш е н и е. Имеем $\frac{x^2-x-6}{x^2-1} - 1 < 0$ и далее $\frac{x+5}{(x-1)(x+1)} > 0$.

Начертим кривую знаков для функции $y = \frac{x+5}{(x-1)(x+1)}$ (рис. 1.127). С ее помощью находим решения неравенства:

$$-5 < x < -1; x > 1.$$

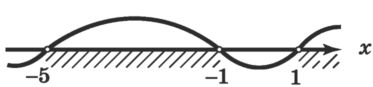


Рис. 1.127

П р и м е р 3. Решить неравенство $\frac{(x-1)^5(x+2)^2}{x} \leqslant 0$.

Р е ш е н и е. Выражение $(x-1)^4(x+2)^2$ обращается в нуль при $x = 1$ и при $x = -2$, а при остальных значениях x оно положительно. Значения $x = 1$ и $x = -2$ удовлетворяют данному нестрогому неравенству, т. е. являются его решениями. Пусть теперь $x \neq 1$, $x \neq -2$, тогда $(x-1)^4(x+2)^2 > 0$, а потому, разделив обе части заданного неравенства на $(x-1)^4 \times$ $\times (x+2)^2$ и сохранив знак заданного неравенства, получим неравенство $\frac{x-1}{x} \leqslant 0$, равносильное исходному (см. п. 174). Полученное неравенство имеет решение $0 < x \leqslant 1$. В ответ нужно включить и отмеченное выше решение $x = -2$.

О т в е т: $0 < x \leqslant 1$; $x = -2$.

184. Показательные неравенства. При решении неравенств вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ следует помнить, что показательная функция $y = a^x$ возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$ (см. п. 94). Значит, в случае, когда $a > 1$, неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$. В случае же, когда $0 < a < 1$, неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$.

П р и м е р 1. Решить неравенство $2^{3x+7} < 2^{2x-1}$.

Р е ш е н и е. Здесь основание степени больше 1, поэтому, сравнивая показатели, запишем неравенство того же смысла $3x + 7 < 2x - 1$. Решив это неравенство, получим $x < -8$.

Пример 2. Решить неравенство $(0{,}04)^{5x - x^2 - 8} \leqslant \leqslant 625$.

Решение. Так как $625 = 25^2 = \left(\frac{1}{25}\right)^{-2} = (0{,}04)^{-2}$, то заданное неравенство можно записать в виде

$$(0{,}04)^{5x - x^2 - 8} \leqslant (0{,}04)^{-2}.$$

Так как $0 < 0{,}04 < 1$, то, сравнивая показатели, запишем неравенство противоположного смысла $5x - x^2 - 8 \geqslant -2$. Далее,

$$5x - x^2 - 8 + 2 \geqslant 0,$$

$$-x^2 + 5x - 6 \geqslant 0,$$

$$x^2 - 5x + 6 \leqslant 0,$$

$$(x - 2)(x - 3) \leqslant 0,$$
$$2 \leqslant x \leqslant 3.$$

185. Логарифмические неравенства. При решении неравенств вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ следует помнить, что логарифмическая функция $y = \log_a x$ возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$ (см. п. 96). Значит, в случае, когда $a > 1$, от исходного неравенства следует перейти к неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$. В случае же, когда $0 < a < 1$, от исходного неравенства следует перейти к неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$. При этом следует учитывать, что логарифмическая функция определена лишь на множестве положительных чисел. Значит, должны выполняться неравенства $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$.

Таким образом, неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ при $a > 1$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases} \qquad (1)$$

а при $0 < a < 1$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \qquad (2)$$

Заметим, что систему (1) можно упростить: неравенство $f(x) > 0$ вытекает из неравенств $f(x) > g(x)$, $g(x) > 0$, поэтому неравенство $f(x) > 0$ можно опустить, т. е. переписать систему (1) в виде

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

Аналогично, систему (2) можно переписать в виде

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Пример 1. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 59) > > -2$.

Решение. Так как $-2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$, то данное неравенство можно переписать в виде $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 59) > > \log_{\frac{1}{3}} 9$. Далее имеем

$$\begin{cases} 2x + 59 > 0, \\ 2x + 59 < 9; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -29{,}5, \\ x < -25, \end{cases}$$

откуда $-29{,}5 < x < -25$.

П р и м е р 2. Решить неравенство $\lg(x + 2) < 2 - \lg(2x - 6)$.

Р е ш е н и е. Чтобы все логарифмы имели смысл, должны выполняться неравенства $x + 2 > 0$ и $2x - 6 > 0$. Используя свойства логарифмов, преобразуем заданное неравенство:

$$\lg(x+2) + \lg(2x-6) < 2,$$

$$\lg(x+2)(2x-6) < \lg 100.$$

Таким образом, заданное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x + 2 > 0, \\ 2x - 6 > 0, \\ (x + 2)(2x - 6) < 100. \end{cases}$$

Имеем последовательно:

$$\begin{cases} x > -2, \\ x > 3, \\ x^2 - x - 56 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 3, \\ (x + 7)(x - 8) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 3, \\ -7 < x < 8. \end{cases}$$

С помощью координатной прямой (рис. 1.128) устанавливаем, что множество решений последней системы, а значит, и заданного неравенства есть интервал (3; 8).

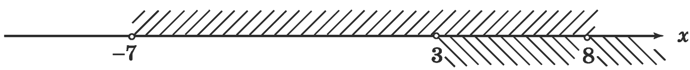


Рис. 1.128

186*. Иррациональные неравенства. При решении *иррациональных неравенств* используется следующее утверждение:

Теорема 8. Если обе части неравенства принимают на некотором множестве X только неотрицательные значения, то, возведя обе части неравенства в квадрат (или в любую четную степень) и сохранив знак исходного неравенства, получим неравенство, равносильное данному (на множестве X).

Возведение обеих частей неравенства в одну и ту же нечетную степень (с сохранением знака неравенства) всегда является равносильным преобразованием неравенства.

Рассмотрим неравенство вида

$$\sqrt{f(x)} < g(x). \tag{1}$$

Ясно, что решение этого неравенства является в то же время решением неравенства $f(x) \geqslant 0$ и решением неравенства $g(x) > 0$ (из неравенства (1) следует, что $g(x) > \sqrt{f(x)} \geqslant 0$). Значит, неравенство (1) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ \sqrt{f(x)} < g(x). \end{cases}$$

Так как при выполнении условий, задаваемых первыми двумя неравенствами этой системы, обе части третьего неравенства системы определены и принимают только неотрицательные значения, их возведение в квадрат есть равносильное преобразование неравенства. Выполнив это преобразование, придем к системе

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^2. \end{cases}$$

Итак, неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^2. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь неравенство вида

$$\sqrt{f(x)} > g(x). \qquad (2)$$

Как и выше, заключаем, что $f(x) \geqslant 0$, но в отличие от предыдущего случая здесь $g(x)$ может принимать как неотрицательные, так и отрицательные значения. Поэтому заданное неравенство (2) рассмотрим в каждом из следующих случаев: $g(x) < 0$, $g(x) \geqslant 0$. Получим совокупность систем неравенств:

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ \sqrt{f(x)} > g(x); \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ \sqrt{f(x)} > g(x). \end{cases}$$

В первой из этих систем можно опустить последнее неравенство — оно вытекает из первых двух неравенств системы. Во второй системе можно выполнить возведение в квадрат обеих частей последнего неравенства.

В итоге приходим к следующему результату: неравенство $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases}$$

П р и м е р 1. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$.

Р е ш е н и е. Это неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x^2 - x - 12 < x^2. \end{cases}$$

Решив систему, находим $x \geqslant 4$.

П р и м е р 2. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 3x + 2} >$
$> x + 3$.

Р е ш е н и е. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x + 3 < 0, \\ x^2 - 3x + 2 \geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3 \geqslant 0, \\ x^2 - 3x + 2 \geqslant 0, \\ x^2 - 3x + 2 > (x + 3)^2. \end{cases}$$

Второе неравенство второй системы можно опустить как следствие третьего неравенства той же системы.

Решив первую систему, получим $x < -3$, из второй системы получаем $-3 \leqslant x < -\frac{7}{9}$. Объединив найденные решения, получим $x < -\frac{7}{9}$.

187. Решение тригонометрических неравенств. Рассмотрим примеры графического решения простейших *тригонометрических неравенств,* т. е. неравенств вида $f(x) > a$ (или $f(x) < a$), где $f(x)$ — одна из тригонометрических функций.

П р и м е р 1. Решить неравенство $\sin x > 0$.

Р е ш е н и е. Построим график функции $y = \sin x$ и выберем на оси x значения аргумента x, которым соответствуют точки графика, лежащие выше оси x. Одним из промежутков, содержащих такие точки оси x, является интервал $(0; \pi)$ (рис. 1.129), а всего таких интервалов будет бесконечно много,

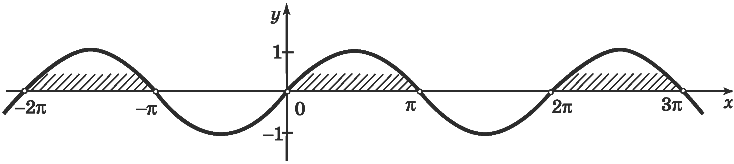


Рис. 1.129

причем в силу периодичности функции $y = \sin x$ каждый из них получается из $(0; \pi)$ сдвигом по оси x на $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, решением заданного неравенства служит объединение интервалов вида $(0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k)$, т. е. $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Это можно записать так:

$$2\pi k < x < \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

П р и м е р 2. Решить неравенство $\cos x < \frac{1}{2}$.

Р е ш е н и е. Построим график функции $y = \cos x$ и проведем прямую $y = \frac{1}{2}$. Нас интересуют те значения аргумента x, которым соответствуют точки графика, лежащие ниже прямой $y = \frac{1}{2}$. Одним из нужных нам промежутков является интервал $\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3}\right)$

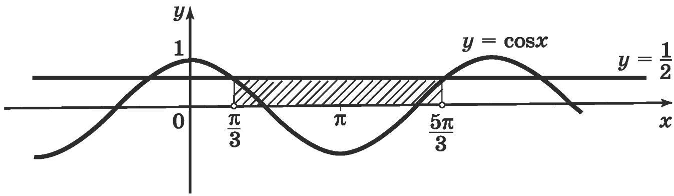


Рис. 1.130

(рис. 1.130). Воспользовавшись периодичностью функции $y = \cos x$, запишем ответ:

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 3. Решить неравенство $\operatorname{tg} x \geqslant -1$.

Решение. Построим график функции $y = \operatorname{tg} x$ и проведем прямую $y = -1$. Нас интересуют те значения x, которым соответствуют точки графика, лежащие не ниже прямой $y = -1$.

Одним из нужных нам промежутков является $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 1.131), а всего таких промежутков будет бесконечно много, причем в силу периодичнос-

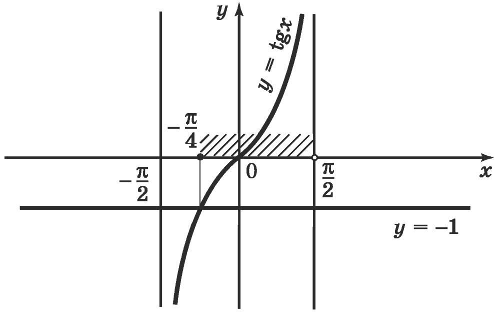


Рис. 1.131

ти функции $y = \operatorname{tg} x$ каждый получается из $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ сдвигом по оси x на πk, где $k \in \boldsymbol{Z}$. Это позволяет записать решение следующим образом:

$$-\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

188. Неравенства и системы неравенств с двумя переменными. Рассмотрим неравенство $f(x;\ y) > g(x;\ y)$. *Решением неравенства с двумя переменными* называют пару значений переменных, которая обращает неравенство с переменными в верное числовое неравенство. Известно, что пара действительных чисел $(x;\ y)$ однозначно определяет точку координатной плоскости. Это дает возможность изобразить решения неравенства или системы неравенств с двумя переменными геометрически, в виде некоторого множества точек координатной плоскости.

П р и м е р 1. Изобразить на координатной плоскости множество решений неравенства $x + y - 1 > 0$.

Р е ш е н и е. Преобразуем данное неравенство к виду $y > -x + 1$. Построим на координатной плоскости прямую $y = -x + 1$. Так как ордината любой точки, лежащей выше прямой $y = -x + 1$, больше, чем ордината точки, имеющей такую же абсциссу, но лежащей на прямой, то множество точек плоскости, расположенных выше этой прямой, и будет геометрическим изображением решений заданного неравенства (рис. 1.132).

П р и м е р 2. Изобразить на координатной плоскости множество решений неравенства $x\,(x - 2) \leqslant y - 3$.

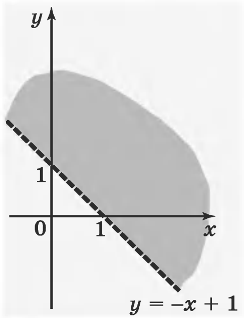


Рис. 1.132

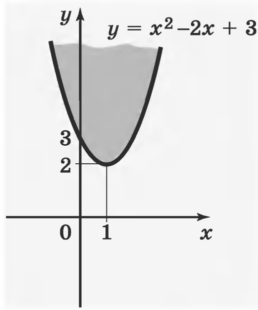


Рис. 1.133

Р е ш е н и е. Преобразуем неравенство к виду $y \geqslant x^2 - 2x + 3$. Построим на координатной плоскости параболу — график функции $y = x^2 - 2x + 3$.

Так как ордината любой точки, лежащей выше параболы $y = x^2 - 2x + 3$, больше, чем ордината точки, имеющей ту же абсциссу, но лежащей на параболе, и так как неравенство $y \geqslant x^2 - 2x + 3$ нестрогое, то геометрическим изображением решений заданного неравенства будет множество точек плоскости, лежащих на параболе $y = x^2 - 2x + 3$ и выше нее (рис. 1.133).

П р и м е р 3. Изобразить на координатной плоскости множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ xy > 4, \\ x + y < 5. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Геометрическим изображением решений системы неравенств $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ является множество точек первого координатного угла (рис. 1.134). Геометрическим изображением решений неравенства $x + y < 5$ или $y < 5 - x$ является множество точек, лежащих ниже прямой, служащей графиком функции $y = 5 - x$ (рис. 1.135). Наконец, геометрическим изображением решений неравенства $xy > 4$ или, поскольку $x > 0$, неравенства $y > \dfrac{4}{x}$ является множество точек, лежащих выше ветви гиперболы, служащей графиком функции $y = \dfrac{4}{x}$ (рис.1.136). В итоге получаем множество точек координатной плос-

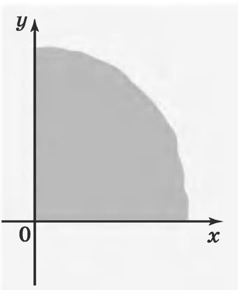


Рис. 1.134

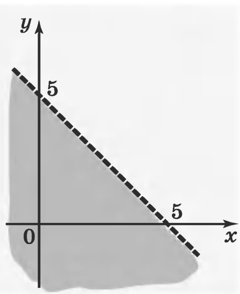


Рис. 1.135

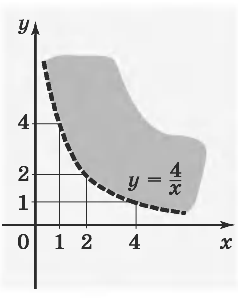


Рис. 1.136

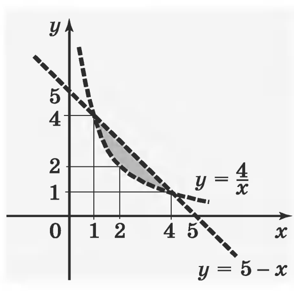


Рис. 1.137

кости, лежащих в первом координатном углу ниже прямой, служащей графиком функции $y = 5 - x$, и выше гиперболы, служащей графиком функции $y = \frac{4}{x}$ (рис. 1.137).

§ 18. Доказательство неравенств

189. Метод оценки знака разности. Суть этого метода заключается в следующем: для того, чтобы установить справедливость неравенства $f(x; y; z) > g(x; y; z)$ ($f < g$, $f \geqslant g$, $f \leqslant g$), составляют разность $f(x; y; z) - g(x; y; z)$ и доказывают, что она положительна (соответственно отрицательна, неотрицательна, неположительна).

Пример. Доказать, что если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, то

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$$

(*среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического*; это неравенство называют *неравенством Коши*).

Решение. Составим разность $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy}$. Имеем:

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}.$$

Неравенство $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0$ верно при любых неотрицательных значениях x и y. Значит, $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$, причем равенство имеет место лишь в случае $x = y$.

Из неравенства Коши, в частности, следует неравенство $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$, справедливое для всех $x > 0$.

190. Синтетический метод доказательства неравенств. Суть этого метода заключается в следующем: с помощью ряда преобразований выводят требуемое неравенство из некоторых известных (опорных) неравенств. Опорными неравенствами являются, например, такие:

1) $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$, где $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ (неравенство Коши);

2) $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$, где $x > 0$;

3) $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$;

4) $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$.

Пример. Доказать, что $\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$, где a, b, c, d — неотрицательные числа.

Решение. Используем здесь в качестве опорного неравенство Коши, составленное для неотрицательных чисел $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{c+d}{2}$. Имеем $\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}}$. Применив теперь неравенство Коши к числам a и b, а также к числам c и d, получим

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}} \geqslant \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}.\ \text{Но}\ \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}.$$

Таким образом, $\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$.

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a = b = c = d$.

191. Доказательство неравенств методом от противного. Суть этого метода заключается в следующем. Пусть нужно доказать истинность неравенства

$$f(x; y; z) > g(x; y; z) \qquad (1)$$

для любых x, y, z.

Предполагают противное, т. е. что хотя бы для одного набора переменных справедливо неравенство

$$f(x; y, z) \leqslant g(x; y; z). \qquad (2)$$

Используя свойства неравенств, выполняют преобразования неравенства (2). Если в результате этих преобразований получается неверное неравенство, то это означает, что предположение о справедливости неравенства (2) неверно, а потому верно неравенство (1).

Пример 1. Доказать, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $d \geqslant 0$, то

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

Решение. Предположим противное, т. е. что для некоторого набора неотрицательных значений a, b, c, d справедливо неравенство

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} < \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

Возведем обе его части в квадрат. Получим

$$ab + bc + ad + cd < ab + 2\sqrt{abcd} + cd,$$

откуда $bc + ad < 2\sqrt{abcd}$ и далее $\frac{bc+ad}{2} < \sqrt{abcd}$.

Но это противоречит неравенству Коши, составленному для неотрицательных чисел bc и ad.

Значит, наше предположение неверно, т. е. для любых неотрицательных значений a, b, c, d справедливо неравенство

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

Пример 2. Доказать неравенство

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) \leqslant \cos^2\alpha.$$

Решение. Предположим противное, т. е. предположим, что существуют такие α и β, для которых выполняется неравенство

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) > \cos^2\alpha.$$

Воспользовавшись формулами

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \frac{\cos 2\beta + \cos 2\alpha}{2}$$

(см. п. 131) и

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

(см. п. 129), получим $\dfrac{\cos 2\beta + \cos 2\alpha}{2} > \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$, откуда $\cos 2\beta > 1$. Так как на самом деле $\cos 2\beta \leqslant 1$ при любых значениях β, то мы получили противоречие. Значит, наше предположение неверно, а потому справедливо неравенство $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) \leqslant \cos^2\alpha$.

192*. Использование неравенств при решении уравнений.

Пусть нужно решить уравнение $f(x) = g(x)$, и пусть существует такое число A, которое является одновременно наибольшим значением функции $y =$

$= f(x)$ и наименьшим значением функции $y = g(x)$. Тогда *корнями уравнения* $f(x) = g(x)$ являются *общие корни уравнений* $f(x) = A$, $g(x) = A$, *и только они*. Этот метод является частным случаем функционального метода решения уравнений (см. п. 159).

Пример. Решить уравнение $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 - (x-1)^4$.

Решение. С одной стороны, $x^2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 2$ при всех $x \neq 0$ (см. п. 189). С другой стороны, при всех x выполняется неравенство $2 - (x - 1)^4 \leqslant 2$. Значит, корнями данного уравнения будут общие корни уравнений $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$ и $2 - (x - 1)^4 = 2$ (если, конечно, такие общие корни есть; если их нет, то уравнение не имеет корней).

Из уравнения $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$ находим $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Из уравнения $2 - (x - 1)^4 = 2$ находим $x = 1$.

Общим корнем этих уравнений является значение $x = 1$, оно и является единственным корнем заданного уравнения.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

§ 19. Числовые последовательности

193. Определение последовательности. Если каждому натуральному числу поставлено в соответствие определенное действительное число (числу 1 соответствует число a_1, числу 2 — число a_2, числу 3 — число a_3, ..., числу n — число a_n и т. д.), то говорят, что задана *числовая последовательность,* и пишут a_1, a_2, ..., a_n, ... *или* (a_n). Числа a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... называют *членами числовой последовательности*: a_1 — первый член, a_2 — второй член, ..., a_n — n-й член последовательности.

П р и м е р 1. $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots$. Эта последовательность построена таким образом: каждому натуральному числу соответствует его квадрат. Здесь $a_n = n^2$.

П р и м е р 2. Для любой бесконечной десятичной дроби можно построить последовательность ее десятичных приближений по недостатку или по избытку. Например, для числа $e = 2{,}71828\ldots$ последовательность десятичных приближений по недостатку имеет вид

$$2; \quad 2{,}7; \quad 2{,}71; \quad 2{,}718; \quad 2{,}7182; \quad 2{,}71828; \ldots .$$

194. Способы задания последовательности. Имеется три основных способа задания последовательности.

1. *Аналитический способ.* Последовательность задается формулой n-го члена. Например, форму-

лой $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ задается последовательность a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ..., у которой

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2};\ a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3};\ a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}, \ldots,$$

т. е. последовательность $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots$.

2. *Рекуррентный способ.* Любой член последовательности начиная с некоторого выражается через предшествующие члены. При этом способе задания последовательности указывают ее первый член (или несколько начальных членов) и формулу, позволяющую определить любой член последовательности по известным предшествующим членам.

Пример: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.

Имеем

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2; \quad a_6 = a_4 + a_5 = 3 + 5 = 8;$$
$$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3; \quad a_7 = a_5 + a_6 = 5 + 8 = 13;$$
$$a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5; \quad a_8 = a_6 + a_7 = 8 + 13 = 21\ldots .$$

В итоге получаем последовательность

$$1,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 5,\quad 8,\quad 13,\quad 21,\quad 34, \ldots .$$

Каждый ее член, кроме первых двух, равен сумме двух предшествующих ему членов.

3. *Словесный способ.* Задание последовательности словесным описанием. Такова, например, последовательность десятичных приближений числа e по недостатку (см. п. 193).

195. Возрастание и убывание последовательности. Последовательность (a_n) называют *возрастающей,* если каждый ее член меньше следующего за ним, т. е. если $a_n < a_{n+1}$ для любого n. Последовательность (a_n) называют *убывающей*, если каждый ее член больше следующего за ним, т. е. если $a_n > a_{n+1}$ для любого n.

Рассмотрим примеры.

1) $1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2, \ldots$ — возрастающая последовательность.

2) $2, 5, 8, 11, 14, \ldots, 3n-1, \ldots$ — возрастающая последовательность.

3) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ — возрастающая последовательность.

4) $-1, -2, -3, -4, \ldots, -n, \ldots$ — убывающая последовательность.

5) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ — убывающая последовательность.

6) $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \ldots, (-1)^n \cdot n, \ldots$— эта последовательность не является ни возрастающей, ни убывающей.

7) $3, 3, 3, 3, \ldots, 3, \ldots$— это *постоянная*, или *стационарная*, последовательность.

196. Определение арифметической прогрессии. Последовательность (a_n), каждый член которой начиная со второго равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d, называют *арифметической прогрессией*. Число d — *разность прогрессии*. Таким образом, арифметическая прогрессия есть последовательность, заданная рекуррентно (см. п. 194) равенством

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Например, $a_5 = a_4 + d$; $a_{94} = a_{93} + d$ и т. д.

При $d > 0$ арифметическая прогрессия возрастает, при $d < 0$ убывает.

П р и м е р 1. Последовательность 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... — арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 3$, $d = 2$.

П р и м е р 2. Дано: $a_1 = -2$, $d = 0,5$. Этими условиями задается арифметическая прогрессия, у которой $a_2 = -2 + 0,5 = -1,5$;

$$a_3 = a_2 + d = -1,5 + 0,5 = -1;$$
$$a_4 = a_3 + d = -1 + 0,5 = -0,5;$$

$a_5 = a_4 + d = -0,5 + 0,5 = 0$; $a_6 = a_5 + d = 0 + 0,5 = 0,5$.

Получаем арифметическую прогрессию

$$-2; \quad -1,5; \quad -1; \quad -0,5; \quad 0; \quad 0,5; \ldots .$$

П р и м е р 3. Постоянная последовательность 2, 2, 2, 2, ..., 2, ... является арифметической прогрессией, у которой $a_1 = 2$, $d = 0$.

Иногда рассматривают не всю последовательность, являющуюся арифметической прогрессией, а лишь ее первые несколько членов. В этом случае говорят о *конечной арифметической прогрессии.*

Для указания того, что последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, иногда используется обозначение

$$\div a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

197. Свойства арифметической прогрессии.

1°. *Формула n-го члена арифметической прогрессии:*

$$a_n = a_1 + d\,(n - 1).$$

2°. ***Формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии:***

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \tag{1}$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n. \tag{2}$$

Здесь $S_1 = a_1$, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.

3°. ***Характеристическое свойство арифметической прогрессии.*** Последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, кроме первого (и последнего в случае конечной арифметической прогрессии), равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n\ 1}}{2}.$$

П р и м е р 1. Спортсмен за первую минуту бега пробежал 400 м, а в каждую следующую минуту пробегал на 5 м меньше, чем в предыдущую. Какой путь пробежал он за 1 ч?

Р е ш е н и е. За первую минуту бегун пробежал 400 м, за вторую — 395 м, за третью — 390 м и т. д. Числа 400, 395, 390, ... образуют арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 400$, $d = -5$. Путь за 1 ч, т. е. за 60 мин, равен сумме первых 60 членов прогрессии. Применив формулу (2), получим

$$S_{60} = \frac{2a_1 + d \cdot 59}{2} \cdot 60 = \frac{800 - 59 \cdot 5}{2} \cdot 60 = 15\,150.$$

Итак, за 1 ч бегун пробежит 15 км 150 м.

П р и м е р 2. При делении 13-го члена арифметической прогрессии на ее 3-й член в частном получается 3, а при делении 18-го члена на 7-й член в частном получается 2 и в остатке 8. Найти 20-й член прогрессии.

Р е ш е н и е. Из условия следует, что $a_{13} = 3a_3$, а $a_{18} = 2a_7 + 8$ (см. п. 3). По формуле n-го члена имеем $a_3 = a_1 + 2d$, $a_{13} = a_1 + 12d$, $a_7 = a_1 + 6d$, $a_{18} = a_1 + 17d$. В итоге приходим к системе двух уравнений с двумя переменными a_1 и d:

$$\begin{cases} a_1 + 12d = 3(a_1 + 2d), \\ a_1 + 17d = 2(a_1 + 6d) + 8. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$\begin{cases} a_1 = 3d, \\ a_1 = 5d - 8, \end{cases}$$

откуда $d = 4$, $a_1 = 12$. Зная a_1 и d, нетрудно найти a_{20}:

$$a_{20} = a_1 + 19d = 12 + 19 \cdot 4 = 88.$$

198. Определение геометрической прогрессии. Последовательность (b_n), первый член которой отличен от нуля и каждый член начиная со второго равен предыдущему, умноженному на одно и то же отличное от нуля число q, называют *геометрической прогрессией*. Число q — *знаменатель прогрессии*. Таким образом, геометрическая прогрессия есть последовательность, заданная рекуррентно (см. п. 193) равенством

$$b_{n+1} = b_n q,$$

где $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$. Например, $b_7 = b_6 q$, $b_{54} = b_{53} q$.

Пример 1. Последовательность 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... — это геометрическая прогрессия, у которой $b_1 = 1$, $q = 2$.

Пример 2. Последовательность 100, 30, 9, $\frac{27}{10}$, $\frac{81}{100}$, $\frac{243}{1000}$, ... — это геометрическая прогрессия, у которой $b_1 = 100$, $q = \frac{3}{10}$.

Пример 3. Дано: $b_1 = 2$, $q = -3$. Этими условиями задается геометрическая прогрессия, у которой $b_2 = b_1q = 2 \cdot (-3) = -6$; $b_3 = b_2q = (-6) \cdot (-3) = 18$; $b_4 = b_3q = 18 \cdot (-3) = -54$; $b_5 = b_4q = (-54) \cdot (-3) = 162$, ... Получаем геометрическую прогрессию

$$2, -6, 18, -54, 162, \ldots .$$

Пример 4. Постоянная последовательность 2, 2, 2, 2, ..., 2, ... является геометрической прогрессией, у которой $b_1 = 2$, $q = 1$.

Иногда рассматривают не всю последовательность, являющуюся геометрической прогрессией, а лишь ее первые несколько членов. В этом случае говорят о *конечной геометрической прогрессии.*

Для указания того, что последовательность (b_n) является геометрической прогрессией, иногда используется обозначение

$$\div\!\!\div\, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots .$$

199. Свойства геометрической прогрессии.

1°. *Формула n-го члена геометрической прогрессии:*

$$b_n = b_1q^{n-1}.$$

2°. ***Формулы суммы первых n членов геометрической прогрессии:***

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1};$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}.$$

Здесь $S_1 = b_1$, $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$, $q \neq 1$; если $q = 1$, то $S_n = nb_1$.

3°. *Характеристическое свойство геометрической прогрессии.* Последовательность является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, кроме первого (и последнего в случае конечной геометрической прогрессии), связан с предыдущим и последующим членами формулой

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Пример 1. Найти 8-й член геометрической прогрессии, у которой $b_1 = 3$, $b_n = 96$, $S_n = 189$.

Решение. Так как $b_n = b_1 q^{n-1}$ (свойство 1°), то получаем $96 = 3q^{n-1}$, $q^{n-1} = 32$ или $q^n = 32q$.

С другой стороны, по свойству 2°, $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$,

откуда находим

$$189 = \frac{3(q^n - 1)}{q-1}, \quad \text{или} \quad \frac{q^n - 1}{q-1} = 63. \qquad (1)$$

Но $q^n = 32q$ (см. выше). Подставив это выражение в равенство (1), получим

$$\frac{32q - 1}{q-1} = 63,\ 32q - 1 = 63q - 63,\ q = 2.$$

Зная b_1 и q, найдем b_8:

$$b_8 = b_1 q^7 = 3 \cdot 2^7 = 384.$$

П р и м е р 2. Три числа образуют конечную геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то новая тройка чисел будет представлять собой конечную арифметическую прогрессию. Если третье число этой новой тройки увеличить на 9, то снова получится геометрическая прогрессия. Найти первую тройку чисел.

Р е ш е н и е. Обозначим искомые три числа b_1, b_2, b_3.

Используя обозначения $\div$ для арифметической прогрессии и $\div\!\!\div$ для геометрической прогрессии, запишем условие следующим образом:

$$1)\ \div\!\!\div\ b_1, b_2, b_3.$$
$$2)\ \div\ b_1, b_2 + 2, b_3.$$
$$3)\ \div\!\!\div\ b_1, b_2 + 2, b_3 + 9.$$

Воспользовавшись характеристическими свойствами арифметической (свойство 3°, п. 197) и геометрической (свойство 3°, п. 199) прогрессий, получим соответственно:

$$1)\ b_2^2 = b_1 \cdot b_3;\ \ 2)\ b_2 + 2 = \frac{b_1 + b_2}{2};\ \ 3)\ (b_2 + 2)^2 = b_1(b_3 + 9).$$

Так как $b_2 = b_1 q$, а $b_3 = b_1 q^2$, то:

$$1)\ b_1^2 q^2 = b_1 b_1 q^2;\ 2)\ b_1 q + 2 = \frac{b_1 + b_1 q^2}{2};\ 3)\ (b_1 q + 2)^2 = b_1(b_1 q^2 + 9).$$

Первое условие как тождественное равенство можно опустить. Мы приходим к системе двух уравнений с двумя переменными b_1 и q:

$$\begin{cases} 2(b_1 q + 2) = b_1 + b_1 q^2, \\ (b_1 q + 2)^2 = b_1(b_1 q^2 + 9). \end{cases}$$

Имеем далее

$$\begin{cases} b_1(1+q^2-2q)=4, \\ b_1(9-4q)=4. \end{cases}$$

Выразим b_1 через q из второго уравнения системы $b_1 = \dfrac{4}{9-4q}$. Подставим это выражение вместо b_1 в первое уравнение системы, получим $\dfrac{1+q^2-2q}{9-4q}=1$, откуда находим $q_1 = 2$, $q_2 = -4$.

Следовательно, $b_1 = 4$ при $q = 2$ и $b_1 = \dfrac{4}{25}$ при $q = -4$.

Значит, условию задачи удовлетворяют две тройки чисел:

1) 4, 8, 16 (при $b_1 = 4$, $q = 2$);

2) $\dfrac{4}{25}, -\dfrac{16}{25}, \dfrac{4}{25}$ (при $b_1 = \dfrac{4}{25}$, $q = -4$).

200. Понятие о пределе последовательности. Число b называют *пределом последовательности* (a_n), если, какое бы положительное число ни взять (это число обычно обозначают ε — греческая буква «эпсилон»), найдется номер N, начиная с которого (т. е. при $n \geqslant N$) выполняется неравенство

$$|a_n - b| < \varepsilon.$$

Пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, или $a_n \to b$. Говорят, что последовательность (a_n) *сходится к* b.

Геометрический смысл предела последовательности заключается в следующем. Если b — предел последовательности (a_n), то, какую бы окрестность точки b ни выбрать, вся последовательность начиная с некоторого номера N будет изображаться точками, принадлежащими этой окрестности; *окрестность точки b* — это интервал с центром в точке b (рис. 1.138).

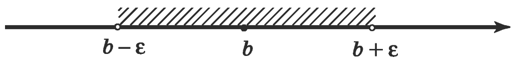


Рис. 1.138

Примеры.

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...$. Чем больше номер члена последовательности, тем меньше этот член отличается от числа 0. Эта последовательность сходится, предел ее равен 0, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ..., \frac{n}{n+1}, ...$. Члены этой последовательности по мере увеличения номера все меньше и меньше отличаются от числа 1. Эта последовательность сходится, причем $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

В самом деле, $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$. Какое бы $\varepsilon > 0$ ни взять, найдется номер N такой, что для всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Чтобы найти такое N, достаточно решить неравенство $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ и взять в качестве N любое натуральное число, удовлетворяющее этому неравенству.

3) $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, ..., \frac{1}{3^n}, ...$. Эта последовательность сходится, ее предел равен 0, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{3^n} = 0$.

4) 2, 0, 3, 2, 0, 3, 2, 0, 3, ... Эта последовательность не сходится, не имеет предела.

5) Постоянная последовательность $a, a, a, \ldots, a, \ldots$ сходится к пределу a, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} a = a$.

201. Вычисление пределов последовательностей. Для вычисления пределов последовательностей используются такие утверждения.

1) Последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)$ сходится к числу 0 (см. пример 1) из п. 200):

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2) Последовательность q^n, где $|q| < 1$, сходится к числу 0 (см. пример 3) из п. 200, где $q = \frac{1}{3}\Big)$:

$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0, \text{ если } |q| < 1.$$

3) $\lim\limits_{n \to \infty} a = a$ (см. пример 5) из п. 200.

Теорема 1. Если $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, а $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$, то:

а) $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$;

б) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n b_n = ab$;

в) если $b \neq 0$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

П р и м е р 1. Вычислить $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2}$.

Р е ш е н и е. Так как $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$, а $\frac{1}{n} \to 0$, то $\frac{1}{n^2} \to 0 \cdot 0 = 0$. Итак, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Аналогично устанавливается, что $\frac{1}{n^k} \to 0$ для любого натурального k.

П р и м е р 2. Вычислить $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2 + n + 2}{2n^2 - n - 1}$.

Р е ш е н и е. Разделим почленно числитель и знаменатель данной дроби на наивысшую (из имеющихся) степень переменной n, т. е. на n^2. Получим

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} + \frac{2}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2} - \frac{n}{n^2} - \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}.$$

Воспользовавшись тем, что $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} a = a$, и теоремой об арифметических операциях над пределами, получим

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + n + 2}{2n^2 - n - 1} = \frac{1 + 0 + 2 \cdot 0}{2 - 0 - 0} = \frac{1}{2}.$$

202. Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$. Пусть $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ — бесконечная геометрическая прогрессия, у которой $|q| < 1$. Рассмотрим сумму первых ее n членов: $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Имеем (см. п. 199):

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Вычислим $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{b_1}{q - 1}(q^n - 1) =$$
$$= \frac{b_1}{q - 1}(0 - 1) = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Итак, для бесконечной геометрической прогрессии, у которой $|q| < 1$, существует $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$. Этот предел называют *суммой бесконечной геометрической прогрессии* и обозначают S:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

П р и м е р. Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$ равна 9, а сумма квадратов ее членов равна 40,5. Найти сумму первых шести членов прогрессии.

Р е ш е н и е. Обозначим заданную прогрессию так:

$$\div\div\, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots .$$

По условию, ее сумма равна 9, т. е. $\dfrac{b_1}{1 - q} = 9$.

Рассмотрим последовательность b_1^2, b_2^2, b_3^2, ..., b_n^2, ... Каждый ее член получается из предыдущего умножением на q^2, т. е. это геометрическая прогрессия $B_1, B_2\ B_3, \ldots, B_n, \ldots$, у которой первый член равен b_1^2, т. е. $B_1 = b_1^2$, а знаменатель Q равен q^2, т. е. $Q = q^2$. Так как $|q^2| < 1$, т. е. $|Q| < 1$, сумма новой прогрессии равна $\frac{B_1}{1-Q}$. По условию, эта сумма равна 40,5.

Значит, в итоге приходим к системе двух уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q} = 9, \\ \dfrac{b_1^2}{1-q^2} = 40{,}5. \end{cases}$$

Выразим b_1 из первого уравнения: $b_1 = 9(1 - q)$. Подставив результат во второе уравнение, получим $\frac{81(1-q)^2}{1-q} = \frac{81}{2}$, откуда

$$\frac{1-q}{1+q} = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{3}.$$

Тогда $b_1 = 9\,(1 - q) = 9\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 6$. Теперь можно найти сумму первых шести членов прогрессии:

$$S_6 = \frac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{6\left(\left(\frac{1}{3}\right)^6 - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} = 8\frac{80}{81}.$$

§ 20. Предел функции

203. Предел функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$. Горизонтальная асимптота. Число b называют *пределом функции $y = f(x)$ при стремлении x к $+\infty$*, если, какое бы число $\varepsilon > 0$ ни взять, найдется число $M > 0$ такое, что для всех $x > M$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Пишут $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

Геометрически это означает, что график функции $y = f(x)$ при выборе достаточно больших значений x безгранично приближается к прямой $y = b$ (рис. 1.139), т. е. расстояние от точки графика до прямой $y = b$ по мере удаления абсциссы x от начала координат может быть сделано меньше любого числа $\varepsilon > 0$. Прямую $y = b$ называют в этом случае *горизонтальной асимптотой графика функции* $y = f(x)$ (при $x \to +\infty$).

Возьмем для примера функцию $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Для этой функции имеем $f(5) = \frac{1}{32}$; $f(10) = \frac{1}{1024}$; $f(100) = \frac{1}{2^{100}}$; $f(1000) = \frac{1}{2^{1000}}$. Замечаем, что чем больше выбирается значение аргумента, тем меньше отличается от нуля значение функции, причем это отличие можно сделать меньше любого наперед заданного положительного числа ε. Значит, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$. Это подтверждается и геометрически: прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 1.140).

Прямая $y = b$ может быть горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ и при выборе достаточно больших по модулю, но отрицательных значений

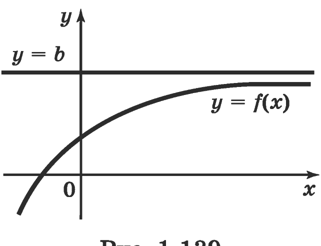


Рис. 1.139

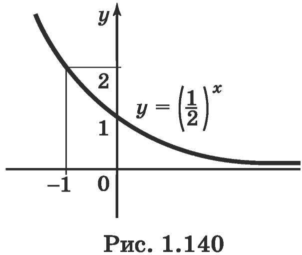


Рис. 1.140

аргумента (рис. 1.141). Тогда говорят, что число b является пределом функции $y = f(x)$ *при стремлении x к* $-\infty$, и пишут $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$. Например, $\lim\limits_{x \to -\infty} (3 + 2^x) = 3$ (рис. 1.142).

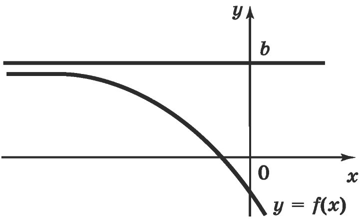


Рис. 1.141

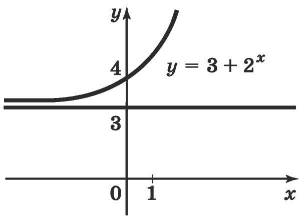


Рис. 1.142

Наконец, прямая $y = b$ может быть горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$. Так, прямая $y = 1$ — горизонтальная асимптота графика функции $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ (рис. 1.143). В этом случае говорят, что число b является пределом функции $y = f(x)$ при стремлении x к ∞, и пишут $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$. Так, верны равенства

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1, \ \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

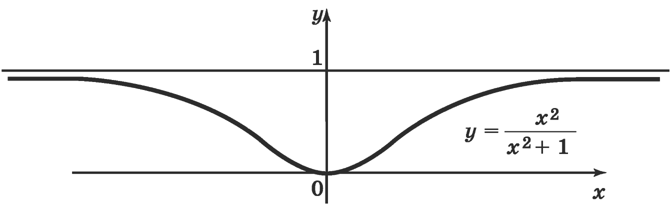


Рис. 1.143

Число b называют *пределом функции* $y = f(x)$ *при стремлении* x к $-\infty$, если, какое бы число $\varepsilon > 0$ ни взять, найдется число $M > 0$ такое, что для всех $x < -M$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Число b называют *пределом функции* $y = f(x)$ *при стремлении* x *к* ∞, если, какое бы число $\varepsilon > 0$ ни взять, найдется число $M > 0$ такое, что для всех x таких, что $|x| > M$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Зная предел функции при $x \to \infty$, можно построить горизонтальную асимптоту графика (если предел равен b, то $y = b$ — горизонтальная асимптота); обратно: если известна горизонтальная асимптота графика функции, можно сделать вывод о ее пределе при $x \to \infty$ (если $y = b$ — горизонтальная асимптота, то $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$).

204. Вычисление пределов функций при $x \to \infty$. Для вычисления пределов функций при $x \to \infty$ используют теоремы об арифметических операциях над пределами.

Теорема 2. Если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = b$, то $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) + g(x)) = a + b$ (*теорема о пределе суммы*).

Теорема 3. Если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = b$, то $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)g(x) = ab$ (*теорема о пределе произведения*).

Теорема 4. Если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$, то $\lim\limits_{x \to \infty} kf(x) = ka$ (*теорема о вынесении постоянного множителя за знак предела*).

Теорема 5. *Если* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = b$ и $b \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$ (*теорема о пределе частного*).

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^3 - 2x^2 + x + 3}{x^3 + 4}$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель почленно на x^3, получим $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}}{1 + \dfrac{4}{x^3}}$ и далее

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3 - 2 \cdot \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{x} + 3 \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{x}}{1 + 4 \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{x}}.$$

Так как $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$ (см. п. 203), то, воспользовавшись теоремами 2-5, получим $\dfrac{3 - 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{1 + 4 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0} = 3$. Итак,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + x + 3}{x^3 + 4} = 3.$$

Пример 2. Найти горизонтальную асимптоту графика функции $y = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$ при $x \to +\infty$.

Решение. Чтобы найти горизонтальную асимптоту, надо вычислить предел функции при $x \to +\infty$. Имеем

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} =$$

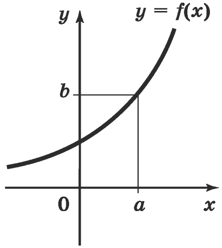
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = 0.$$

Значит, $y = 0$ — горизонтальная асимптота графика функции $y = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$.

205. Предел функции при $x \to a$. Непрерывные функции. Рассмотрим функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ и $y = h(x)$, графики которых изображены на рисунках 1.144-1.146. Это разные функции, они отличаются своим поведением в точке $x = a$. Если же $x \neq a$, то $f(x) = g(x) = h(x)$. Во всех трех случаях замечаем, что чем ближе x к a, тем меньше отличается значение функции $f(x)$, или $g(x)$, или $h(x)$ от числа b — это отличие характеризуется выражением соответственно $|f(x) - b|$, $|g(x) - b|$, $|h(x) - b|$. Для любой из рассматриваемых функций говорят, что *предел функции при стремлении x к a равен b*; пишут соответственно: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$.

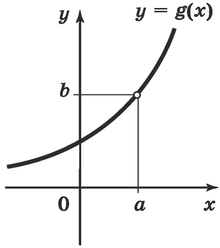
Подчеркнем еще раз, что значение функции в самой точке a (и даже сам факт существования или несуществования этого значения) не принимается во внимание.

Определение формулируется так: число b называют пределом функции $y = f(x)$ при стремлении x к a, если, какое бы число $\varepsilon > 0$ ни взять, для всех достаточно близких к a значений x, т. е. для всех x из некоторой окрестности точки a, исключая, быть может, саму эту точку, будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.



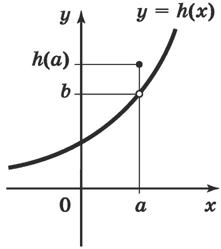
а)

Рис. 1.144



б)

Рис. 1.145



в)

Рис. 1.146

Вернемся еще раз к рисунку 1.144. Замечаем, что для функции $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 1.144, выполняется равенство $b = f(a)$, т. е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, то функцию $y = f(x)$ называют *непрерывной в точке a*. Если функция непрерывна в каждой точке интервала $(a; b)$, то ее называют *непрерывной на этом интервале*. Если функция непрерывна на интервале $(a; b)$, определена в точках a и b и при стремлении точки x интервала $(a; b)$ к точкам a и b значения функции $y = f(x)$ стремятся соответственно к значениям $f(a)$, $f(b)$, то функцию $y = f(x)$ называют *непрерывной на отрезке* $[a; b]$.

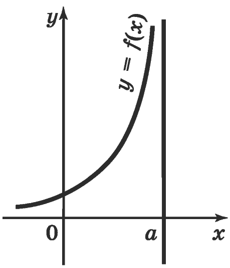


Рис. 1.147

206. Вертикальная асимптота. График функции $y = f(x)$, изображенный на рисунке 1.147, обладает следующей особенностью: какое бы число $p > 0$ ни взять, можно указать такую окрестность точки a, что для любого x из этой окрестности $(x \neq a)$ соответствующая ордината графика по модулю будет больше p, т. е. $|f(x)| > p$. Говорят, что прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой графика функции* $y = f(x)$, и пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Например, график функции $y = \dfrac{1}{x}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ и горизонтальную асимптоту $y = 0$ (рис. 1.148); график функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ (рис. 1.149);

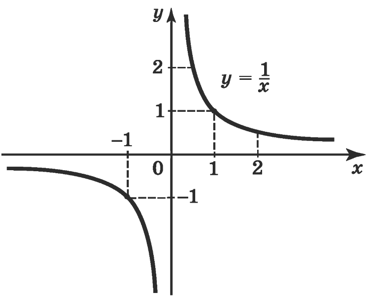


Рис. 1.148

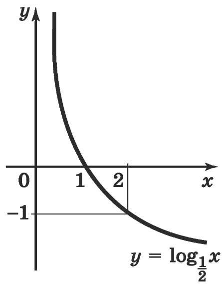


Рис. 1.149

график функции $y = \operatorname{tg} x$ имеет вертикальные асимптоты $x = \frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = -\frac{3\pi}{2}$ и т. д.

Если $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ и в точке a функции $y = p(x)$, $y = q(x)$ непрерывны, причем $p(a) \neq 0$, $q(a) = 0$, то $x = a$ — вертикальная асимптота графика функции $y = f(x)$.

Например, график функции $y = \frac{1}{x^2 - 9}$ имеет две вертикальные асимптоты: $x = 3$ и $x = -3$ (рис. 1.150) — при указанных значениях x знаменатель $x^2 - 9$ обращается в нуль.

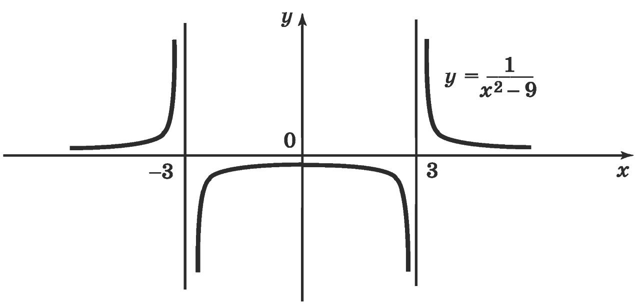


Рис. 1.150

207. Вычисление пределов функций при $x \to a$. Для вычисления пределов функций в точке основными являются следующие факты.

1) Любая элементарная функция, т. е. функция, заданная аналитически рациональным (см. п. 48), иррациональным (см. п. 48), трансцендентным (см. п. 118) выражением или выражением, составленным из перечисленных с помощью конечного числа арифметических операций, непрерывна в любой внутренней точке области определения функции (т. е. в любой точке, принадлежащей области определения функции вместе с некоторой своей окрестностью); если $x = a$ — внутренняя точка области определения сложной функции $y = f(g(x))$, то и сложная функция $y = f(g(x))$ непрерывна в точке a.

2) Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, то

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

П р и м е р 1. Вычислить $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} + x^2}{2x + 1}$.

Р е ш е н и е. Точка $x = 4$ — внутренняя точка области определения функции $y = f(x)$, где $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + x^2}{2x + 1}$; значит, функция непрерывна в этой точке. Имеем $f(4) = \dfrac{\sqrt{4} + 4^2}{2 \cdot 4 + 1} = 2$. Значит,

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} + x^2}{2x + 1} = 2.$$

П р и м е р 2. Вычислить $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{\cos^2 x + \operatorname{tg} x}$.

Р е ш е н и е. Функция $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x + \operatorname{tg} x}$ определена, а значит, непрерывна в точке $x = \pi$, поэтому

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x + \operatorname{tg} x} = f(\pi) = \frac{\sin \pi}{\cos^2 \pi + \operatorname{tg} \pi} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

П р и м е р 3. Вычислить $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2+9}{x^2-5x+6}$.

Р е ш е н и е. Функция $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{x^2+9}{x^2-5x+6}$, не определена в точке $x = 3$, так как в этой точке знаменатель дроби обращается в нуль. Но числитель $x^2 + 9$ отличен от нуля в точке $x = 3$, поэтому $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2+9}{x^2-5x+6} = \infty$ (см. п. 206); прямая $x = 3$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = \frac{x^2+9}{x^2-5x+6}$.

П р и м е р 4. Вычислить $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$.

Р е ш е н и е. Здесь в отличие от предыдущего примера и числитель, и знаменатель обращаются в 0 при $x = 3$. В подобных случаях для вычисления предела необходимы тождественные преобразования выражения, задающего функцию.

Имеем $\frac{x^2-9}{x^2-5x+6} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}$. Поскольку при $x \to 3$ значение функции в самой точке $x = 3$ не принимается во внимание (см. п. 205), дробь можно сократить на $x-3$, получим $\frac{x+3}{x-2}$. Итак,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x-2}=$$
$$=\frac{3+3}{3-2}=6.$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{7-x}-3}$.

Решение. При $x=-2$ и числитель, и знаменатель обращаются в нуль. Выполним следующие преобразования заданного выражения:

$$\frac{x+2}{\sqrt{7-x}-3}=\frac{(x+2)(\sqrt{7-x}+3)}{(\sqrt{7-x}-3)(\sqrt{7-x}+3)}=$$
$$=\frac{(x+2)(\sqrt{7-x}+3)}{(\sqrt{7-x})^2-3^2}=\frac{(x+2)(\sqrt{7-x}+3)}{-(x+2)}=-(\sqrt{7-x}+3).$$

Итак,

$$\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{7-x}-3}=\lim_{x\to -2}(-\sqrt{7-x}-3)=$$
$$=-(\sqrt{7+2}+3)=-6.$$

§ 21. Производная и ее применения

208. Приращение аргумента. Приращение функции. Пусть функция $y=f(x)$ определена в точках x и x_1. Разность x_1-x называют *приращением аргумента*, а разность $f(x_1)-f(x)$ — *приращением функции* при переходе от значения аргумента x к значению аргумента x_1. Приращение аргумента обозначают Δx; значит, $\Delta x = x_1 - x$, т. е. $x_1 = x + \Delta x$. Приращение функции обозначают Δf или Δy:

$$\Delta f = f(x_1) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Пример 1. Найти приращение функции $y = x^3$ при переходе от значения аргумента x к значению $x_1 = x + \Delta x$.

Решение. Имеем $f(x) = x^3$, $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$. Значит,

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 =$$

$$= x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x\,(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 =$$

$$= 3x^2\,\Delta x + 3x\,(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Итак, $\Delta f = (3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)\,\Delta x$. По этой формуле можно вычислять значение Δf для любых заданных x и Δx. Например, при $x = 2$, $\Delta x = 0{,}1$ имеем

$$\Delta f = f(2{,}1) - f(2) = (3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}1 + 0{,}1^2) \cdot 0{,}1 = 1{,}261;$$

при $x = 1$, $\Delta x = -0{,}2$ получаем

$$\Delta f = f(0{,}8) - f(1) = (3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \cdot (-0{,}2) +$$
$$+ (-0{,}2)^2) \cdot (-0{,}2) = -0{,}488.$$

Пример 2. Доказать, что для линейной функции $y = kx + b$ справедливо равенство $k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Решение. Имеем $f(x) = kx + b$, $f(x + \Delta x) = k(x + \Delta x) + b$.

Значит, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (k(x + \Delta x) + b) - (kx + b) = k\Delta x$, откуда получаем $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$, что и требовалось доказать.

Геометрический смысл доказанного равенства проиллюстрирован на рисунке 1.151: из треугольника AMB получаем $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = k$.

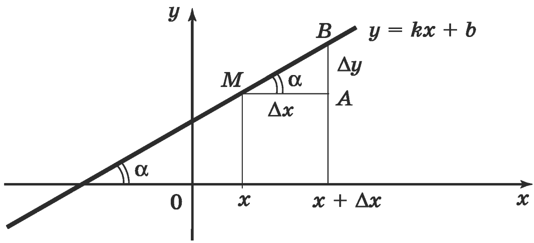


Рис. 1.151

209. Определение производной. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x и в некоторой окрестности этой точки. Пусть Δx — приращение аргумента, причем такое, что точка $x + \Delta x$ принадлежит указанной окрестности точки x, а Δf — соответствующее приращение функции, т. е.

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Если существует предел отношения приращения функции Δf к приращению аргумента Δx при условии, что $\Delta x \to 0$, то этот предел называют *значением производной функции $y = f(x)$ в точке x* и обозначают $f'(x)$ или y', а функцию $y = f(x)$ называют *дифференцируемой в точке x*.

Итак,

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

$f'(x)$ — это новая функция, определенная во всех таких точках x, в которых существует указанный выше предел; эту функцию называют *производной функции $y = f(x)$*.

Пример 1. Найти $f'(2)$, если $f(x) = x^2$.

Решение.

$$f(2) = 2^2 = 4,\ f(2+\Delta x) = (2+\Delta x)^2,$$

$$\Delta f = f(2+\Delta x) - f(2) = (2+\Delta x)^2 - 4 = 4\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Тогда $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 4 + \Delta x$, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) = 4$.

Значит, $f'(2) = 4$.

Опираясь на определение, можно рекомендовать следующий **план отыскания производной** функции $y = f(x)$:

1) фиксируем значение x, находим $f(x)$;

2) даем аргументу x приращение Δx, находим $f(x + \Delta x)$;

3) вычисляем приращение функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$;

4) составляем отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$;

5) находим предел отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

П р и м е р 2. Найти производную функции $y = x^3$.

Р е ш е н и е:

1) $f(x) = x^3$;

2) $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$;

3) $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = (3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)\Delta x$ (см. п. 208);

4) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$;

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2 + 3x \cdot 0 + 0^2 = 3x^2$.

Итак, $(x^3)' = 3x^2$.

210. Формулы дифференцирования. Таблица производных. Операцию отыскания производной называют *дифференцированием*. В п. 209 получена одна из формул дифференцирования: $(x^3)' = 3x^2$. По такому же плану можно вывести остальные формулы, которые приведены ниже.

1. $(C)' = 0$.
2. $(kx + b)' = k$.
3. $(x^r)' = rx^{r-1}$.
4. $(e^x)' = e^x$.
5. $(a^x)' = a^x \ln a$.
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.
8. $(\sin x)' = \cos x$.
9. $(\cos x)' = -\sin x$.
10. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
14. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.
15. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$.

Например, $(2x - 3)' = 2$ (формула 2); $(x^{10})' = 10x^9$, $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3}$, $(\sqrt[5]{x^3})' = \left(x^{\frac{3}{5}}\right)' = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$ (формула 3);

$(5^x)' = 5^x \ln 5$ (формула 4); $(\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10}$ (формула 7).

211. Дифференцирование суммы, произведения, частного. Если функции u и v дифференцируемы в точке x, то:

1°. Их сумма дифференцируема в точке x и

$$(u + v)' = u' + v'$$

(*теорема о дифференцировании суммы*).

2°. Функция Cu, где C — постоянная, дифференцируема в точке x и

$$(Cu)' = Cu'$$

(*теорема о вынесении постоянного множителя за знак производной*).

3°. Произведение функций u и v дифференцируемо в точке x и

$$(uv)' = u'v + uv'$$

(*теорема о дифференцировании произведения*).

4°. Частное функций u и v дифференцируемо в точке x и

$$\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u\ v - uv}{v^2}$$

(*теорема о дифференцировании частного; здесь* $v(x) \neq 0$).

Пример 1. Найти производную функции

$$y = 2\sin x - \frac{\cos x}{3} + 5.$$

Решение. Воспользовавшись теоремами 1° и 2°, получим

$$\left(2\sin x - \frac{\cos x}{3} + 5\right)' = (2\sin x)' + \left(-\frac{1}{3}\cos x\right)' + 5' =$$

$$= 2(\sin x)' - \frac{1}{3}(\cos x)' + 5'.$$

Осталось применить соответствующие формулы дифференцирования (см. п. 210). Получим

$$2\cos x - \frac{1}{3}(-\sin x) + 0 = 2\cos x + \frac{1}{3}\sin x.$$

Итак, $\left(2\sin x - \frac{\cos x}{3} + 5\right)' = 2\cos x + \frac{\sin x}{3}$.

Пример 2. Найти $(x^{\frac{2}{5}} \log_3 x)'$.

Решение. Воспользовавшись теоремой о дифференцировании произведения, получим

$$(x^{\frac{2}{5}} \log_3 x)' = \left(x^{\frac{2}{5}}\right)' \log_3 x + x^{\frac{2}{5}} (\log_3 x)'.$$

Осталось применить соответствующие формулы дифференцирования (см. п. 210). Получим $\frac{2}{5} x^{-\frac{3}{5}} \log_3 x + x^{\frac{2}{5}} \cdot \frac{1}{x \ln 3}$.

Итак, $\left(x^{\frac{2}{5}} \log_3 x\right) = \frac{2}{5} x^{-\frac{3}{5}} \log_3 x + \frac{x^{-\frac{3}{5}}}{\ln 3} = \frac{0{,}4 \ln x + 1}{\sqrt[5]{x^3} \cdot \ln 3}$.

П р и м е р 3. Вычислить $f'(0)$, если $f(x) = \dfrac{2^x}{x^2+1}$.

Р е ш е н и е. Сначала найдем $f'(x)$. Воспользовавшись теоремой о дифференцировании частного, получим

$$f'(x) = \frac{(2^x)'(x^2+1) - 2^x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2^x \ln 2 \cdot (x^2+1) - 2^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2}.$$

Теперь вычислим $f'(0)$:

$$f'(0) = \frac{2^0 \ln 2 \cdot (0^2+1) - 2^0 \cdot 2 \cdot 0}{(0^2+1)^2} = \ln 2.$$

212*. Сложная функция и ее дифференцирование. Рассмотрим функцию $y = \sin x^2$. Чтобы найти значение этой функции в фиксированной точке x, нужно:

1) вычислить x^2;

2) найти значение синуса от полученного значения x^2. Иными словами, сначала надо найти значение $g(x) = x^2$, а потом найти $\sin g(x)$. В подобных случаях говорят, что задана *сложная функция* $y = f(g(x))$. В нашем примере $u = g(x) = x^2$, а $y = f(u) = \sin u$. Рассмотрим еще два примера.

П р и м е р 1. Составить сложную функцию $y = f(g(x))$, если $g(x) = \ln x$, $f(u) = \sqrt{u}$.

Р е ш е н и е. $y = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{\ln x}$.

Пример 2. Из каких функций составлена сложная функция $y = \mathrm{tg}^5\,(2x + 1)$?

Решение. Эта функция — композиция составляющих: $g(x) = 2x + 1$, $h(u) = \mathrm{tg}\,u$, $f(z) = z^5$. В самом деле, $f(h(g(x))) = (h(g(x)))^5 = (\mathrm{tg}\,(g(x)))^5 = (\mathrm{tg}\,(2x + 1))^5 = \mathrm{tg}^5\,(2x + 1)$.

Пусть $y = f(g(x))$ — сложная функция, причем функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке x, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке u. Тогда функция $y = f(g(x))$ дифференцируема в точке x, причем

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Запись $f'(g(x))$ означает, что производная вычисляется по формуле для $f'(x)$, но вместо x подставляется $g(x)$.

Пример 3. Найти $((3x + 5)^4)'$.

Решение. Здесь $g(x) = 3x + 5$, $f(u) = u^4$, $f(g(x)) = (3x + 5)^4$. Значит, $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 4\,(3x + 5)^3 \times (3x + 5)' = 4\,(3x + 5)^3 \cdot 3 = 12\,(3x + 5)^3$.

Пример 4. Найти $(\mathrm{tg}\,(x^2 + x + 1))'$.

Решение. Так как $(\mathrm{tg}\,u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}$, то $(\mathrm{tg}\,(x^2 + x + 1))' = \dfrac{1}{\cos^2(x^2+x+1)} \cdot (x^2+x+1)' = \dfrac{2x+1}{\cos^2(x^2+x+1)}$.

213. Физический смысл производной. Если $s = s(t)$ — закон прямолинейного движения, то $s'(t)$ выражает *скорость движения в момент времени* t, т. е. $v = s'(t)$ (мгновенная скорость).

Например, закон свободного падения тела выражается зависимостью $s = \frac{gt^2}{2}$. Тогда скорость падения в момент t такова:

$$v = s' = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = \frac{g}{2}(t^2)' = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt.$$

Вообще производная функции $y = f(x)$ в точке x выражает *скорость изменения функции в точке x*, т. е. скорость протекания процесса, описываемого зависимостью $y = f(x)$. В этом состоит *физический смысл производной*. Например, для функции $y = x^2$ имеем $f'(x) = 2x$, при $x = 2$ имеем $f'(2) = 4$, а при $x = 3$ имеем $f'(3) = 6$. Это значит, что в точке $x = 2$ функция изменяется в 4 раза быстрее аргумента, а в точке $x = 3$ — в 6 раз быстрее.

214*. Вторая производная и ее физический смысл. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную. Производная — это новая функция, которая, в свою очередь, может иметь производную. Производную $f'(x)$ называют *второй производной* функции $y = f(x)$ и обозначают $f''(x)$ или y''.

Пример 1. Найти y'', если $y = x^{10}$.

Решение. Имеем $(x^{10})' = 10x^9$, а $(10x^9)' = 90x^8$. Итак, $(x^{10})'' = 90x^8$.

Если $s = s(t)$ — закон прямолинейного движения, то вторая производная выражает скорость изменения скорости этого движения, т. е. *ускорение* $a = s''(t)$. В этом состоит *физический смысл второй производной*.

Пример 2. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s = \dfrac{1}{2t-1}$. Доказать, что сила, действующая на тело, пропорциональна кубу пройденного пути.

Решение. По второму закону Ньютона, $F = ma$, где F — сила, действующая на тело, a — ускорение, m — масса; $a = s''$. Имеем:

$$s' = ((2t-1)^{-1})' = -(2t-1)^{-2} \cdot (2t-1)' = -2(2t-1)^{-2};$$

$$s'' = (-2(2t-1)^{-2})' = -2(-2) \cdot (2t-1)^{-3} \cdot (2t-1)' =$$
$$= 8(2t-1)^{-3} = \frac{8}{(2t-1)^3}.$$

Значит, $F = ma = \dfrac{8m}{(2t-1)^3} = 8\,ms^3$, т. е. сила F пропорциональна s^3 ($8m$ — коэффициент пропорциональности).

215. Касательная к графику функции. *Касательной к* графику функция $y = f(x)$, дифференцируемой в точке $x = a$, называют прямую, проходящую через точку $(a;\ f(a))$ и имеющую угловой коэффициент $f'(a)$.

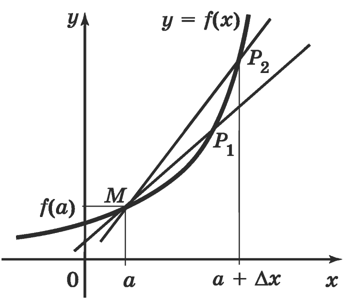


Рис. 1.152

Геометрический смысл этого определения состоит в следующем. Рассмотрим график функции $y = f(x)$, дифференцируемой в точке a, выделим на нем точку M $(a;\ f(a))$ и проведем секущую MP_2, где P_2 — точка графика, соответствующая значению аргумента $a + \Delta x$ (рис. 1.152). Угловой коэффициент прямой MP_2 вычисляется по формуле $k_{\text{сек}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (см. п. 208).

Если точку P двигать по графику, приближая ее к точке M, то прямая MP начнет поворачиваться вокруг точки M (на рис. 1.152 указаны два положения точки P — P_1 и P_2). Чаще всего в этом процессе секущая MP стремится занять некоторое предельное положение. Это предельное положение представляет собой прямую, с которой практически сливается график функции $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки a; эта прямая и есть касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$. В самом деле, угловой коэффициент такой предельной прямой (обозначим его k) получается из углового коэффициента секущей в процессе предельного перехода от P к M:

$$k = \lim_{P \to M} k_{\text{сек}}.$$

Но условие $P \to M$ можно заменить условием $\Delta x \to 0$, а вместо $k_{\text{сек}}$ написать $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. В итоге получаем

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Но $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ — это значение производной функции $y = f(x)$ в фиксированной точке $x = a$, т. е. $f'(a)$ (см. п. 209).

Итак, $k = f'(a)$, т. е. *значение производной функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$* (рис. 1.153). В этом состоит *геометрический смысл производной.*

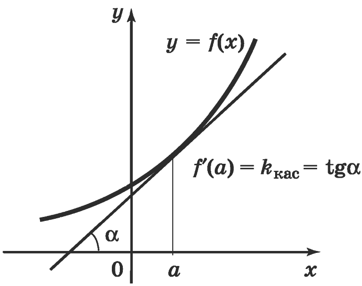


Рис. 1.153

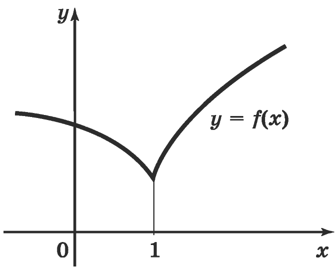


Рис. 1.154

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то в этой точке к графику можно провести касательную; верно и обратное: если в точке $x = a$ к графику функции $y = f(x)$ можно провести невертикальную касательную, то функция дифференцируема в точке x.

Это позволяет по графику функции находить точки, в которых функция имеет или не имеет производную. Так, функция, график которой изображен на рисунке 1.154, дифференцируема во всех точках, кроме точки $x = 1$; в этой точке график имеет заострение и касательную провести нельзя.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ имеет вид

$$y = f(a) + f'(a)(x - a). \qquad (1)$$

П р и м е р 1. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 4$.

Р е ш е н и е. Имеем: $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $a = 4$,

$$f(a) = \sqrt{4} = 2, \ f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Подставив найденные значения a, $f(a)$ и $f'(a)$ в уравнение (1), получим

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x - 4), \text{ т. е. } y = \frac{1}{4}x + 1.$$

Пример 2. Найти угол, который образует с осью x касательная к графику функции $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 3x$, проведенная в точке $x = 0$.

Решение. Имеем: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 3x$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos 3x \cdot 3 = \sqrt{3} \cos 3x$;

$$a = 0,\ f'(a) = \sqrt{3} \cos 0 = \sqrt{3}.$$

Значит, $k_{\text{кас}} = \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, откуда заключаем, что искомый угол α равен 60°.

Пример 3. К графику функции $y = \frac{x+2}{x-2}$ провести касательную так, чтобы она была параллельна прямой $y = -x + 2$.

Решение. Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты равны (см. п. 81). Угловой коэффициент прямой $y = -x + 2$ равен -1, а угловой коэффициент касательной равен $f'(a)$. Значит, точку касания мы можем найти из уравнения $f'(a) = -1$.

Имеем $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$; $f'(x) = \frac{(x+2)'(x-2) - (x+2)(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{1(x-2) - 1(x+2)}{(x-2)^2} = \frac{-4}{(x-2)^2}$; значит, $f'(a) = -\frac{4}{(a-2)^2}$.

Решим уравнение $-\frac{4}{(a-2)^2} = -1$. Имеем $(a-2)^2 = 4$; значит, либо $a - 2 = 2$, откуда $a_1 = 4$, либо $a - 2 = -2$, откуда $a_2 = 0$.

Если $a = 4$, то $f(a) = \frac{4+2}{4-2} = 3$ и уравнение касательной имеет вид $y = 3 - (x - 4)$, т. е. $y = 7 - x$.

Если $a = 0$, то $f(a) = \frac{0+2}{0-2} = -1$ и уравнение касательной имеет вид $y = -1 - (x - 0)$, т. е. $y = -x - 1$.

Пример 4. Через точку O (0; 0) провести касательную к графику функции $y = \ln x$.

Решение. Здесь, как и в предыдущем примере, неизвестна точка касания $x = a$. Чтобы ее найти, составим уравнение касательной в общем виде. Имеем $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$; значит, $f(a) = \ln a$, $f'(a) = \frac{1}{a}$ и *уравнение касательной* имеет вид

$$y = \ln a + \frac{1}{a}(x - a). \qquad (2)$$

По условию касательная должна проходить через точку O (0; 0), т. е. координаты точки O (0; 0) должны удовлетворять уравнению (2). Подставив $x = 0$, $y = 0$ в уравнение (2), получим $0 = \ln a + \frac{1}{a}(0 - a)$, откуда $0 = \ln a - 1$, $\ln a = 1$, $a = e$. Если теперь в уравнение (2) подставить найденное значение точки касания $a = e$, получим $y = \ln e + \frac{1}{e}(x - e)$, т. е.

$$y = 1 + \frac{x}{e} - 1,\ y = \frac{x}{e}.$$

Это — уравнение искомой касательной (рис. 1.155).

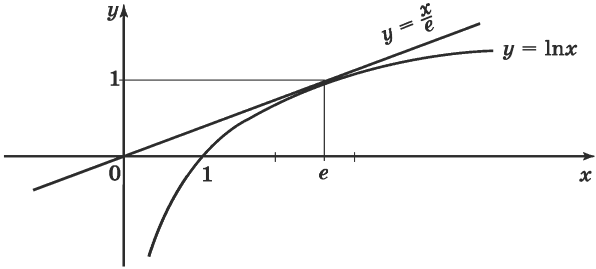


Рис. 1.155

216. Применение производной к исследованию функций на монотонность. Производная позволяет во многих случаях сравнительно просто исследовать функцию на монотонность. Достигается это с помощью следующих двух теорем:

Теорема 6. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в промежутке X и во всех внутренних точках этого промежутка имеет неотрицательную производную ($f'(x) \geqslant 0$), причем равенство $f'(x) = 0$ выполняется не более чем в конечном числе точек этого промежутка. Тогда функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X.

Теорема 7. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в промежутке x и во всех внутренних точках этого промежутка имеет неположительную производную ($f'(x) \leqslant 0$), причем равенство $f'(x) = 0$ выполняется не более чем в конечном числе точек этого промежутка. Тогда функция $y = f(x)$ убывает на промежутке X.

Пример 1. Исследовать на монотонность функцию

$$y = x^5 + x^3 + 1.$$

Решение. Имеем $y' = 5x^4 + 3x^2$. Справедливо неравенство $5x^4 + 3x^2 \geqslant 0$, причем знак равенства имеет место лишь в одной точке $x = 0$. Значит, по теореме 6 функция $y = x^5 + x^3 + 1$ возрастает на всей числовой прямой.

Пример 2. Исследовать на монотонность функцию

$$y = 2\sin x - 3x.$$

Решение. Имеем $y' = 2\cos x - 3$. Так как $|\cos x| \leqslant 1$, то $2\cos x - 3 < 0$ при всех x. Значит, по теореме 7 функция $y = 2\sin x - 3x$ убывает на всей числовой прямой.

Пример 3. Исследовать на монотонность функцию

$$y = \frac{x^2}{2} - 3\ln(x - 2).$$

Решение. Имеем $y' = \frac{1}{2} \cdot 2x - 3 \cdot \frac{1}{x-2} = x - \frac{3}{x-2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{x-2} = \frac{(x-3)(x+1)}{x-2}$.

Знаки выражения $\frac{(x-3)(x+1)}{x-2}$ меняются так, как показано на рисунке 1.156 (см. п. 183). Но область определения исследуемой функции задается

Рис. 1.156

неравенством $x > 2$. Значит, из показанных на рисунке четырех промежутков нас интересуют только два: промежуток $(2;\ 3)$ — на нем $y' < 0$ и, следовательно, функция на этом интервале убывает, — и промежуток $(3;\ +\infty)$ — на нем $y' > 0$ и, следовательно, функция на этом промежутке возрастает.

Указанные два промежутка имеют общую концевую точку $x = 3$. В точке $x = 3$ заданная функция определена и непрерывна. В таких случаях при исследовании функции на монотонность концевую точку включают в промежуток монотонности.

Ответ. Функция убывает на полуинтервале $(2;\ 3]$ и возрастает на луче $[3;\ +\infty)$.

217. Применение производной к исследованию функций на экстремум. Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет *максимум* (*минимум*) *в точке* $x = a$, если у этой точки существует окрестность, в которой $f(x) < f(a)$ $(f(x) > f(a))$ для $x \neq a$.

Так, функция, график которой изображен на рисунке 1.157, имеет максимум в точках x_1 и x_3 и минимум в точках x_2 и x_4.

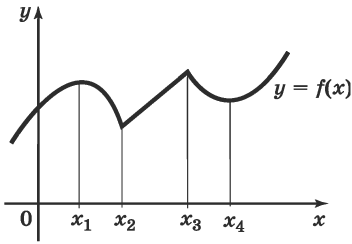


Рис. 1.157

Точки максимума и минимума объединяют общим термином — *точки экстремума*.

Обратимся еще раз к рисунку 1.157. Замечаем, что в точках x_1 и x_4 к графику функции можно провести касательные, причем эти касательные будут параллельны оси x, а значит, угловой коэффициент каждой из касательных равен нулю; итак, $f'(x_1) = 0$, $f'(x_4) = 0$. В точках же x_2 и x_3 касательную к графику провести нельзя; значит, в этих точках производная функции $y = f(x)$ не существует (см. п. 215). Таким образом, в точках экстремума на рисунке 1.157 производная либо равна нулю, либо не существует. Это — общее положение, подтверждаемое следующей теоремой.

Теорема 8. Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = a$, то либо $f'(a) = 0$, либо $f'(a)$ не существует (*необходимое условие экстремума*).

Точки, в которых $f'(a) = 0$, называют *стационарными*, а точки, в которых $f'(a)$ не существует и которые принадлежат области определения функции, называют *критическими*. Теорема 8 означает, что экстремумы функций могут достигаться только в стационарных или критических точках. Обратная теорема, однако, неверна: не во всякой стационарной или критической точке функция имеет экстремум. Так, функция $y = x^3$ имеет одну стационарную точку $x = 0$ (в ней $y' = 3x^2 = 0$), но в этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума. Функция, график которой изображен на рисунке 1.158, имеет критическую точку $x = a$ — это точка излома, в ней y' не существует, но в этой точке нет ни максимума, ни минимума.

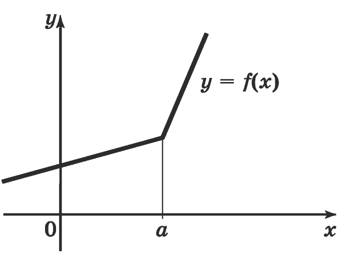


Рис. 1.158

Как узнать, когда стационарная или критическая точка функции является точкой экстремума? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 9. Пусть $x = a$ — стационарная или критическая точка функции $y = f(x)$ и пусть существует интервал $(b; c)$, содержащий точку a внутри себя и такой, что на каждом из интервалов $(b; a)$ и $(a; c)$ производная $f'(x)$ существует и сохраняет постоянный знак. Тогда:

1) если на $(b; a)$ производная $y' > 0$, а на $(a; c)$ производная $y' < 0$, то $x = a$ — точка максимума функции $y = f(x)$;

2) если на $(b; a)$ производная $y' < 0$, а на $(a; c)$ производная $y' > 0$, то $x = a$ — точка минимума функции $y = f(x)$;

3) если и на $(b; a)$, и на $(a; c)$ производная $y' < 0$ или $y' > 0$, то $x = a$ не является точкой экстремума функции $y = f(x)$ (*достаточное условие экстремума*).

Из теорем 8 и 9 вытекает следующее правило исследования функции $y = f(x)$ на экстремум:

1) найти область определения функции;

2) найти $f'(x)$;

3) найти точки, в которых выполняется равенство $f'(x) = 0$;

4) найти точки, в которых $f'(x)$ не существует;

5) отметить на координатной прямой все стационарные и критические точки и область определения функции $y = f(x)$; получатся промежутки области определения функции, на каждом из которых производная функции $y = f(x)$ сохраняет постоянный знак;

6) определить знак y' на каждом из промежутков, полученных в п. 5;

7) сделать выводы о наличии или отсутствии экстремума в каждой из выделенных точек в соответствии с теоремой 9.

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию

$$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1.$$

Решение:

1) Функция определена при всех x.

2) $y' = 6x^2 - 30x + 36$.

3) Из уравнения $6x^2 - 30x + 36 = 0$ находим $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ (стационарные точки).

4) y' существует при всех x (критических точек нет).

5) Отметим точки $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ на координатной прямой (рис. 1.159).

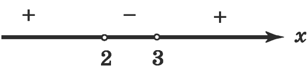


Рис. 1.159

6) $y' = 6(x - 2)(x - 3)$. Знаки производной на полученных промежутках отмечены на рисунке 1.159.

7) При переходе через точку $x = 2$ слева направо производная y' меняет знак с «+» на « − », значит, $x = 2$ — точка максимума; при переходе через точку $x = 3$ производная меняет знак с «−» на «+», значит, $x = 3$ — точка минимума. В точке $x = 2$ имеем $y_{\max} = 29$, в точке $x = 3$ имеем $y_{\min} = 28$.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию

$$y = \ln(x - 2) + \ln x.$$

Решение:

1) Область определения функции задается неравенством $x > 2$.

2) $y' = \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x-2}{x(x-2)}$.

3) в области определения функции, т. е. при $x > 2$, нет ни стационарных, ни критических точек; значит точек экстремума у функции нет.

П р и м е р 3. Исследовать на экстремум функцию $y = \dfrac{x^2-6x+9}{x-1}$.

Р е ш е н и е:

1) Область определения $x \neq 1$.

2) $$y' = \frac{(x^2-6x+9)'(x-1)-(x^2-6x+9)(x-1)'}{(x-1)^2} =$$
$$= \frac{(2x-6)(x-1)-(x^2-6x+9)\cdot 1}{(x-1)^2} =$$
$$= \frac{(x-3)(2(x-1)-(x-3))}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}.$$

3) $y' = 0$ при $x = 3$ или при $x = -1$.

4) y' не существует при $x = 1$, но эта точка не принадлежит области определения функции.

5) Отметим на координатной прямой точки $x = -1$, $x = 3$ и точку $x = 1$ (рис. 1.160).

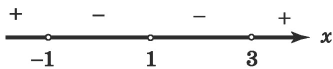


Рис. 1.160

6) Знаки производной на полученных промежутках отмечены на рисунке 1.160.

7) $x = -1$ — точка максимума, $y_{\max} = -8$.

$x = 3$ — точка минимума, $y_{\min} = 0$.

218. Отыскание наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке. Говорят, что функция $y = f(x)$, определенная на промежутке X, достигает на нем своего *наибольшего* (*на-*

именьшего) *значения*, если существует точка a, принадлежащая этому промежутку, такая, что для всех x из X выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(a)$ $(f(x) \geqslant f(a))$.

Обозначения соответственно: $y_{\text{наиб}}$, $y_{\text{наим}}$.

Теорема 10. Функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значений.

Наибольшее значение M и наименьшее значение m непрерывной функции могут достигаться как внутри отрезка, так и на его концах (рис. 1.161). Если наибольшего (наименьшего) значения функция достигает во внутренней точке отрезка, то эта точка является точкой экстремума; впрочем, для практики достаточно того, что эта точка стационарная или критическая.

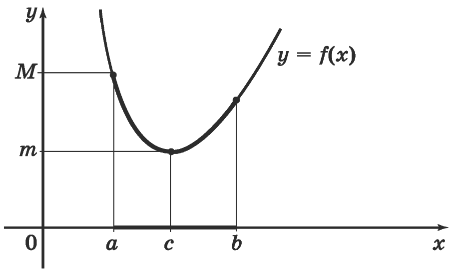


Рис. 1.161

А л г о р и т м о т ы с к а н и я наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ н а о т р е з к е $[a; b]$:

1) найти $f'(x)$;

2) найти точки, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует, и отобрать из них те, что лежат внутри отрезка $[a; b]$;

3) вычислить значения функции $y = f(x)$ в точках, полученных в п. 2, и на концах отрезка и выбрать из них наибольшее и наименьшее; они и будут соответственно наибольшим и наименьшим значениями функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

П р и м е р. Найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 225$ на отрезке $[0; 6]$.

Р е ш е н и е:

1) $y' = 3x^2 - 6x - 45$.

2) y' существует при всех x. Найдем точки, в которых $y' = 0$. Имеем:

$$3x^2 - 6x - 45 = 0,$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0,$$

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 5.$$

Отрезку $[0; 6]$ принадлежит лишь точка $x = 5$.

3) вычислим значения функции в точках 0, 5, 6:

x	0	5	6
y	225	50	63

Наибольшим из найденных значений функции является число 225, наименьшим — число 50. Итак, $y_{наиб} = 225$, $y_{наим} = 50$.

219*. Отыскание наибольшего или наименьшего значения непрерывной функции на незамкнутом промежутке. Задача отыскания наибольшего (наименьшего) значения непрерывной функции на незамкнутом промежутке, например на интервале $(a;\ b)$, не всегда имеет решение. Так, на рисунках 1.162—1.164 изображены графики непрерывных на $(a;\ b)$ функций. Функция $y = f_1(x)$ достигает и наибольшего, и наименьшего значений, функция $y = f_2(x)$ достигает наибольшего значения, а наименьшего значения на $(a;\ b)$ у нее нет, у функции $y = f_3(x)$ на $(a;\ b)$ нет ни наибольшего, ни наименьшего значения.

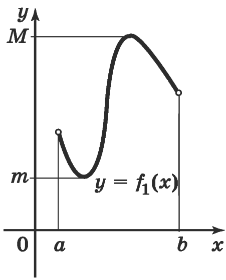


Рис. 1.162

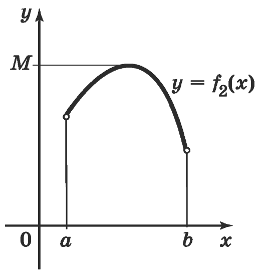


Рис. 1.163

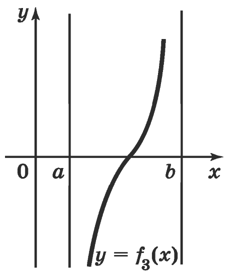


Рис. 1.164

Если поставлена задача найти $y_{\text{наиб}}$ ($y_{\text{наим}}$) для непрерывной на $(a;\ b)$ функции $y = f(x)$, то она решается по тому же правилу, что соответствующая задача для отрезка $[a;\ b]$ (см. п. 218). Отличие: на третьем этапе вместо вычисления значений функции на концах отрезка находят пределы функции при приближении к концам интервала.

П р и м е р. Найти наименьшее значение функции

$y = \left(\dfrac{2 + \cos x}{\sin x}\right)^2$ на интервале $(0;\ \pi)$.

Р е ш е н и е. 1) Найдем производную данной функции:

$$y' = 2\left(\frac{2+\cos x}{\sin x}\right)\cdot\left(\frac{2+\cos x}{\sin x}\right)' =$$

$$= 2\cdot\frac{2+\cos x}{\sin x}\cdot\frac{(2+\cos x)'\sin x-(2+\cos x)(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= 2\cdot\frac{2+\cos x}{\sin x}\cdot\frac{(-\sin x)\sin x-(2+\cos x)\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{2(2+\cos x)(-\sin^2 x-\cos^2 x-2\cos x)}{\sin^3 x} =$$

$$= \frac{-2(2+\cos x)(1+2\cos x)}{\sin^3 x}.$$

2) $y' = 0$, если $1 + 2\cos x = 0$ или $2 + \cos x = 0$. Но второе уравнение не имеет решений, так как $|\cos x| \leqslant 1$, а из первого находим $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ (см. п. 154). Из этих значений интервалу $(0; \pi)$ принадлежит лишь значение $x = \frac{2\pi}{3}$.

Производная y' не существует, если $\sin^3 x = 0$. Но на $(0; \pi)$ это уравнение не имеет решений.

Итак, внутри интервала $(0; \pi)$ функция имеет лишь одну стационарную точку $x = \frac{2\pi}{3}$.

3) Если $x = \frac{2\pi}{3}$, то $y = \left(\frac{2+\cos\frac{2\pi}{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = \left(\frac{2-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 = 3.$

При приближении к концам интервала, т. е. при $x \to 0$ или при $x \to \pi$, знаменатель дроби $\frac{(2 + \cos x)^2}{\sin^2 x}$ стремится к 0, а числитель соответственно к 9 или к 1. Значит, и в том и в другом случае $y \to +\infty$ (см. п. 206).

Поскольку при приближении к концам интервала $(0; \pi)$ значения функции неограниченно увеличиваются, наименьшего значения функция достигает в единственной стационарной точке, т. е. в точке $x = \frac{2\pi}{3}$. Итак, $y_{\text{наим}} = 3$.

Иногда для отыскания наибольшего или наименьшего значения непрерывной функции $y = f(x)$ на промежутке $(a; b)$ полезны два утверждения:

Теорема 11. Если функция $y = f(x)$ имеет в промежутке X только одну стационарную или критическую точку $x = a$, причем это точка максимума, то $f(a)$ — наибольшее значение функции на промежутке X.

Теорема 12. Если функция $y = f(x)$ имеет в промежутке X только одну стационарную или критическую точку $x = a$, причем это точка минимума, то $f(a)$ — наименьшее значение функции на промежутке X.

Так, в рассмотренном выше примере функция имела в интервале $(0; \pi)$ лишь одну стационарную точку $x = \frac{2\pi}{3}$. При переходе через эту точку знаки производной меняются с «−» на «+». Значит, $x = \frac{2\pi}{3}$ — точка минимума, а потому $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3$ — наименьшее значение функции на интервале $(0; \pi)$.

220. Задачи на отыскание наибольших или наименьших значений величин. Задачи на отыскание наибольших или наименьших значений величин удобно решать по следующему п л а н у.

1) Выявляют оптимизируемую величину (т. е. величину, наибольшее или наименьшее значение которой требуется найти) и обозначают ее буквой y (или S, p, r, R и т. д. в зависимости от сюжета задачи).

2) Одну из неизвестных величин (сторону, угол и т. д.) объявляют независимой переменной и обозначают буквой x; устанавливают реальные границы изменения x в соответствии с условиями задачи.

3) Исходя из конкретных условий данной задачи, выражают y через x и известные величины.

4) Для полученной на третьем шаге функции $y = f(x)$ находят наибольшее или наименьшее значение (в зависимости от требований задачи) по промежутку реального изменения x, найденному на втором шаге.

5) Интерпретируют результат, полученный на четвертом шаге, для данной конкретной задачи.

На первых трех этапах составляется, как принято говорить, *математическая модель* задачи. Здесь часто успех решения зависит от разумного выбора независимой переменной. Важно, чтобы было сравнительно нетрудно выразить y через x. На четвертом этапе составленная математическая модель исследуется чаще всего с помощью производной, реже элементарными способами. В момент такого исследования сюжет самой задачи, послужившей отправной точкой для математической модели, исследователя не интересует. И лишь когда закончится решение задачи в рамках составленной математической модели, полученный результат интерпретируется для исходной задачи (пятый этап).

Пример 1. В степи, в 9 км к северу от шоссе, идущего с запада на восток, находится поисковая партия. В 15 км к востоку от ближайшей к поисковой партии точки шоссе, находится райцентр. Поисковая партия отправляет курьера-велосипедиста в райцентр. Каков должен быть маршрут следования курьера, чтобы он прибыл в райцентр в кратчайший срок, если известно, что по степи он едет со скоростью 8 км/ч, а по шоссе — 10 км/ч?

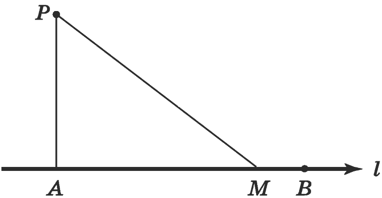


Рис. 1.165

Решение. Сделаем чертеж. На рисунке 1.165 точка P означает местонахождение поисковой партии, прямая l — шоссе, B — райцентр, $PA = 9$ км, $AB = 15$ км, PMB — маршрут следования курьера, причем положение точки M между A и B пока неизвестно.

Будем решать задачу поэтапно.

1. Оптимизируемая величина — время t движения курьера из P в B; надо найти $t_{\text{наим}}$.

2. Положим $AM = x$. По смыслу задачи точка M может занять любое положение между A и B, не исключая самих точек A и B. Значит, реальные границы изменения x таковы: $0 \leqslant x \leqslant 15$.

3. Выразим t через x. Имеем $PM = \sqrt{PA^2 + AM^2} = \sqrt{81 + x^2}$. Этот путь велосипедист едет со скоростью 8 км/ч, т. е. время t_1, за которое велосипедист проходит путь, выражается формулой $t_1 = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{8}$. Далее, $MB = 15 - x$. Этот путь велосипедист едет со скоростью 10 км/ч, т. е. время t_2, за которое он проезжает этот путь, выражается формулой

$t_2 = \dfrac{15 - x}{10}$. Суммарное время t, за которое он проезжает весь путь, равно $t_1 + t_2$, т. е. $t = \dfrac{\sqrt{81 + x^2}}{8} + \dfrac{15 - x}{10}$.

4. Нужно найти наименьшее значение функции

$$t = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{8} + \frac{15 - x}{10}$$

на отрезке [0; 15]. Используем для этого план из п. 218:

1) $t' = \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{1}{2}(81 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + \dfrac{1}{10}(-1) = \dfrac{x}{8\sqrt{81 + x^2}} - \dfrac{1}{10}$.

2) t' существует при всех x. Найдем точки, в которых $t' = 0$. Имеем:

$$\frac{x}{8\sqrt{81 + x^2}} - \frac{1}{10} = 0,$$

$$5x = 4\sqrt{81 + x^2},$$

$$25x^2 = 16(81 + x^2),$$

$$9x^2 = 16 \cdot 81,$$

$$x = 4 \cdot 3 = 12.$$

Значение $x = 12$ принадлежит отрезку [0; 15].

3) Составим таблицу значений функции, куда включим значения функции на концах отрезка и в найденной стационарной точке:

x	0	12	15
t	$\dfrac{105}{40}$	$\dfrac{87}{40}$	$\dfrac{5\sqrt{306}}{40}$

$$t_{\text{наим}} = \frac{87}{40}.$$

Четвертый этап решения задачи закончен, нам осталось интерпретировать полученный результат применительно к исходной задаче.

5. Время $t_{\text{наим}}$ достигается при $x = 12$. Значит, велосипедисту надо ехать по такому маршруту PMB, чтобы расстояние между точками A и M по шоссе было равно 12 км.

П р и м е р 2. Через фиксированную точку M внутри данного угла провести прямую, отсекающую от этого угла треугольник наименьшей площади (рис. 1.166).

Р е ш е н и е (по этапам).

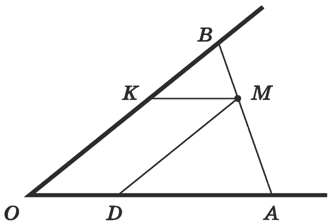


Рис. 1.166

1. Оптимизируемая величина — площадь S треугольника AOB.

2. Проведем $DM \parallel OB$, $MK \parallel OA$. Положим $KB = x$; реальные границы изменения x таковы: $0 < x < +\infty$.

3. Поскольку M — фиксированная точка, отрезки DM и KM тоже фиксированы; положим $DM = a$, $KM = b$ и выразим S через x, a, b.

Рассмотрим треугольники MKB и AOB, они подобны; значит, $\frac{MK}{AO} = \frac{KB}{OB}$, т. е. $\frac{b}{AO} = \frac{x}{a+x}$. Отсюда находим $AO = \frac{b(a+x)}{x}$.

Далее имеем $S = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin\alpha$, где $\alpha = \angle AOB$.

Значит, $S = \frac{1}{2} \frac{b(a+x)}{x} (a+x) \sin\alpha = \frac{b\sin\alpha}{2} \frac{(a+x)^2}{x}$ (математическая модель задачи составлена).

4. Рассмотрим функцию $S = k\,\dfrac{(a+x)^2}{x}$, $0 < x < +\infty$, где $k = \dfrac{b\sin\alpha}{2}$. Найдем ее наименьшее значение:

1) $S' = k\,\dfrac{2(a+x)x-(a+x)^2}{x^2} = k\cdot\dfrac{(a+x)(x-a)}{x^2}$;

2) производная не существует в точке $x = 0$, а обращается в нуль в точках $x = -a$, $x = a$. Из этих трех точек промежутку $(0; +\infty)$ принадлежит лишь точка $x = a$;

3) $x = a$ — единственная стационарная точка, принадлежащая промежутку $(0; +\infty)$, причем точка минимума. Значит, по теореме 11 (п. 219), наименьшее значение функции достигается именно в точке $x = a$;

5. Вернемся к исходной геометрической задаче. Если $x = KB = a$, то, поскольку $OK = a$, MK — средняя линия треугольника AOB; значит, M — середина AB. Таким образом, чтобы от сторон угла отсечь треугольник наименьшей площади, надо провести через точку M прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный между сторонами угла, делился в точке M пополам.

221. Применение производной для доказательства неравенств.

Пример 1. Доказать, что при $0 < x < \dfrac{1}{2}$ справедливо неравенство

$$2x + \frac{1}{x^2} > 5.$$

Решение. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, где $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2}$, и найдем ее производную: $f'(x) = 2 - \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2(x^3-1)}{x^3}$. Замечаем, что на интервале $(0; 1)$

производная $f'(x) < 0$; значит, функция $y = f(x)$ убывает на этом интервале (см. п. 216). Поэтому, в частности, при $0 < x < \frac{1}{2}$ справедливо неравенство $f(x) > f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Но $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 5.$

Итак, $f(x) > 5$, т. е. $2x + \frac{1}{x^2} > 5$, что и требовалось доказать.

Пример 2. Доказать, что если $\alpha < \beta$, то $\alpha + \cos\alpha < \beta + \cos\beta$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, где $f(x) = x + \cos x$, и найдем ее производную: $f'(x) = 1 - \sin x$. Замечаем, что $f'(x) \geqslant 0$ при любых x, т. е. функция возрастает на всей числовой прямой. Значит, из $\alpha < \beta$ вытекает $f(\alpha) < f(\beta)$, т. е. $\alpha + \cos\alpha < \beta + \cos\beta$.

Пример 3. Доказать, что при всех x справедливо неравенство

$$x^5 + (1 - x)^5 \geqslant \frac{1}{16}.$$

Решение. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, где $f(x) = x^5 + (1 - x)^5$, и исследуем ее на экстремум. Имеем

$$f'(x) = 5x^4 - 5(1 - x)^4 = 5(x^2 - (1 - x)^2)(x^2 + (1 - x)^2) =$$

$$= 5(2x - 1)(2x^2 - 2x + 1);$$

$f'(x) = 0$ при $x = \frac{1}{2}$. Других стационарных или критических точек у функции нет (уравнение $2x^2 - 2x + 1 = 0$ не имеет корней). $f'(x) < 0$ при $x < \frac{1}{2}$, а $f'(x) > 0$ при $x > \frac{1}{2}$; значит, $x = \frac{1}{2}$ — точка минимума функции. Так как других точек экстремума у данной непрерывной функции нет, то $f\left(\frac{1}{2}\right)$ — наименьшее значение функции (см. теорему 12 из п. 219). Но $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{16}$.

Итак, $f(x) \geqslant \frac{1}{16}$, т. е. $x^5 + (1 - x)^5 \geqslant \frac{1}{16}$.

222. Общая схема построения графика функции. Пусть нужно построить график функции $y = f(x)$. Для этого нужно рассмотреть некоторые свойства функции, что обычно сопровождается соответствующей иллюстрацией на координатной плоскости. Это помогает создать графический образ функции. В то же время графические представления помогают лучше понять свойства функции, а иногда и предвидеть их. Полезно придерживаться следующего плана;

1) найти область определения функции $y = f(x)$;

2) найти точки, в которых $f(x) = 0$ (точки пересечения графика с осью абсцисс);

3) отметить на оси x точки, найденные в п. 2, и точки, в которых функция не определена, найденные в п. 1; эти точки разбивают ось абсцисс на несколько промежутков, на каждом из которых функция сохраняет постоянный знак, установить знак функции на каждом из промежутков;

4) исследовать функцию на четность и нечетность (в случае четности или нечетности функции можно ограничиться исследованием и построением

графика при $x \geqslant 0$, а затем воспользоваться симметрией графика — см. п. 74, 76);

5) найти вертикальные и горизонтальные асимптоты (см. п. 203, 206);

6) исследовать функцию на экстремум;

7) найти несколько дополнительных контрольных точек и построить график.

Для периодических функций полезно с самого начала найти основной период T (см. п. 76), с тем чтобы, исследовав функцию и построив ветвь графика на промежутке $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$, построить затем, воспользовавшись периодичностью, весь график.

Если выполнение каких-либо шагов предложенной схемы сопряжено с техническими трудностями, их иногда можно опустить.

П р и м е р 1. Построить график функции $y = x^3 - 4x$.

Р е ш е н и е.

1) Функция определена при всех x.

2) Из уравнения $x^3 - 4x = 0$ находим $x(x^2 - 4) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

3) Точки -2; 0; 2 разбивают ось абсцисс на 4 промежутка. Изменение знаков функции $y = x^3 - 4x$ на промежутках отражено на рисунке 1.167. Соответствующая иллюстрация на координатной плоскости представлена на рисунке 1.168 (закрашены те полуполосы, где графика не будет).

Рис. 1.167

4) $f(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x = -(x^3 - 4x) = -f(x)$; значит, функция нечетна, ее график симметричен относительно начала координат.

5) Асимптот у графика нет.

6) $y' = 3x^2 - 4 = 3\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

$y' = 0$ при $x_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $x_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.

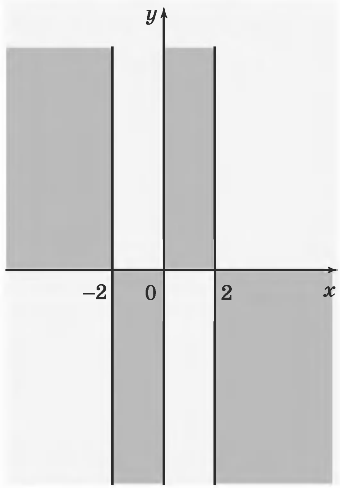


Рис. 1.168

Точка $\frac{2}{\sqrt{3}}$ принадлежит отрезку [0; 2], из рисунка 1.168 ясно, что в этой точке функция будет иметь минимум (здесь мы как раз имеем тот случай, когда графические представления позволяют сделать вывод о свойствах функции)

$$y_{\min} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 4\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{16}{3\sqrt{3}} \approx -3{,}1.$$

Аналогично, в точке $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ функция имеет максимум: $y_{\max} \approx 3{,}1$.

7) В качестве дополнительных возьмем две точки $x = 3$, $x = -3$. Имеем $f(3) = 15$, $f(-3) = -15$.

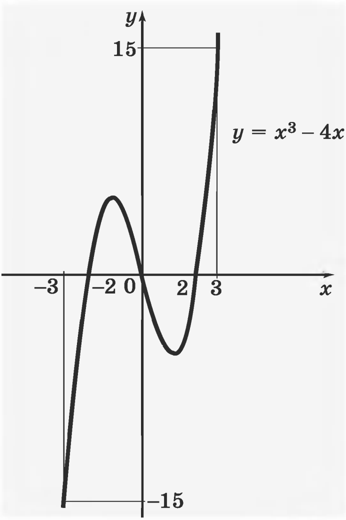


Рис. 1.169

Использовав найденные 7 точек, строим график функции (рис. 1.169).

Пример 2. Построить график функции $y = \dfrac{x^2-9}{x^2-4}$.

Решение. 1) Область определения: $x \neq \pm 2$.

2) Из уравнения $\dfrac{x^2-9}{x^2-4} = 0$ находим $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

3) Точки 2, –2, 3, –3 разбивают ось абсцисс на 5 промежутков. Изменение знаков функции $y = \dfrac{x^2-9}{x^2-4}$ по промежуткам представлено на рисунке 1.170, соответствующая иллюстрация на координатной плоскости дана на рисунке 1.171.

Рис. 1.170

4) Функция четна, так как $f(-x) = f(x)$. Значит, график функции симметричен относительно оси ординат.

5) $x = 2$, $x = -2$ — вертикальные асимптоты (см. п. 206).

Чтобы найти горизонтальную асимптоту, вычислим $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2-9}{x^2-4}$. Для этого числитель и знаменатель дроби разделим почленно на x^2 (см. п. 204):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-9}{x^2-4} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{9}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1-\frac{9}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Итак, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2-9}{x^2-4} = 1$; значит, $y = 1$ — горизонтальная асимптота графика функции (см. п. 203).

6) $$y' = \frac{(x^2-9)'(x^2-4)-(x^2-9)(x^2-4)'}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^2-4)-(x^2-9)\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{10x}{(x^2-4)^2}.$$

Производная обращается в нуль в точке $x = 0$ и не существует в точках $x = \pm 2$. Но эти последние не принадлежат области определения функции; значит, функция имеет лишь одну стационарную точку $x = 0$. При переходе через эту точку производная ме-

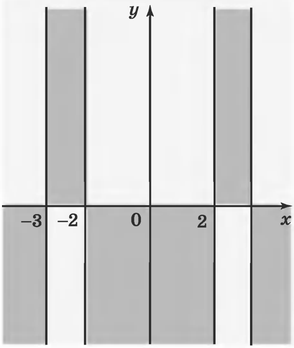


Рис. 1.171

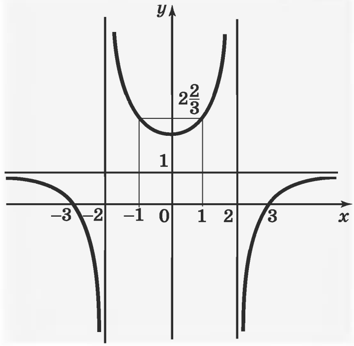


Рис. 1.172

няет знак с «−» на «+»; значит, $x = 0$ — точка минимума; $y_{\min} = f(0) = \frac{9}{4}$.

7) В качестве дополнительных возьмем следующие точки: $x = \pm 1$, $x = \pm 4$. Имеем $f(1) = f(-1) = \frac{8}{3}$, $f(4) = f(-4) = \frac{7}{12}$.

Использовав найденные 7 точек, строим график функции (рис. 1.172).

§ 22. Первообразная и интеграл

223. Первообразная. Функцию $y = F(x)$ называют *первообразной* для функции $y = f(x)$ на промежутке X, если для любого x из X выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Примеры.

1. Пусть $f(x) = x^3$. Тогда первообразная $F(x)$ имеет вид $F(x) = \frac{x^4}{4}$, так как $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3 = f(x)$.

2. Пусть $f(x) = \sin 3x$. Тогда первообразная $F(x)$ имеет вид $F(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x$, так как $F'(x) = \left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)' = -\frac{1}{3}\,3\,(-\sin 3x) = \sin 3x = f(x)$.

Для $f(x) = x^3$ в примере 1 мы нашли первообразную $F(x) = \frac{x^4}{4}$. Это не единственное решение задачи. Так, в качестве первообразной можно было взять и

$F_1(x) = \frac{x^4}{4} + 3$ $\left(\text{поскольку } \left(\frac{x^4}{4} + 3\right)' = x^3\right)$, и $F_2(x) =$

$= \frac{x^4}{4} - 5$ $\left(\text{поскольку } \left(\frac{x^4}{4} - 5\right)' = x^3\right)$, и вообще любую

функцию вида $y = \frac{x^4}{4} + C$. Так же обстоит дело в

примере 2, где в качестве первообразной можно было взять любую функцию вида $y = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 13. Если $F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$ на промежутке X, то у функции $y = f(x)$ бесконечно много первообразных и все эти первообразные имеют вид $F(x) + C$, где C — любое действительное число.

П р и м е р. Найти общий вид первообразных для функции $y = f(x)$, где $f(x) = x^r$, $r \neq -1$.

Р е ш е н и е. Одной из первообразных будет $F(x) =$ $= \frac{x^{r+1}}{r+1}$, так как $F'(x) = \left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right)' = \frac{1}{r+1}(r+1)x^r =$ $= x^r = f(x)$. Значит, общий вид первообразных таков:

$$\frac{x^{r+1}}{r+1} + C.$$

224. Таблица первообразных. Учитывая, что отыскание первообразной есть операция, обратная дифференцированию, и отталкиваясь от таблицы производных (см. п. 210), получаем следующую таблицу первообразных (для простоты в таблице приведена одна первообразная $F(x)$, а не общий вид первообразной $F(x) + C$):

Функция	Первообразная	Функция	Первообразная
1) $f(x) = k$	$F(x) = kx$	7) $f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$
2) $f(x) = x^r$ $(r \neq -1)$	$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$	8) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\operatorname{ctg} x$
3) $f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln \lvert x \rvert$	9) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \operatorname{tg} x$
4) $f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	10) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arcsin x$
5) $f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$	11) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \operatorname{arctg} x$
6) $f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$		

225. Правила вычисления первообразных. Пусть нужно найти первообразную функции $y = f(x)$. Иногда это можно сделать с помощью таблицы первообразных из п. 224; например, для функции $y = x^{\frac{3}{5}}$ по второй строке указанной таблицы находим $F(x) = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1}$, т. е. $F(x) = \frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}}$, а общий вид первообразных $\frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}} + C$.

Но чаще, прежде чем воспользоваться таблицей, приходится применять правила вычисления первообразных.

1°. *Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $H(x)$ — первообразная для $h(x)$, то $F(x) + H(x)$ — первообразная для $f(x) + h(x)$.*

Иными словами, *первообразная суммы равна сумме первообразных.*

2°. *Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а k — постоянная, то $kF(x)$ — первообразная для $kf(x)$.*

Иными словами, *постоянный множитель можно вынести за знак первообразной.*

3°. *Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а k, b — постоянные, причем $k \neq 0$,* то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ *— первообразная для $f(kx + b)$.*

П р и м е р 1. Найти общий вид первообразных для функции $y = f(x)$, где $f(x) = 2\sqrt{x} + 3\sin x - 2^x + \frac{\cos x}{3}$.

Р е ш е н и е.

1) Воспользовавшись таблицей первообразных (см. п. 224), найдем первообразную для каждой из четырех функций, входящих в состав $f(x)$:

$$f_1(x) = \sqrt{x}, \quad f_2(x) = \sin x, \quad f_3(x) = 2^x, \quad f_4(x) = \cos x.$$

Для $f_1(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ имеем $F_1(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

Для $f_2(x) = \sin x$ имеем $F_2(x) = -\cos x$.

Для $f_3(x) = 2^x$ имеем $F_3(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$.

Для $f_4(x) = \cos x$ имеем $F_4(x) = \sin x$.

2) Воспользовавшись правилом 2°, получим, что для $2f_1(x)$ первообразной будет $2F_1(x)$, т. е. $2 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} x^{\frac{2}{3}}$; для $3f_2(x)$ первообразной будет $3F_2(x)$, т. е. $-3 \cos x$; для $-f_3(x)$ первообразной будет $-F_3(x)$, т. е. $-\frac{2^x}{\ln 2}$; для $\frac{1}{3} f_4(x)$ первообразной будет $\frac{1}{3} F_4(x)$, т. е. $\frac{1}{3} \sin x$.

3) Воспользовавшись правилом 1°, получим, что для $f(x)$ первообразной будет

$$F(x) = 2F_1(x) + 3F_2(x) - F_3(x) + \frac{1}{3} F_4(x) =$$

$$= \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - 3\cos x - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{1}{3} \sin x.$$

4) Общий вид первообразных для заданной функции

$$\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - 3\cos x - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{\sin x}{3} + C.$$

П р и м е р 2. Найти общий вид первообразных для функции $y = f(x)$, где $f(x) = (2x - 1)^5$.

Р е ш е н и е. Для $h(x) = x^5$ первообразной будет $H(x) = \frac{x^6}{6}$. Тогда по правилу 3^0 для $h(2x - 1) =$

$= (2x - 1)^5$ первообразной будет $\frac{1}{2}\ H(2x - 1) =$

$= \frac{1}{2}\frac{(2x-1)^6}{6}$.

Итак, $F(x) = \frac{(2x-1)^6}{12}$, а общий вид первообразных для заданной функции $\frac{(2x-1)^6}{12} + C$.

Пример 3. Найти общий вид первообразных для функции $y = f(x)$, где $f(x) = \sin^2 3x$.

Решение. Воспользуемся тем, что $\sin^2 3x =$ $= \frac{1-\cos 6x}{2}$ (см. п. 129). Тогда $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 6x$. Для

$f_1(x) = \frac{1}{2}$ первообразной будет $\frac{1}{2}x$, а для $f_2(x) = \cos 6x$

в соответствии с правилом 3° первообразной будет

$\frac{\sin 6x}{6}$. Тогда для $f(x) = f_1(x) - \frac{1}{2}\ f_2(x)$ по правилам 1°

и 2° первообразной будет $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 6x}{6}$, т. е. $\frac{1}{2}x - \frac{\sin 6x}{12}$.

Общий вид первообразных $\frac{x}{2} - \frac{\sin 6x}{12} + C$.

226. Интеграл. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Разобьем отрезок $[a; b]$ на n частей точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; для однородности обозначений положим $a = x_0$, $b = x_n$ (рис. 1.173). Введем обозначения $x_1 - x_0 = \Delta x_0$, $x_2 - x_1 = \Delta x_1$,

Рис. 1.173

$x_3 - x_2 = \Delta x_2$, ..., $x_n - x_{n-1} = \Delta x_{n-1}$ и рассмотрим сумму

$$f(x_0)\,\Delta x_0 + f(x_1)\,\Delta x_1 + f(x_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(x_{n-1})\,\Delta x_{n-1}. \qquad (1)$$

Ее называют *интегральной суммой для функции* $y = f(x)$ *по отрезку* $[a; b]$.

Наряду с интегральной суммой (1) рассматривают и интегральную сумму вида

$$f(x_1)\,\Delta x_0 + f(x_2)\,\Delta x_1 + \ldots + f(x_n)\,\Delta x_{n-1}. \qquad (2)$$

Отличие суммы (1) от суммы (2) состоит в том, что в первом случае на каждом из отрезков $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, ..., $[x_{n-1}; x_n]$ выбирается значение функции в левом конце отрезка, а во втором случае — в правом.

На практике удобнее делить отрезок $[a; b]$ на n равных частей. Тогда $\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$ и сумма (1) принимает вид $\frac{b-a}{n}(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}))$. Значение суммы зависит только от числа n; эту сумму можно обозначить Σ (Σ — греческая буква «сигма»).

Рассмотрим последовательность интегральных сумм

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n.$$

В математике установлено, что для непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $y = f(x)$ эта последовательность сходится (см. п. 200). Ее предел называют *интегралом функции* $f(x)$ *от* a *до* b и обозначают $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (читается «интеграл от a до b эф от икс дэ икс»).

Итак, $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n \to \infty} \sum_n$. Числа a и b называют соответственно *нижним* и *верхним пределами интегрирования*, знак $\int$ — *знаком интеграла*, функцию $y = f(x)$ — *подынтегральной функцией*.

П р и м е р. Найти $\int\limits_0^1 x\,dx$.

Р е ш е н и е. Составим интегральную сумму Σ_n для функции $y = f(x)$, где $f(x) = x$ на отрезке $[0; 1]$. Для этого разобьем отрезок $[0; 1]$ на n равных частей точками $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ (рис. 1.174).

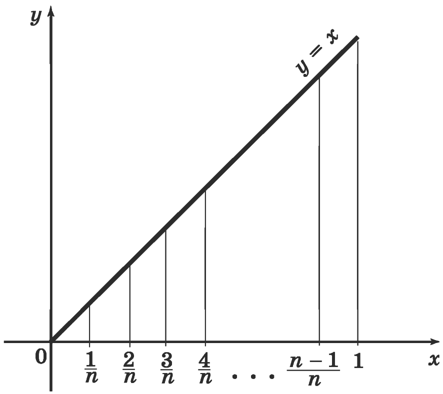


Рис. 1.174

Имеем: $f(0) = 0$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$, $f\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n}$, $f\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{3}{n}$, ..., $f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{n-1}{n}$. Интегральная сумма Σ_n имеет вид

$$\sum_n = \frac{1}{n}\left(0 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n}\right) = \frac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n^2}.$$

В числителе содержится сумма первых $(n - 1)$ членов арифметической прогрессии, у которой первый член равен 1, а $(n - 1)$-й равен $n - 1$. Тогда сумма S_{n-1} вычисляется по формуле (см. п. 197)

$$S_{n-1} = \frac{1+(n-1)}{2}(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

В итоге получаем $\sum_n = \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$.

Далее имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$. Значит, $\int\limits_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

227. Связь между интегралом и первообразной (формула Ньютона—Лейбница). Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

(*формула Ньютона—Лейбница*).

На практике в формуле (1) удобно вместо $F(b) - F(a)$ писать $F(x)\Big|_a^b$.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_0^1 x^7 dx$.

Решение. Для $f(x) = x^7$ первообразной является $F(x) = \frac{x^8}{8}$. Значит, $\int\limits_0^1 x^7 dx = \frac{x^8}{8}\Big|_0^1 = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$.

Пример 2. Вычислить $\int\limits_1^2 \frac{dx}{2x+3}$.

Решение. Для $f(x)\ \frac{1}{2x+3}$ первообразной является $F(x) = \frac{1}{2}\ln|2x+3|$. Значит,

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2}\ln|2x+3|\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 7 - \ln 5) = \frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}.$$

228. Правила вычисления интегралов.

1°. *Интеграл суммы равен сумме интегралов:*

$$\int\limits_a^b (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx + \int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$$

2°. *Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:*

$$\int\limits_a^b kf(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Пример 1. Вычислить $\int\limits_{-2}^{1} (2x^3 + 3x - 4)\,dx$.

Решение. Воспользовавшись правилами 1° и 2°, получим

$$\int\limits_{-2}^{1} (2x^3+3x-4)\,dx = \int\limits_{-2}^{1} 2x^3dx + \int\limits_{-2}^{1} 3xdx + \int\limits_{-2}^{1} -4dx =$$

$$=2\int\limits_{-2}^{1} x^3dx+3\int\limits_{-2}^{1} xdx-4\int\limits_{-2}^{1} dx=2\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{1}+3\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1}-4x\Big|_{-2}^{1}=$$

$$=2\left(\frac{1}{4}-4\right)+\frac{3}{2}(1-4)-4(1+2)=-24.$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x dx$.

Решение. Представим подынтегральную функцию в виде суммы функций, первообразные от которых можно найти по таблице (см. п. 224):

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$$

Значит,

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x dx = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} - \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} dx =$$

$$= \operatorname{tg}x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{\pi}{12} = \frac{4(3-\sqrt{3})-\pi}{12}.$$

229. Использование интеграла для вычисления площадей плоских фигур. Рассмотрим плоскую фигуру Φ, представляющую собой множество точек координатной плоскости xy, лежащее в полосе между прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, имеющее в своем составе точки с абсциссами $x = a$, $x = b$ и ограниченное сверху и снизу графиками непрерывных на $[a; b]$ функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ таких, что для всех x из $[a; b]$ справедливо неравенство $f_1(x) \geqslant f_2(x)$. Примеры таких фигур представлены на рисунках 1.175—1.178. В частности, фигура, изображенная на рисунке 1.177 (1.178), ограничена сверху (снизу) графиком функции $y = f(x)$, а снизу (сверху) — прямой $y = 0$. Такую фигуру называют *криволинейной трапецией*.

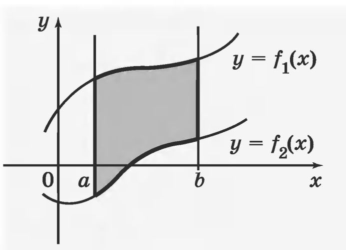


Рис. 1.175

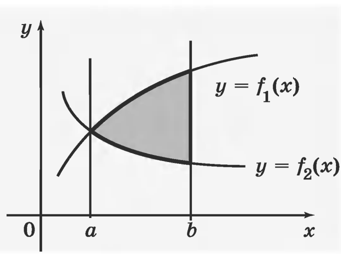


Рис. 1.176

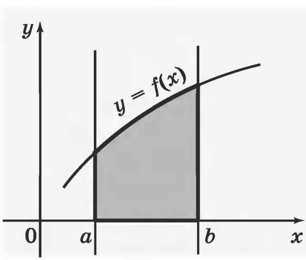


Рис. 1.177

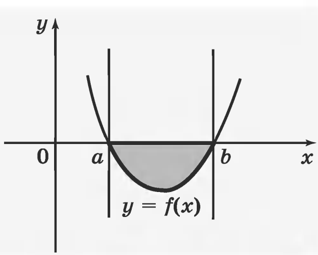


Рис. 1.178

Площадь S фигуры Ф вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx. \qquad (1)$$

В частности, для криволинейной трапеции, изображенной на рисунке 1.177 получаем

$$S = \int_a^b f(x)dx, \qquad (2)$$

а для криволинейной трапеции, изображенной на рисунке 1.178 получаем

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (3)$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$.

Решение. Фигура, площадь которой надо найти, изображена на рисунке 1.179. Воспользовавшись формулой (2), получим

$$S = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx = \int_{-2}^{2} 4dx - \int_{-2}^{2} x^2dx = 4x\Big|_{-2}^{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} =$$

$$= 4(2+2) - \frac{1}{3}(8+8) = \frac{32}{3}.$$

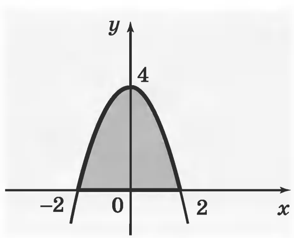


Рис. 1.179

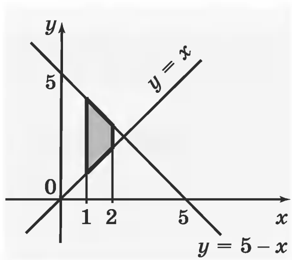


Рис. 1.180

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = 5 - x$, $x = 1$, $x = 2$.

Решение. Фигура, площадь которой надо найти, изображена на рисунке 1.180. По формуле (1) получим

$$S = \int_1^2 ((5 - x) - x)\,dx = \int_1^2 (5 - 2x)\,dx = \int_1^2 5dx - 2\int_1^2 xdx =$$

$$= 5x \Big|_1^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = 5(2 - 1) - (4 - 1) = 2.$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x - 2$, $y = x^2 - 4x + 2$.

Решение. Построив прямую $y = x - 2$ и параболу $y = x^2 - 4x + 2$ (см. п. 114), получим фигуру, площадь которой требуется вычислить (рис. 1.181).

Значит, $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,dx$, где $f_1(x) = x - 2$, $f_2(x) = x^2 - 4x + 2$, а пределы интегрирования a и b суть абсциссы точек пересечения параболы и прямой. Для отыскания этих абсцисс решим уравне-

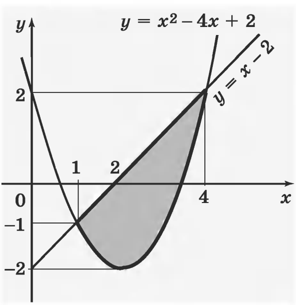


Рис. 1.181

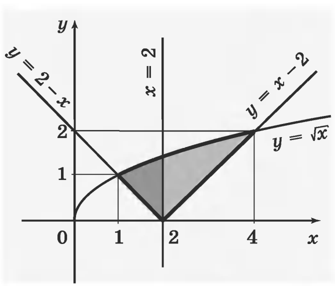


Рис. 1.182

ние $f_1(x) = f_2(x)$, т. е. $x - 2 = x^2 - 4x + 2$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

$$S = \int_1^4 ((x-2) - (x^2 - 4x + 2))dx = \int_1^4 (5x - x^2 - 4)\,dx =$$

$$= 5\,\frac{x^2}{2}\Big|_1^4 - \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 - 4x\Big|_1^4 =$$

$$= \frac{5}{2}(16-1) - \frac{1}{3}(64-1) - 4\,(4-1) = 4{,}5.$$

П р и м е р 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = |x - 2|$.

Р е ш е н и е. Фигура, площадь которой требуется найти, изображена на рисунке 1.182 (см. п. 159). Проведем прямую $x = 2$. Тогда площадь S интересующей нас фигуры равна сумме $S_1 + S_2$, где S_1 — площадь фигуры, закрашенной на рисунке 1.182 чуть темнее, а S_2 — площадь фигуры, закрашенной на рисунке 1.182 светлее.

Имеем $S_1 = \int_1^2 (\sqrt{x} - (2 - x))dx = \int_1^2 (x^{\frac{1}{2}} + x - 2)dx =$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 + \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 - 2x\Big|_1^2 = \frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1) + \frac{1}{2}(4 - 1) -$$

$$- 2\,(2-1) = \frac{8\sqrt{2} - 7}{6};$$

$$S_2 = \int_2^4 (\sqrt{x} - (x-2))\,dx = \int_2^4 (x^{\frac{1}{2}} - x + 2)\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_2^4 - \frac{x^2}{2}\Big|_2^4 +$$

$$+ 2x\,\Big|_2^4 = \frac{2}{3}(8 - \sqrt{8}) - \frac{1}{2}(16-4) + 2\,(4-2) = \frac{10 - 4\sqrt{2}}{3}.$$

Значит, $S = S_1 + S_2 = \dfrac{8\sqrt{2} - 7}{6} + \dfrac{10 - 4\sqrt{2}}{3} = \dfrac{13}{6}$.

Часть вторая

ГЕОМЕТРИЯ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ

§ 1. Основные геометрические фигуры

1. Общие представления о геометрических фигурах. Объединение и пересечение фигур. На рисунках 2.1 и 2.2 изображены различные геометрические фигуры. Всякую геометрическую фигуру мы представляем себе составленной из точек.

Рис. 2.1

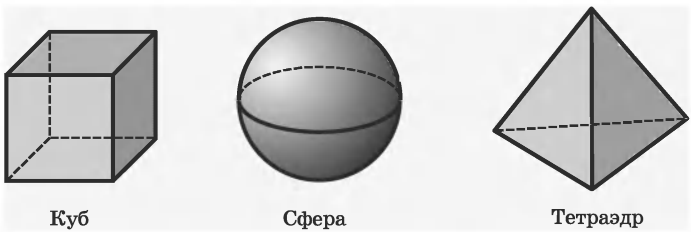


Рис. 2.2

Часть любой геометрической фигуры также является геометрической фигурой.

Определение. Любое множество точек называют *геометрической фигурой*.

На рисунке 2.3 отрезок AB есть часть прямой a, на рисунке 2.4 круг ω_2 есть часть круга ω_1, на

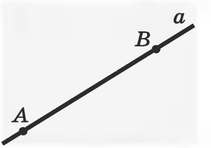


Рис. 2.3

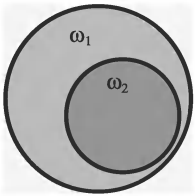


Рис. 2.4

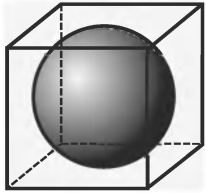


Рис. 2.5

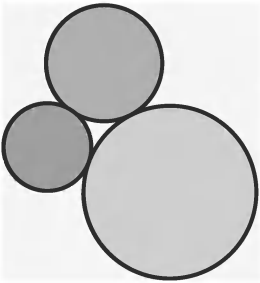


Рис. 2.6

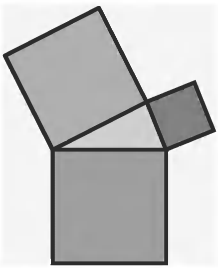


Рис. 2.7

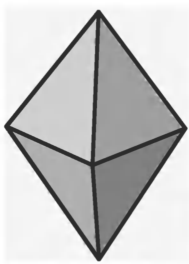


Рис. 2.8

рисунке 2.5 шар вписан в куб и является частью куба.

Объединение нескольких фигур есть геометрическая фигура. На рисунке 2.6 фигура состоит из трех кругов, на рисунке 2.7 фигура состоит из треугольника и квадратов, на рисунке 2.8 фигура составлена из двух тетраэдров, на рисунке 2.9 фигура состоит из нескольких кубов. Объединение обозначается знаком $\cup$.

Пересечение геометрических фигур есть также геометрическая фигура. На рисунке 2.10 отрезки AB и CD пересекаются в точке P. На рисунке 2.11 также отрезки MP и PK пересекаются в точке P. Пересечением же отрезков EH и KX на рисунке 2.12 является отрезок HK. Пересечение обозначается знаком $\cap$.

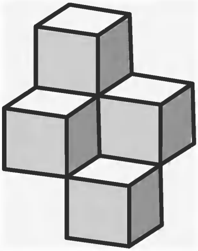


Рис. 2.9

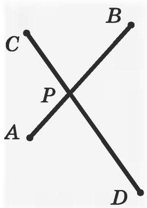


Рис. 2.10

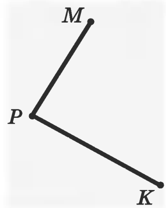


Рис. 2.11

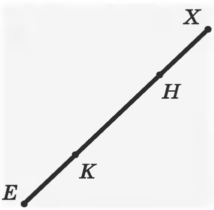


Рис. 2.12

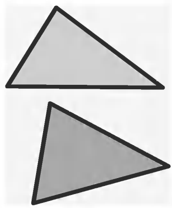


Рис. 2.13

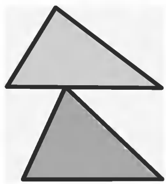


Рис. 2.14

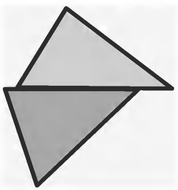


Рис. 2.15

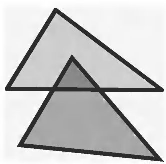


Рис. 2.16

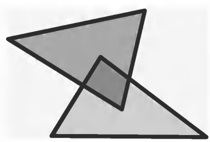


Рис. 2.17

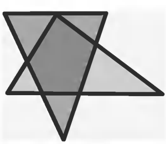


Рис. 2.18

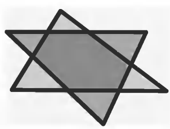


Рис. 2.19

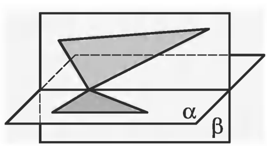


Рис. 2.20

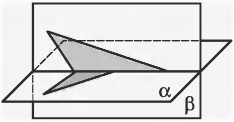


Рис. 2.21

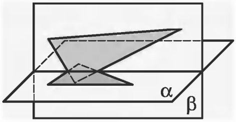


Рис. 2.22

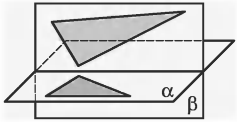


Рис. 2.23

П р и м е р. Рассмотрите возможные случаи взаимного расположения двух треугольников. В каждом случае назовите их пересечение.

Р е ш е н и е. На рисунках 2.13—2.19 показано, что пересечение двух треугольников может:

а) не содержать точек (рис. 2.13);

б) состоять из одной точки (рис. 2.14);

в) быть отрезком (рис. 2.15);

г) быть треугольником (рис. 2.16);

д) быть четырехугольником (рис. 2.17);

е) быть пятиугольником (рис. 2.18);

ж) быть шестиугольником (рис. 2.19).

На рисунках 2.13—2.19 изображены различные случаи пересечения треугольников, если они лежат в одной плоскости. Однако, если треугольники лежат в разных плоскостях, то пересечением может быть:

а) точка (рис. 2.20);

б) отрезок (рис. 2.21, 2.22);

в) пустое множество точек (рис. 2.23).

2. Изображение геометрических фигур. *Изображение плоских фигур* на листе бумаги (или на доске) подчинено некоторым правилам и выполняется с использованием различных инструментов: линейки, угольника, транспортира, циркуля.

При изображении или построении плоских фигур мы не меняем формы и размеры тех фигур, которые изображаем. При этом сохраняются длины отрезков, величины углов, параллельность прямых и т. д. В геометрии говорят, что при этом получаются *равные фигуры*. Если нужно изобразить очень большие или очень маленькие фигуры, то сохраняются формы, а размеры могут быть изменены (в одном и том же отношении). При этом получают так называемые *подобные фигуры*.

Изображать пространственные фигуры на плоскости (листе бумаги) намного сложнее.

Наиболее важные из правил изображения пространственных фигур:

— все линии, которые не видны, которые закрыты гранями (плоскостями), изображаются пунктирными линиями;

— плоскости на рисунках изображаются иногда параллелограммами (рис. 2.24), а чаще — произвольной областью (рис. 2.25);

Рис. 2.24

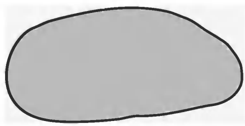


Рис. 2.25

— длины отрезков сохраняются не всегда, но всегда середины отрезков изображаются серединами их изображения (это свойство означает, что если на модели у нас отмечена середина ребра, то и на рисунке будет обозначена тоже середина ребра);

— параллельные прямые (отрезки), имеющиеся на реальной модели, на рисунках тоже изображаются параллельными прямыми (отрезками).

3. Точки и прямые. Точки могут произвольно располагаться в пространстве: *лежать и не лежать на плоскости* (на рис. 2.26 точки A и B лежат на плоскости, а точка C не лежит), *принадлежать* различным *фигурам* и *не принадлежать* им (на рис. 2.27 точка A принадлежит шару, а на рис. 2.28 не принадлежит ему).

Точки обозначаются прописными (заглавными) латинскими буквами: A, B, C, D, K, M, ...

Пусть даны две точки A и B. Проведем через точки A и B прямую (рис. 2.29). У нас появляется еще одно, важное понятие геометрии — *прямая*, которая также состоит из точек.

Изобразить прямую целиком невозможно, мы лишь условно изображаем ее часть (рис. 2.29).

Некоторые важные проблемы в геометрии решают путем введения законов — *аксиом*, которые *принимаются без доказательства*.

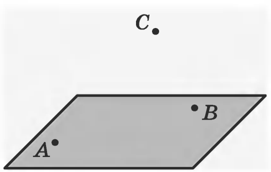


Рис. 2.26

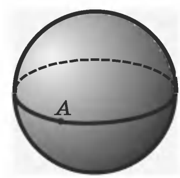


Рис. 2.27

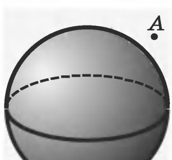


Рис. 2.28

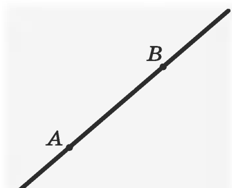


Рис. 2.29

Слово «аксиома» в переводе с греческого языка означает *«бесспорная истина, не требующая доказательств»*, т. е. очевидный факт, ясный сам по себе.

Аксиома 1. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

Прямые обозначаются строчными латинскими буквами: a, b, c, d, m, n и т. д., а также соответствующими точками, лежащими на ней. Например, прямую a на рисунке 2.29 можно обозначить AB.

4. Взаимное расположение точек и прямых. Точки и прямые могут по-разному располагаться по отношению друг к другу (рис. 2.30).

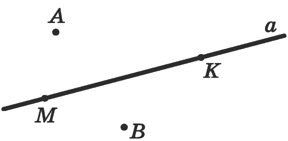


Рис. 2.30

Про точки M и K говорят, что они *лежат на прямой a*, или что точки M и K *принадлежат прямой a*. Точки A и B *не лежат на прямой a* или *не принадлежат прямой a*.

Про прямую иногда говорят, что она *проходит* через точки. Так, прямая a на рисунке 2.30 *проходит через точки M, K*. Можно также сказать, что прямая a не проходит через точку A.

В курсе геометрии применяются некоторые удобные знаки, которые относятся к так называемой *теории множеств*: *знак принадлежности* «$\in$» и *знак непринадлежности* «$\notin$».

Запись $C \in p$ читается: точка C принадлежит прямой p. Глядя на рисунок 2.30, можно записать: $M \in a$, $K \in a$.

Запись $D \notin p$ читается: точка D не принадлежит прямой p. Глядя на рисунок 2.30 можно записать: $A \notin a$, $B \notin a$.

5. Плоскости. Плоскости расположены в пространстве, в пространстве есть бесконечно много различных плоскостей. На рисунке 2.31 изображены несколько плоскостей, пересекающихся по одной прямой, а на рисунке 2.32 — параллельные друг другу плоскости.

Плоскости обозначаются строчными греческими буквами: α, β, γ, ω … .

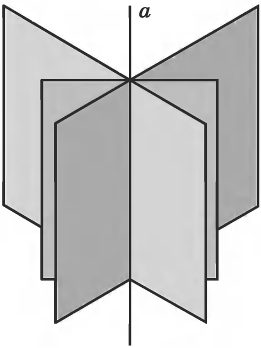


Рис. 2.31

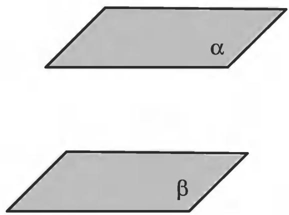


Рис. 2.32

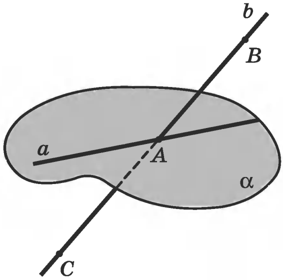


Рис. 2.33

На рисунке 2.33 изображены плоскость α, прямые a и b и точки A, B и C. Про точку A и прямую a говорят, что они *лежат в плоскости* α или *принадлежат* ей. Про точки B и C и прямую b говорят, что они *не лежат в плоскости* α или *не принадлежат* ей.

Принадлежность прямой плоскости обозначают знаком $\subset$ — включение, который показывает, что некоторое множество точек принадлежит другому множеству точек, например:

$A \in \alpha$ — точка A принадлежит плоскости α; $B \notin \alpha$ — точка B не лежит в плоскости α;

$a \subset \alpha$ — прямая a принадлежит плоскости α; $a \not\subset \alpha$ — прямая a не принадлежит плоскости α.

Одно из свойств взаимного расположения прямой и плоскости формулируется как аксиома — аксиома прямой и плоскости.

Аксиома 2. Прямая, проходящая через две точки плоскости, принадлежит этой плоскости. (*Аксиома прямой и плоскости.*)

Аксиома 3. Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит одна и только одна плоскость. (*Аксиома плоскости.*)

Теорема 1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит одна, и только одна плоскость.

Любая прямая a разбивает плоскость на два непустых множества (рис. 2.34). Объединение прямой a с одним из образовавшихся множеств называется *полуплоскостью*. Прямую a называют *границей полуплоскости*. На рисунке 2.34 прямая a одновременно является границей обеих полуплоскостей.

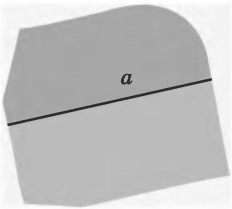


Рис. 2.34

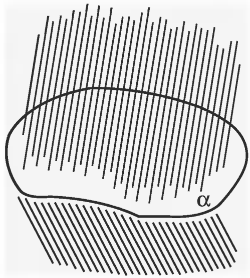


Рис. 2.35

Плоскость разбивает пространство на два множества, которые на рисунке 2.35 заштрихованы. Объединение этой плоскости α с одним из образовавшихся множеств и называется *полупространством*. Плоскость α называется *границей полупространства*. Из рисунка 2.35 ясно, что плоскость α определяет сразу два полупространства.

§ 2. Отрезки

6. Понятие отрезка. На рисунке 2.36 выделена часть прямой, ограниченная двумя точками. Такая часть прямой называется отрезком. Точки, ограничивающие отрезок, называются его *концами*.

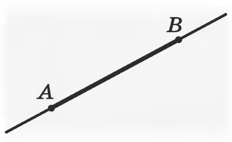


Рис. 2.36

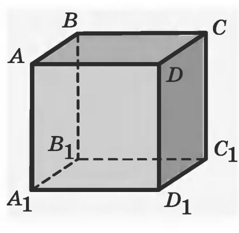


Рис. 2.37

На этом рисунке изображен отрезок с концами в точках A и B. Отрезок AB содержит точки A, B и все точки прямой AB, лежащие между точками A и B.

Отрезки обозначаются двумя буквами, характеризующими концы отрезка: AB, CD, MK и т. д.

На рисунке 2.37 изображен куб, его ребра — отрезки, всего их 12: AB, BC, CD, DA, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1.

7. Измерение длины отрезка. Каждому отрезку соответствует его *длина*. Длину отрезка часто называют *расстоянием между двумя точками*, являющимися концами этого отрезка. Процесс нахождения длин отрезков называется *измерением длин отрезков*.

Измерить отрезок — это значит сравнить его с некоторым отрезком, принятым за единицу измерения.

Так, если в отрезке AB метр укладывается 5 раз, то говорят, что длина отрезка равна 5 м. Если отрезок, принятый за единицу измерения, не укладывается целое число раз в измеряемом отрезке, единицу делят на равные части, обычно на 10 равных частей, и определяют, сколько раз одна часть укладывается в остатке.

Основное свойство измерения отрезков:

каждый отрезок имеет определенную длину больше нуля. *Длина отрезка* равна сумме длин частей, на которые он разбивается *любой его точкой*.

На рисунке 2.38 отрезок MK содержит точку A. Тогда длина отрезка MK равна сумме длин отрезков MA и AK: $MK = MA + AK$.

Рис. 2.38

Определение. Отрезки *равны*, если равны их длины.

Можно определить равные отрезки по-другому.

Определение. Отрезки *равны*, если при наложении друг на друга они совпадают.

8. Расстояния между точками и их свойства. Длину отрезка иначе называют *расстоянием между точками*.

Свойства расстояний между точками.

1. Расстояние от точки A до точки B положительно, если точки различны, и равно нулю, если они совпадают: $AB > 0$, если $A \neq B$, и $AB = 0$, если $A = B$.

2. Расстояние от точки A до точки B равно расстоянию от точки B до точки A: $AB = BA$.

3. Для любых трех точек A, B и C расстояние от A до C не больше (меньше или равно) суммы расстояний от A до B и от B до C: $AC < AB + BC$.

Точка A *лежит между* точками B и C, если расстояние от точки B до точки A плюс расстояние от точки A до точки C равно расстоянию от точки B до точки C, то есть $BA + AC = BC$.

Используя понятие «лежать между», можно дать определения понятию отрезка и середине отрезка.

Определение. *Отрезком AB* называется фигура, состоящая из точек A, B и всех точек, лежащих между ними.

Определение. Точка B называется *серединой* отрезка AC, если:

1) B лежит между A и C,

2) $AB = BC$.

Опираясь на известные аксиомы, определения и свойства, можно доказать важную теорему курса геометрии — *неравенство треугольника*.

Теорема 2. Для любых точек A, B и C, не принадлежащих одной прямой, расстояние AC меньше расстояний AB и BC, то есть $AC < AB + BC$.

Пример. На прямой даны три точки O, P и M. Известно, что $OM = 14$ см, $OP = 8$ см, $PM = 6$ см. Лежит ли точка P между O и M? Может ли точка B принадлежать отрезку PM, если $BM = 5$ см, $PB = 4$ см? Объясните ответ.

Решение. Точка P лежит между точками O и M, если $OP + PM = OM$. Проверим выполнение этого условия: 8 см + 6 см = 14 см.

Вывод: точка P лежит между точками O и M.

Точка B принадлежит отрезку PM, если она лежит между точками P и M, т. е. $PB + BM = PM$. Проверим: 4 см + 5 см = 9 см, а по условию $PM = 6$ см.

Вывод: точка B не принадлежит отрезку PM.

§ 3. Ломаная

9. Понятие ломаной. На рисунке 2.39 изображены несколько точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, которые последовательно соединены отрезками A_1A_2, A_2A_3,

A_3A_4, A_4A_5. В результате получилась геометрическая фигура $A_1A_2A_3A_4A_5$, которая называется *ломаной*.

Определение. *Ломаной* $A_1A_2A_3...A_n$ называется фигура, которая состоит из точек A_1, A_2, A_3, ... A_n и соединяющих их отрезков A_1A_2, A_2A_3, ... , $A_{n-1}A_n$. Точки A_1, A_2, A_3, ..., A_n называются *вершинами ломаной*, а отрезки A_1A_2, A_2A_3, ... $A_{n-1}A_n$ — *звеньями ломаной*.

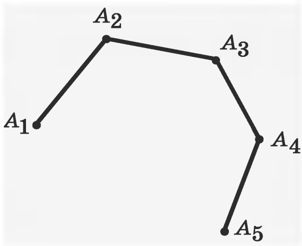


Рис. 2.39

При построении ломаной соседние отрезки не должны лежать на одной прямой. Точки A_1 и A_n называются соответственно *началом* и *концом ломаной*, а составляющие ее отрезки называются *звеньями* ломаной (рис. 2.39).

Определение. Если концы ломаной совпадают, то ее называют *замкнутой*.

На рисунках 2.41, 2.42, 2.44 изображены замкнутые ломаные.

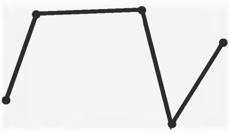


Рис. 2.40

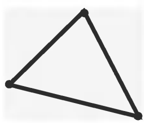


Рис. 2.41

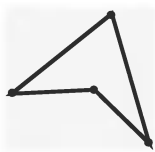


Рис. 2.42

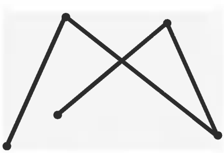


Рис. 2.43

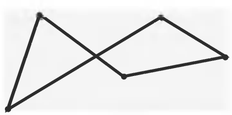


Рис. 2.44

Ломаная иногда может пересекать сама себя, т. е. не соседние по порядку звенья ломаной имеют общие точки. В этом случае ломаная называется *самопересекающейся* или *непростой* (рис. 2.43, 2.44). Если таких самопересечений нет, то ломаная называется *простой*. На рис. 2.40, 2.41 изображены простые ломаные.

10. Длина ломаной. Длина ломаной равна сумме длин ее звеньев.

Можно доказать *теорему о длине ломаной*.

Теорема 3. Длина ломаной больше расстояния между ее концами.

Пример. Звенья ломаной $EFMO$ таковы: $EF = 1$ см, $FM = 4$ см, $MO = 2$ см. Может ли отрезок EO равняться: а) 0,5 см; б) 8 см?

Решение. Из условия задачи имеем:

1. Ломаная $EFMO$.
2. $EF = 1$ см, $FM = 4$ см, $MO = 2$ см.

} дано (рис. 2.45)

3. Может ли отрезок EO равняться: а) 0,5 см; б) 8 см.

На рис. 2.45 нет отрезка EO.

4. Построим отрезок EO (построение) (рис. 2.46).

Связь между данной ломаной $EFMO$ и отрезком EO определяет теорема о длине ломаной.

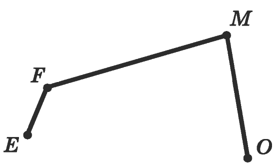


Рис. 2.45

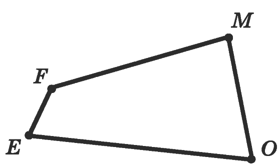


Рис. 2.46

5. Длина ломаной *EFMO* должна быть не меньше длины отрезка *EO* (1, 2, 4, теорема 3).

6. Длина ломаной *EFMO* равна 7 см (1, 2).

7. Длина отрезка *EO* должна быть не больше 7 см (4, 5).

8. Длина отрезка *EO* может быть равна 0,5 см, но не может быть равна 8 см (1, 2, 7).

§ 4. Углы

11. Луч. На рисунке 2.47 изображена прямая *a*, на ней отмечена точка *B*, которая разделяет прямую *a* на три части:

1) первая состоит из точек, лежащих левее точки *B*;

2) вторая состоит из самой точки *B*;

3) третья состоит из точек, лежащих правее точки *B*.

Объединение первого или третьего множеств с точкой *B* называется *лучом* или *полупрямой*. Таким образом, точка *B* определила на прямой *a* два луча.

Точка *B* называется *началом каждого из этих лучей или начальной точкой полупрямой*.

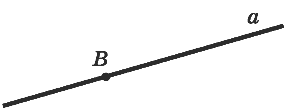


Рис. 2.47

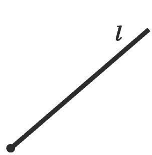


Рис. 2.48

Рис. 2.49

Луч обозначается латинскими буквами: одной строчной (например, l на рис. 2.48) или двумя заглавными, одна из которых обозначает начало луча, а вторая — какую-либо точку на луче (например, луч BC на рис. 2.49).

Полупрямые прямой a, на которые она разбивается точкой B, называются *дополнительными*.

В повседневной жизни мы часто употребляем понятие *направления*: направление движения пешехода или автомобиля, направление удара мяча в футбольном матче, направление полета самолета или ракеты и т. д.

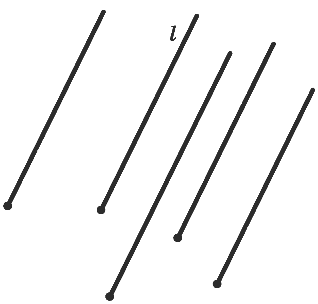


Рис. 2.50

При задании направления используют понятие луча. В геометрии считают, что направление задается лучом, а определить понятие «направление» можно как множество лучей, сонаправленных (одинаково направленных) с данным (рис. 2.50).

1. Если два луча лежат на одной прямой, то будем считать их *одинаково направленными*, если один из них содержится в другом, и *противоположно направленными*, если один из них не содержится в другом.

2. Если два луча параллельны, но не лежат на одной прямой, то проведем через их начала плоскость, которая разделит пространство на два полупространства. Если лучи лежат в одном из этих полупространств, то они *сонаправлены* (рис. 2.51). Если же лучи лежат в разных полупространствах, то они *противоположно направлены* (рис. 2.52).

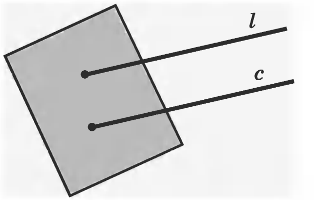


Рис. 2.51

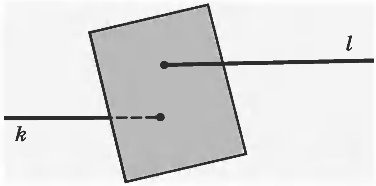


Рис. 2.52

12. Понятие угла. На рисунке 2.53 два луча OA и OB имеют общее начало. Эти два луча с общим началом всегда лежат в одной плоскости.

При таком расположении лучи разбивают плоскость, которую они образуют, на две части (рис. 2.54). Эти части плоскости вместе с образовавшими их лучами в геометрии называются *углами*.

Определение. *Углом* называется фигура, состоящая из двух различных лучей с общим началом и ограниченной ими части плоскости.

На рисунке 2.54 лучи OA и OB имеют общее начало — точку O и разбивают плоскость на две части. Исходя из определения угла, получили два различных угла.

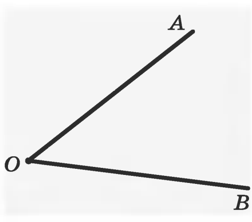


Рис. 2.53

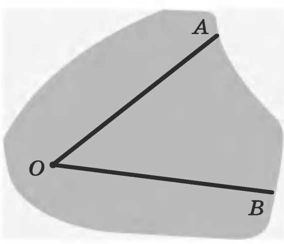


Рис. 2.54

Точка, из которой выходят ограничивающие угол лучи, называется *вершиной угла*, а сами лучи — *сторонами угла* (рис. 2.55). Лучи OA и OC на этом рисунке определяют два угла.

Весь угол изобразить на рисунке нельзя, как нельзя на рисунке изобразить весь луч. Каждый угол в действительности продолжается бесконечно. На рисунке 2.56 выделены только части изображенных углов.

Слово «угол» иногда заменяют знаком $\angle$. Часто при изображении угла чертят только выходящие из вершины начальные участки его сторон, а ту часть, которую хотят указать, обозначают дужкой (рис. 2.57).

Угол обозначается или одной заглавной буквой, поставленной у вершины угла, например: $\angle A$ (рис. 2.57), или тремя буквами, из которых одна

Рис. 2.55

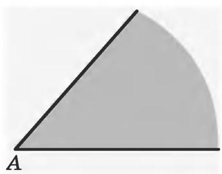


Рис. 2.56

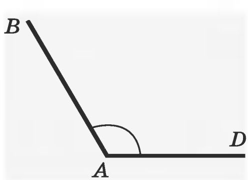


Рис. 2.57

ставится при вершине угла, а две другие — у каких-нибудь точек сторон, например: $\angle BAD$ (рис. 2.57). Буква, стоящая при вершине угла, всегда записывается между двумя другими буквами. Иногда угол обозначают цифрой, поставленной внутри угла (рис. 2.58).

Для изучения свойств углов используется понятие *луча, проходящего между сторонами угла*.

Определение. Луч проходит между сторонами данного угла, если он исходит из его вершины и пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла.

На рисунке 2.59 луч OB проходит между сторонами угла AOC, так как он исходит из вершины угла AOC и пересекает отрезок MP. Концы отрезка MP лежат на сторонах угла AOC.

Возьмем луч AC (рис. 2.60) и будем поворачивать его вокруг точки A против часовой стрелки, например, до положения AB, тогда его последовательные положения «заметут» угол со сторонами AC и AB.

Продолжая вращать луч в том же направлении, мы будем получать все новые и новые углы. В определенный момент оба луча составят прямую линию (рис. 2.61). Такой угол называется *развернутым углом*.

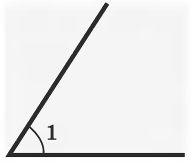


Рис. 2.58

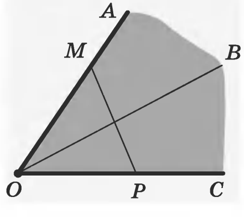


Рис. 2.59

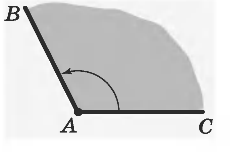


Рис. 2.60

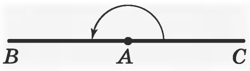


Рис. 2.61

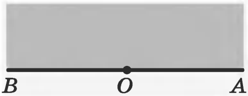


Рис. 2.62

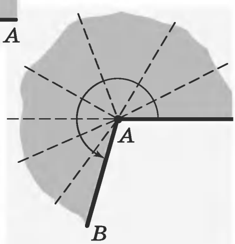


Рис. 2.63

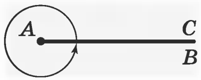


Рис. 2.64

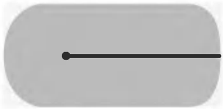


Рис. 2.65

Развернутый угол есть часть плоскости, ограниченная прямой, т. е. полуплоскость (рис. 2.62). Сторонами развернутого угла являются две дополнительные полупрямые.

Определение. *Развернутым углом* называют угол, стороны которого являются дополнительными полупрямыми одной прямой.

Если продолжить вращение луча дальше, чем показано на рисунке 2.62, то будут получаться новые углы (рис. 2.63), пока луч не вернется в свое первоначальное положение (рис. 2.64).

Самый большой возможный угол, полученный в ходе вращения луча, называется *полным углом*. Полный угол, в сущности, есть вся плоскость (рис. 2.65), а не ее часть, ограниченная двумя лучами.

13. Измерение углов. Каждый угол характеризуется его величиной, которая называется *градусной мерой угла*. *Измерение углов* осуществляется аналогично измерению отрезков — оно основано на сравнении их с углом, принятым за единицу измерения. Обычно за единицу измерения углов принимают *градус* — угол, равный $\frac{1}{180}$ части развернутого угла. Градус обозначают знаком «°».

Градусную меру часто называют просто *величиной угла*. Величина угла, равного $\frac{1}{60}$ части градуса, называется *минутой* и обозначается знаком «′», $\frac{1}{60}$ часть минуты называется *секундой* и обозначается знаком «″». Например, угол в 60 градусов 32 минуты 17 секунд записывается так: $60°32'17''$.

Так как градус составляет $\frac{1}{180}$ часть развернутого угла, развернутый угол равен 180°.

Определение. Положительное число, которое показывает, сколько раз градус и его части укладываются в данном угле, называют *градусной мерой угла*.

В зависимости от градусной меры углы бывают трех видов: острые, прямые и тупые.

Определение. Угол, равный 90°, называют *прямым* углом. Прямой угол обозначается буквой d. Угол, меньший 90°, называют *острым* углом. Угол, больший 90°, называют *тупым* углом.

Градусные меры угла обозначаются или так же, как сами углы, или буквами греческого алфавита. Например, запись $\angle AOB = 45°$ читается: величина (или градусная мера) угла AOB равна 45 градусам. На рисунке 2.66 величина острого угла записана: $\alpha < 90°$, читаем: величина угла α меньше 90 градусов. Аналогично записываются и читаются величины прямого и тупого углов (рис. 2.67, 2.68).

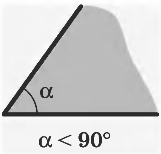


Рис. 2.66

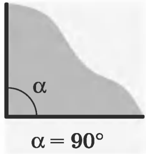


Рис. 2.67

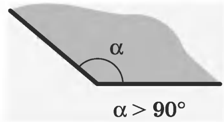


Рис. 2.68

Основные свойства измерения углов

Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180°. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

Например, на рисунке 2.69 луч OC проходит между сторонами угла AOB, градусная мера угла AOB равна сумме градусных мер углов AOC и COB, то есть $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

Для измерения градусных мер углов (величин углов) на уроках геометрии применяется *транспортир* (рис. 2.70). На рисунке 2.71 показано, как с помощью транспортира можно измерять угол в 30°, 90°, 120°. На рисунке 2.72 показано, как с помощью транспортира можно *отложить от полупрямой OA* в верхнюю полуплоскость *угол* с данной градусной мерой 60°.

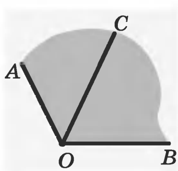


Рис. 2.69

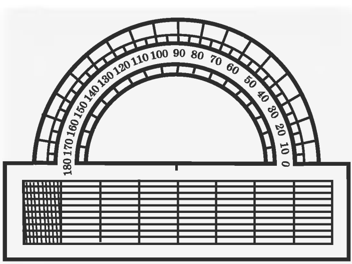


Рис. 2.70

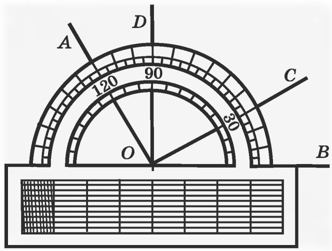


Рис. 2.71

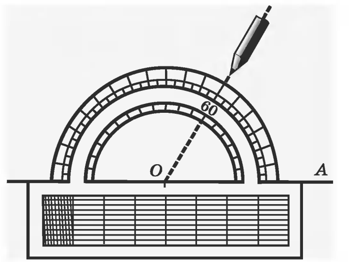


Рис. 2.72

П р и м е р. Между сторонами угла *COD*, равного 120°, проходит луч *OA*. Найдите углы *COA* и *AOD*, если их градусные меры относятся как 4 : 2.

Р е ш е н и е. Из условия задачи имеем:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \angle COD = 120^\circ. \\ 2.\ \text{Луч } OA \text{ проходит между сторонами} \\ \text{угла } COD. \\ 3.\ \angle COA : \angle AOD = 4 : 2. \end{array}\right\} \text{дано}$$

Найдите градусные меры углов *COA* и *AOD*.

4. $\angle COA + \angle AOD = \angle COD$ (2, свойства измерения углов).

5. Так как градусные меры углов *COA* и *AOD* относятся как 4 : 2, то можно считать, что $\angle COD$ состоит из 6 частей (1, 2, 3, 4).

6. $\angle COA = \dfrac{120^\circ}{6} \cdot 4 = 80^\circ$, $\angle AOD = \dfrac{120^\circ}{6} \cdot 2 = 40^\circ$.

14. Равенство углов. Биссектриса угла. Как и при определении равенства отрезков, рассматриваются два определения равенства углов.

Определение. Углы равны, если равны их градусные меры.

На рисунке 2.73 изображены два угла ABC и DEM, величины которых равны, а значит, по определению, эти углы равны. Равенство углов обозначается так: $\angle ABC = \angle DEM$.

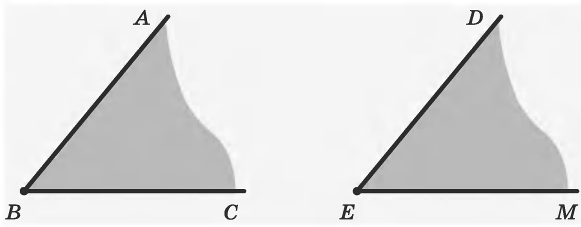


Рис. 2.73

Определение. Углы называются *равными*, если их можно совместить наложением друг на друга.

Развернутые углы при наложении всегда могут быть совмещены. Отсюда следует, что все развернутые углы равны между собой. Полные углы равны между собой.

Пусть есть два угла: $\angle 1$ и $\angle 2$ (рис. 2.74). Если угол 1 наложить на угол 2 так, чтобы их вершины совпали, одна из сторон угла 1 совместится со стороной угла 2, но при этом угол 1 составит только часть угла 2 (рис. 2.75). В этом случае говорят, что величина угла 1 меньше величины угла 2. Можно сформулировать по-другому: угол 1 меньше угла 2.

Используя понятие равенства углов, можно дать определение одному из важных понятий геометрии — *биссектрисе угла*.

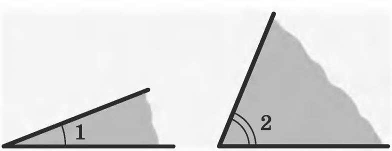


Рис. 2.74

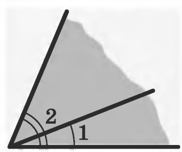


Рис. 2.75

Определение. Биссектрисой угла называется луч, который исходит из вершины угла, проходит между его сторонами и делит угол пополам.

На рисунке 2.76 луч OM — биссектриса угла AOB, при этом $\angle AOM = \angle BOM$.

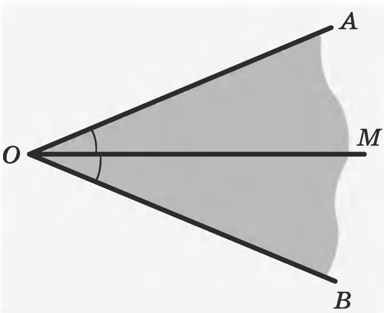


Рис. 2.76

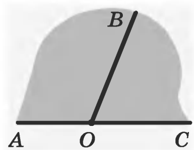


Рис. 2.77

15. Смежные углы.

Определение. Два угла называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а другие стороны этих углов являются дополнительными полупрямыми.

На рисунке 2.77 $\angle BOA$ и $\angle BOC$ являются *смежными*, так как лучи OA и OC — дополнительные полупрямые, а луч OB — общая сторона этих углов.

Теорема 4. Сумма смежных углов равна 180°.

Из теоремы 4 вытекают следующие следствия — *свойства смежных углов*.

Следствие 1. Если два угла равны, то смежные с ними углы равны.

Следствие 2. Угол, смежный с прямым углом, есть прямой угол.

Следствие 3. Угол, смежный с острым, является тупым, а смежный с тупым — острым.

16. Вертикальные углы. На рисунке 2.78 изображены две пересекающиеся в точке O прямые AB и CD. При пересечении этих прямых образовалось четыре угла: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$.

Определение. Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми сторон другого.

На рисунке 2.78 углы 1 и 3, 2 и 4 вертикальные.

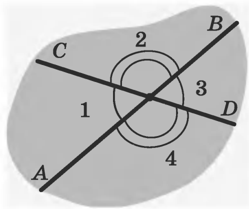


Рис. 2.78

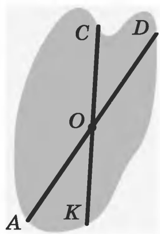


Рис. 2.79

Теорема 5. Вертикальные углы равны.

Очевидно, что две пересекающиеся прямые образуют смежные и вертикальные углы. Смежные углы дополняют друг друга до 180°. Угловая мера меньшего из них называется *углом между прямыми*.

П р и м е р. На рисунке 2.79 угол COD равен 30°. Чему равны углы AOK и DOK?

Р е ш е н и е. Из условия задачи имеем:

1. Прямые CK и AD пересекаются в точке O.
2. $\angle COD = 30°$.
3. Найдите углы AOK и DOK.

} дано (рис. 2.79)

4. Углы COD и AOK вертикальные (1, определение вертикальных углов).

5. $\angle AOK = 30°$ (2, свойство вертикальных углов).

6. Угол DOK смежный с углом COD (1, определение смежных углов).

7. $\angle DOK = 180° - \angle COD = 180° - 30° = 150°$ (6, свойство смежных углов).

§5. Треугольники

17. Определение треугольника. Некоторые виды треугольников.

Определение. *Треугольником* называется фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, трех отрезков, попарно соединяющих эти точки, а также части плоскости, ограниченной этими отрезками.

Точки называются *вершинами треугольника*, а отрезки — его *сторонами*. Часть плоскости, ограниченную сторонами треугольника, иногда называют *внутренней областью треугольника*.

Треугольник обозначается его вершинами. На рисунке 2.80 изображен треугольник ABC: A, B, C — его вершины, а отрезки AB, BC, AC — его стороны. Вместо слова «треугольник» употребляется символ «$\triangle$».

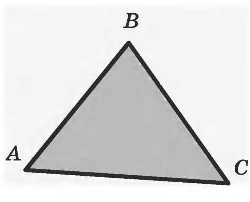


Рис. 2.80

В зависимости от длин сторон треугольника (длин отрезков) выделяют разные *виды треугольников*.

Определение. Треугольник называют *равнобедренным*, если у него две стороны равны. Эти равные стороны называют *боковыми сторонами*, а третью сторону называют *основанием* равнобедренного треугольника.

В равнобедренном треугольнике ABC на рисунке 2.81 $AB = BC$, основание AC.

Определение. Треугольник, у которого все стороны равны, называется *равносторонним* или *правильным*.

На рисунке 2.82 у равностороннего треугольника KMP $KM = MP = PK$.

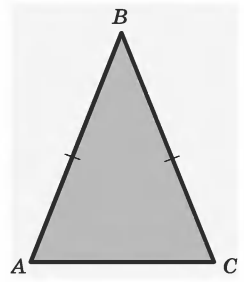


Рис. 2.81

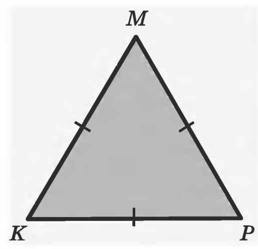


Рис. 2.82

Существует очень важное свойство треугольника — неравенство треугольника.

Теорема 6. В любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других его сторон.

Это свойство выполняется для любого вида треугольников — равнобедренных, равносторонних и др.

Неравенство треугольника является условием существования треугольника.

Есть еще одно понятие, связанное с длинами сторон треугольников, — *периметр треугольника*.

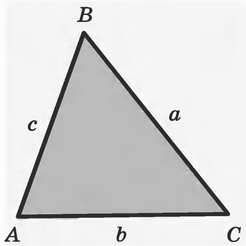


Рис. 2.83

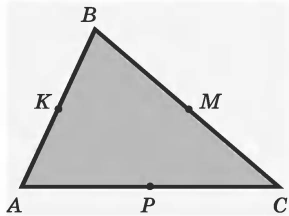


Рис. 2.84

Определение. *Периметром* треугольника называют сумму длин его сторон.

Периметр треугольника обозначается буквой P. На рисунке 2.83 у треугольника ABC $AB = c$ см, $BC = a$ см, $CA = b$ см.

$$P = c + a + b \text{ (см)}$$

На рисунке 2.84 у треугольника ABC точки K, M, P — середины сторон AB, BC и AC соответственно. Если соединить середины сторон $\triangle ABC$, то получим тоже треугольник KMP (рис. 2.85). Каждый из отрезков KM, MP и PK называют *средней линией треугольника*.

Определение. *Средняя линия треугольника* — это отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

На рис. 2.85 $\triangle MKP$ составлен из средних линий $\triangle ABC$.

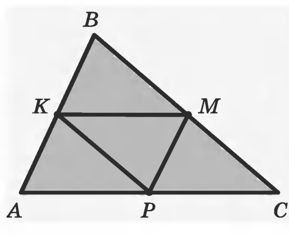


Рис. 2.85

Теорема 7. Средняя линия треугольника параллельна третьей его стороне, а ее длина равна половине длины этой стороны.

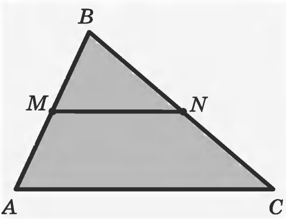


Рис. 2.86

На рисунке 2.86 MN — средняя линия $\triangle ABC$. На основании т. 7 $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$.

Если соединить вершину треугольника с серединой противолежащей стороны, то полученный отрезок называют *медианой* треугольника. На рисунке 2.87 AM — медиана треугольника ABC, при этом $BM = CM$.

У любого треугольника есть три медианы (рис. 2.88).

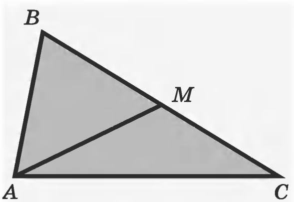


Рис. 2.87

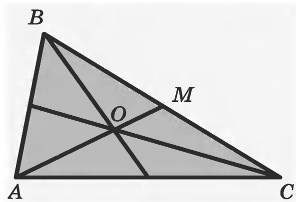


Рис. 2.88

Теорема 8. Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке; точка пересечения медиан в треугольнике отсекает от каждой медианы третью часть, считая от соответствующей стороны.

Пример. Существует ли треугольник ABC со сторонами: а) $AB = 5$ см, $AC = 18$ см, $BC = 7$ см; б) $AB = 7$ см, $AC = 8$ см, $BC = 12$ см?

Решение. а) Из условия задачи имеем:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \triangle ABC. \\ 2.\ AB = 5 \text{ см},\quad AC = 18 \text{ см}, \\ BC = 7 \text{ см}. \end{array}\right\} \text{дано (рис. 2.89)}$$

3. Существует ли $\triangle ABC$?

О существовании треугольника говорит т. 6 — неравенство треугольника.

4. В $\triangle ABC$ для его сторон должны выполняться неравенства (т. 6):

$$AB \leqslant AC + BC, \tag{1}$$

$$AC \leqslant AB + BC, \tag{2}$$

$$BC \leqslant AB + AC. \tag{3}$$

5. В случае а) неравенство (2) не выполняется (1, 2, 4).

6. $\triangle ABC$ в этом случае не существует (5).

В случае б) неравенства (1)—(3) выполняются, т. е. треугольник существует.

18. Углы треугольника. Пусть дан треугольник ABC (рис. 2.90), вершина A и лучи AB и AC задают два угла. Тот из углов, которому принадлежит сам треугольник ABC, называют его *внутренним углом*. Для краткости внутренними углами треугольника называют и величины этих углов. Говоря «угол треугольника», имеют в виду его внутренний угол. Так же определяются углы треугольника при вершинах B и C.

В треугольнике ABC против вершины A (или угла A) лежит сторона BC, и наоборот, против стороны BC лежит вершина A (или угол A). Про вершину A и

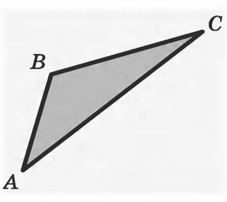


Рис. 2.89

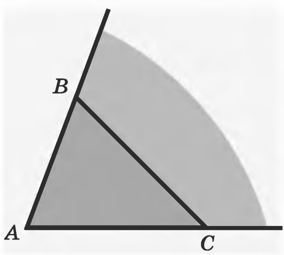


Рис. 2.90

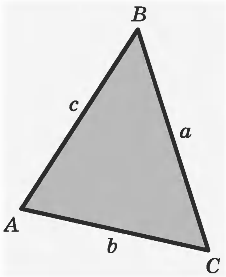


Рис. 2.91

угол A говорят, что они *противолежащие стороне* BC. О стороне BC также говорят, что она *противолежащая вершине* A и углу A. Сторону, противолежащую вершине A, часто обозначают буквой a (рис. 2.91). Точно так же сторона AC — противолежащая вершине (и углу) B. Эту сторону обозначают буквой b. А сторона AB, противолежащая вершине (и углу) C, обозначается c.

Углы A и B в треугольнике ABC называют *прилежащими* к стороне AB. Точно так же углы B и C — прилежащими к стороне BC, а углы C и A — прилежащими к стороне CA.

Стороны и углы треугольника называют его *элементами*.

По виду углов треугольников различают *три вида треугольников*:

а) *остроугольные*, у которых все углы острые (рис. 2.92);

б) *прямоугольные*, у которых один из углов прямой (рис. 2.93);

в) *тупоугольные*, у которых один из углов тупой (рис. 2.94).

Стороны прямоугольного треугольника, образующие прямой угол, называют *катетами*, а сторону, противолежащую прямому углу, называют *гипотенузой* (рис. 2.93).

Определение. *Биссектрисой треугольника* называют отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противоположной стороне.

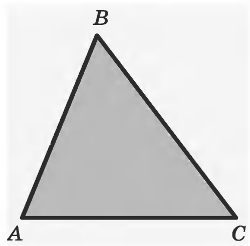


Рис. 2.92

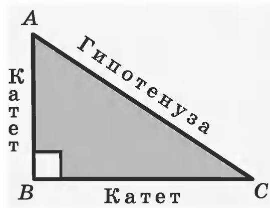


Рис. 2.93

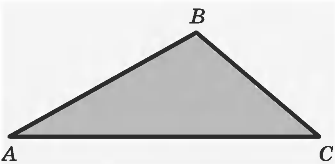


Рис. 2.94

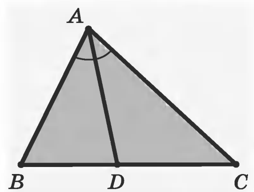


Рис. 2.95

На рисунке 2.95 отрезок AD является биссектрисой $\triangle ABC$, так как $\angle BAD = \angle CAD$.

Для биссектрис углов справедлива такая теорема.

Теорема 9. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

19. Высота треугольника. Кроме медианы и биссектрисы в треугольниках вводят понятия их высот.

Определение. *Высотой треугольника*, опущенной из вершины, называют перпендикуляр, проведенный из этой вершины к прямой, содержащей противолежащую сторону треугольника.

На рисунках 2.96, 2.97 изображены два треугольника, у которых проведены высоты из верши-

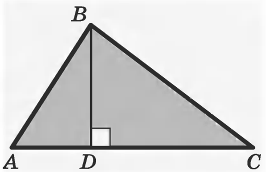


Рис. 2.96

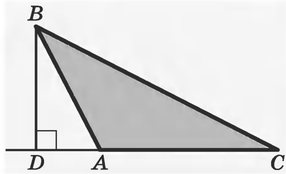


Рис. 2.97

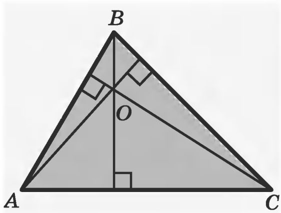


Рис. 2.98

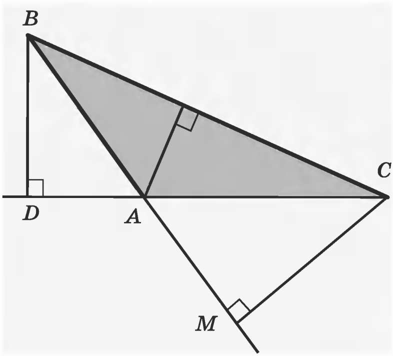


Рис. 2.99

ны B. На рисунке 2.96 основание высоты — точка D — лежит на стороне треугольника AC, на рисунке 2.97 — на продолжении AC.

Если треугольник остроугольный, то все основания высот принадлежат сторонам треугольника (рис. 2.98), а у тупоугольного треугольника две высоты попадают на продолжения сторон (рис. 2.99).

Три высоты в остроугольном треугольнике ABC пересекаются в одной точке O (рис. 2.98). Эту точку называют *ортоцентром треугольника*.

Теорема 10. Три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

20. Сумма углов треугольника. Для любого треугольника имеет место *теорема о сумме углов треугольника.*

Теорема 11. Сумма углов треугольника равна 180°.

На рисунке 2.100 углы треугольника ABC 1, 2 и 3. По теореме 11 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

Из теоремы 11 следует, что у любого треугольника хотя бы два угла острые. Из этой теоремы можно вывести *свойства внешних углов треугольника.*

Определение. *Внешним углом* треугольника при данной вершине называют угол, смежный с углом треугольника при этой вершине (рис. 2.101).

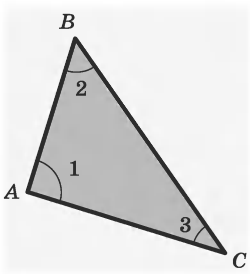


Рис. 2.100

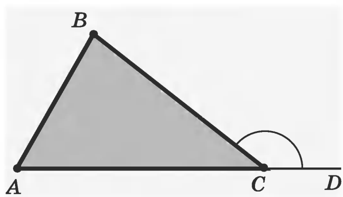


Рис. 2.101

Можно доказать следующее *свойство внешнего угла* треугольника.

Теорема 12. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

Из теоремы 12 следует, что внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.

П р и м е р. В треугольнике ABC $\angle A = 60°$, $\angle B = 80°$. Биссектриса AD этого треугольника отсекает от него $\triangle ACD$. Найдите углы этого треугольника.

Р е ш е н и е. Из условия задачи имеем:

$$\left.\begin{array}{l}1.\ \triangle ABC.\\ 2.\ \angle A = 60°,\ \angle B = 80°.\\ 3.\ AD \text{ — биссектриса } \triangle ABC.\end{array}\right\}\ \text{дано (рис. 2.102)}$$

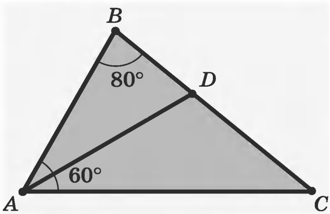


Рис. 2.102

4. Найдите углы $\triangle ACD$.

Из условия задачи можно записать:

5. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ (т. 11).

6. $\angle C = 40°$ (1, 2, 5).

7. $\angle BAD = \angle CAD = 30°$ (1, 2, 3, определение биссектрисы).

Рассматривая углы в $\triangle ACD$, можно записать:

8. $\angle BDA = 180° - 30° - 80° = 70°$ (1, 2, 7, т. 11).

9. $\angle CDA = 110°$ (8, определение смежных углов).

10. $\angle C = 40°$, $\angle ADC = 110°$, $\angle DAC = 30°$ (2, 6, 8).

21. Свойства равнобедренного треугольника. Равнобедренный треугольник обладает рядом важных *свойств*.

Теорема 13. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Теорема 14. Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

Теорема 15. В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

Можно также доказать, что в равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является биссектрисой и медианой. Аналогично биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины, противолежащей основанию, является медианой и высотой.

Пример. В треугольнике ADB угол D равен 90°. На продолжении стороны AD отложен отрезок $DC = AD$ (точка D лежит между точками A и C). Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

Решение. Из условия задачи имеем:

$\left.\begin{array}{l}\text{1. В } \triangle ABC\ \angle D = 90^\circ. \\ \text{2. } DC = DA.\end{array}\right\}$ дано (рис. 2.103)

3. $\triangle ABC$ — равнобедренный (требуется доказать).

Чтобы доказать п. 3, нужно доказать, например, что $AB = CB$. Что для этого нужно сделать (доказать)? Ответ: доказать равенство $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$.

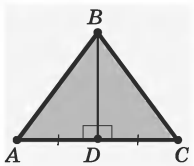


Рис. 2.103

4. DB — общая сторона. $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$ (1,2).

5. $\triangle ABD = \triangle CBD$ (1, 2, 4, признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам).

6. $AB = CB$ (5).

7. $\triangle ABC$ — равнобедренный (6).

22. Равенство треугольников. *Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называют равными*, если

$$AB = A_1B_1, \quad BC = B_1C_1, \quad AC = A_1C_1,$$
$$\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1, \quad \angle C = \angle C_1.$$

Кратко это выражают словами: треугольники равны, если у них соответствующие стороны и соответствующие углы равны.

Существует еще один подход к понятию равенства фигур через их *наложение* одной на другую. Тогда: два треугольника равны, если их можно совместить наложением одного на другой.

Таким образом, если *два треугольника равны*, то элементы (то есть стороны и углы) одного треугольника соответственно равны элементам другого треугольника. В равных треугольниках против равных сторон (т. е. совмещающихся при наложении) лежат равные углы; и наоборот: против соответственно равных углов лежат равные стороны. Так, например, в равных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$, изображенных на рисунке 2.104, против соответствующих равных сторон AB и A_1B_1 лежат равные углы C и C_1.

Равенство фигур обозначается знаком =. Запись $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ читается «треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$».

Запись $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ понимается так: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, а также $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$.

На рисунке равные углы треугольника отмечают одинаковым числом дуг, а равные стороны — одинаковым числом черточек. На рисунке 2.104 $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. По тому, как отмечены углы в этих треугольниках, можно заметить, что $\angle A =$

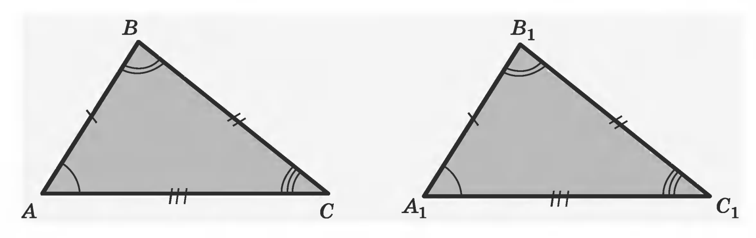


Рис. 2.104

$= \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, а также $AB =$
$= A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$.

Для того, чтобы каждый раз не сравнивать все шесть элементов треугольников, существуют *признаки равенства треугольников* по трем их элементам.

Теорема 16 *(признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними)*. **Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.**

Теорема 17 *(признак равенства треугольников по стороне и прилежащим к ней углам)*. **Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.**

Теорема 18 *(признак равенства треугольников по трем сторонам)*. **Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.**

П р и м е р. Точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC (рис. 2.105). Известно, что $\angle BCA = \angle DAC$ и $\angle DCB = \angle BAD$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle CDA$.

Р е ш е н и е. Из условия задачи имеем:

1. Точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC.
2. $\angle BCA = \angle DAC$.
3. $\angle DCB = \angle BAD$.

} дано (рис. 2.105)

4. $\triangle ABC = \triangle CDA$ (требуется доказать).

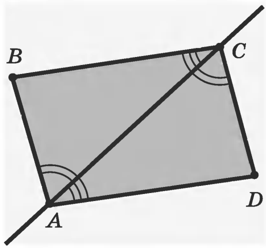


Рис. 2.105

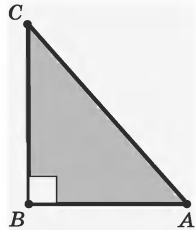


Рис. 2.106

Нужно доказать равенство треугольников ABC и DCA, а для этого нужно использовать один из признаков равенства треугольников. В данном случае естественно применить признак по стороне и двум прилегающим углам.

5. AC — общая сторона. $\triangle ABC$ и $\triangle CDA$ (1).

6. $\angle BAC = \angle DCA$, так как эти углы получены вычитанием из равных углов BCD и DAB равных углов BCA и DAC (1, 2, 3).

7. $\triangle ABC = \triangle CDA$ (1, 5, 6, признак равенства треугольников по стороне и прилегающим двум углам).

23. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора.

Определение. Треугольник называют *прямоугольным*, если у него есть прямой угол.

На рисунке 2.106 изображен треугольник ABC, у которого угол B прямой, значит, этот треугольник прямоугольный.

Так как сумма углов треугольника равна 180°, то у прямоугольного треугольника только один прямой угол. Два других угла у прямоугольного треугольника острые, причем они дополняют друг друга до 90°. Сторону прямоугольного треугольника, противолежащую прямому углу, называют *гипотенузой*, две другие стороны называют *катетами*. $\triangle ABC$, изображенный на рисунке 2.106, прямоугольный, $\angle B$ — прямой, AC — гипотенуза, BA и BC — катеты.

Для прямоугольных треугольников имеют место следующие признаки их равенства.

Теорема 19 *(признак равенства по гипотенузе и острому углу)*. Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

Теорема 20 *(признак равенства по двум катетам)*. Если два катета одного прямоугольного треугольника соответственно равны двум катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Теорема 21 *(признак равенства по гипотенузе и катету)*. Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого треугольника, то такие треугольники равны.

Можно доказать, что в прямоугольном треугольнике с углом 30° катет, противолежащий этому углу, равен половине гипотенузы.

В треугольнике ABC, изображенном на рисунке 2.107, $\angle C$ прямой, $\angle B = 30°$. Значит, в этом треугольнике $CA = \frac{1}{2}AB$.

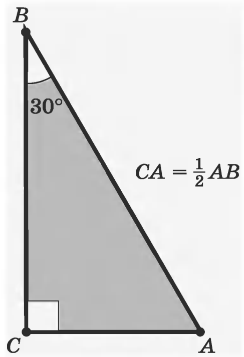


Рис. 2.107

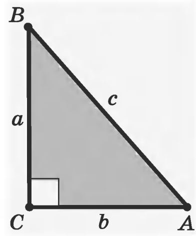


Рис. 2.108

В прямоугольном треугольнике справедлива *теорема Пифагора*, названная в честь древнегреческого ученого Пифагора, жившего в VI в. до н. э.

Теорема 22 *(теорема Пифагора)*. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Пусть ABC — данный прямоугольный треугольник с прямым углом C, катетами a и b и гипотенузой c (рис. 2.108). Теорема утверждает, что $a^2 + b^2 = c^2$.

Из теоремы Пифагора следует, что в прямоугольном треугольнике любой из катетов меньше гипотенузы.

Верна теорема, *обратная теореме Пифагора*.

Теорема 23. Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то треугольник прямоугольный.

По теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник со сторонами 3, 4 и 5 является прямоугольным, так как $5^2 = 3^2 + 4^2$. Прямоугольными являются также треугольники со сторонами 5, 12, 13; 8, 15, 17 и 7, 24, 25. Прямоугольные треугольники, у которых длины сторон выражаются целыми числами, называют *пифагоровыми треугольниками*. Треугольник со сторонами 3, 4, 5 часто называют *египетским треугольником*, так как он был известен еще древним египтянам.

Пример 1. В треугольниках ABC и DMC, изображенных на рисунке 2.109, $AB = DM$, $AC = DC$, $AB \perp AC$, $MD \perp CD$. Докажите равенство этих треугольников.

Решение. Из условия задачи имеем:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \triangle ABC \text{ и } \triangle DCM. \\ 2.\ AB = DM,\ AC = DC. \\ 3.\ BA \perp AD,\ MD \perp AD. \end{array}\right\} \text{дано (рис. 2.109)}$$

4. $\triangle ABC = \triangle DCM$ (требуется доказать).

5. $\triangle ABC$ и $\triangle DCM$ прямоугольные (1, 3).

6. $\triangle ABC = \triangle DCM$ (2, 5, признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам).

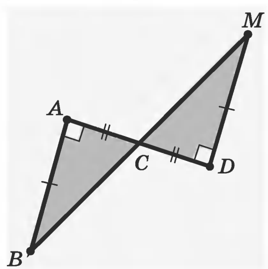


Рис. 2.109

Пример 2. В прямоугольном треугольнике через середину его гипотенузы проведены прямые, параллельные его катетам. Найдите периметр образовавшегося прямоугольника, если катеты треугольника равны 10 и 8 см.

Решение. Из условия задачи имеем:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \triangle ABC \text{ — прямоугольный,} \\ \angle A \text{ — прямой.} \\ 2.\ D \text{ — середина гипотенузы.} \\ 3.\ KD \parallel AC,\ DM \parallel AB. \\ 4.\ \text{Катеты равны 10 см и 8 см.} \end{array}\right\} \text{дано (рис. 2.110)}$$

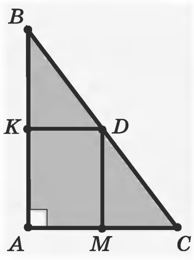


Рис. 2.110

5. Найдите периметр прямоугольника $AKDM$.

6. $KD = \frac{1}{2}\,AC = 4$ см, $MD = \frac{1}{2}\,AB$ (2, 3, 4, свойства средней линии треугольника).

7. Периметр треугольника $AKDM$ равен 18 см.

§6. Многоугольники

24. Общее понятие многоугольника. На рисунке 2.111 изображена замкнутая ломаная L с произвольным числом звеньев; эта ломаная разбивает множество не принадлежащих ей точек плоскости на две части. Их называют *внутренней* и *внешней областями* относительно этой ломаной. На рисунке 2.111 внутренняя область закрашена.

Две любые точки, лежащие в одной и той же области, можно соединить отрезком или ломаной, не пересекающей данную замкнутую ломаную (рис. 2.112). Для точек разных областей этого сделать нельзя.

Во внешней области найдется прямая, которая вся расположена в этой области. Во внутренней области такой прямой нет.

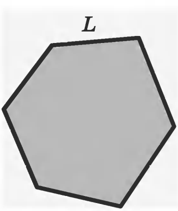


Рис. 2.111

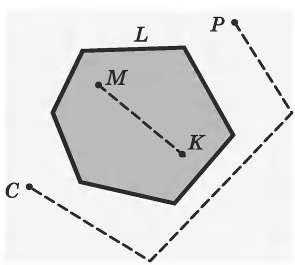


Рис. 2.112

Определение. Объединение замкнутой ломаной и ее внутренней области называют *многоугольником*.

Саму ломаную называют *границей* многоугольника, а ее внутреннюю область — *внутренней областью* многоугольника. Звенья границы многоугольника называют *сторонами многоугольника*[1], а вершины — *вершинами многоугольника*.

Треугольник — это самый простой многоугольник, имеющий наименьшее число вершин и сторон — три. Далее идут четырехугольники. Они бывают различными (рис. 2.113).

Многоугольники с большим числом сторон (пятиугольники, шестиугольники и т.д.) уже не имеют столько разновидностей, как четырехугольники. Есть только различия в длинах их сторон и величине углов.

Отрезок, соединяющий две несоседние вершины многоугольника, называют его *диагональю*.

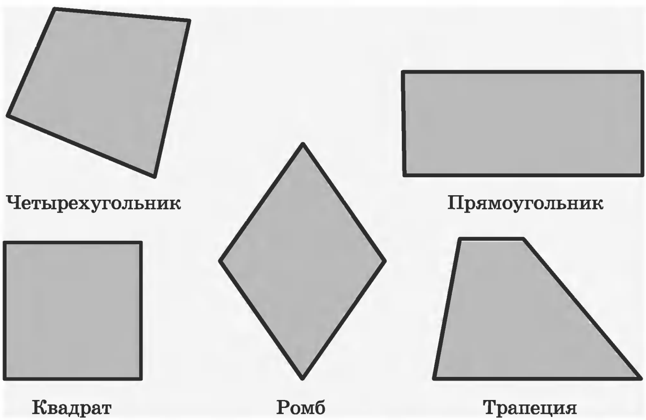


Рис. 2.113

[1] Иногда, говоря о стороне многоугольника, имеют в виду и ее длину.

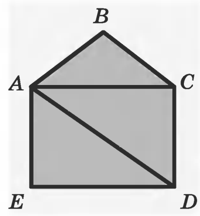


Рис. 2.114

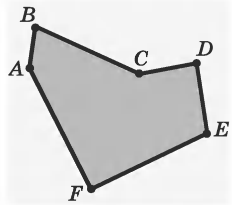


Рис. 2.115

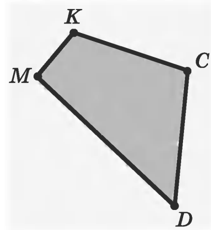


Рис. 2.116

На рисунке 2.114 изображены диагонали AC и AD пятиугольника $ABCDE$.

В геометрии различают *выпуклые* и *невыпуклые* многоугольники.

Определение. Многоугольник называют выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону.

На рисунке 2.115 изображен невыпуклый многоугольник, а на рисунке 2.116 — выпуклый многоугольник, исходя из данного определения.

25. Углы многоугольника. Пусть дан многоугольник. Рассмотрим его вершину A и два луча AB и AD, выходящие из вершины A и содержащие стороны AB и AD данного многоугольника (рис. 2.117). Два луча с общим началом, как известно, задают два угла.

Тот из углов, которому принадлежит сам многоугольник $ABCD$, называют его *внутренним углом* (рис. 2.118).

Для краткости *внутренним углом* многоугольника иногда называют и величину этого угла. Ясно, что у каждого n-угольника есть n внутренних углов (иногда слово «внутренний» опускают).

Можно доказать две теоремы о *свойствах внутренних углов* выпуклых многоугольников.

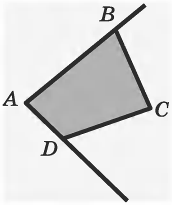


Рис. 2.117

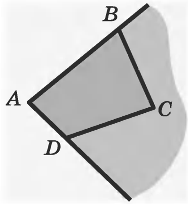


Рис. 2.118

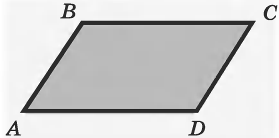


Рис. 2.119

Теорема 24. У выпуклого многоугольника каждый угол меньше 180°.

Теорема 25. Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $(n - 2)180°$.

26. Параллелограмм.

Определение. *Параллелограмм* — это четырехугольник, у которого противолежащие стороны параллельны, т. е. лежат на параллельных прямых.

На рисунке 2.119 четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, у него $AB \parallel DC$ и $BC \parallel AD$.

Используя определение параллелограмма и другие знания, можно доказать свойства параллелограмма:

— сумма внутренних углов параллелограмма равна $4d$;

— каждая диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.

Можно доказать теорему о центре симметрии параллелограмма — еще одно свойство параллелограмма.

Теорема 26. Середина диагонали параллелограмма является его центром симметрии.

Из теоремы 26 можно получить следующие следствия.

Следствие 1. Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.

Следствие 2. Противоположные углы параллелограмма попарно равны.

Признаки параллелограмма отвечают на вопрос: что надо знать о четырехугольнике, чтобы утверждать, что он является параллелограммом?

Теорема 27. Четырехугольник является параллелограммом, если он имеет две пары равных противоположных сторон.

Теорема 28. Четырехугольник является параллелограммом, если его диагонали, пересекаясь, делятся пополам.

Теорема 29. Четырехугольник является параллелограммом, если две его противоположные стороны равны и параллельны.

Используя свойства параллелограммов, можно доказать очень важную теорему геометрии — теорему Фалеса.

Теорема 30 *(теорема Фалеса)*. Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Используя теорему Фалеса, можно легко разделить любой отрезок на любое число равных отрезков.

Пример 1. Периметр параллелограмма равен 122 см. Одна из его сторон больше другой на 25 см. Найдите стороны параллелограмма.

Решение. Из условия задачи имеем:

$$\left.\begin{array}{l}\text{1. } ABCD \text{ — параллелограмм.}\\ \text{2. Периметр параллелограмма}\\ \text{равен 122 см.}\\ \text{3. } BC \text{ больше } CD \text{ на 25 см.}\end{array}\right\}\text{дано}$$

4. Найдите стороны параллелограмма.

При решении этой задачи может помочь так называемый алгебраический метод. Его суть в следующем.

5. Обозначим одну сторону параллелограмма x, другую — y.

6. Получим систему: $\begin{cases} 2x + 2y = 122, \\ x - y = 25 \end{cases}$ (1, 2, 3, 5).

7. Решая эту систему, получим $x = 43$, $y = 18$.

8. Стороны параллелограмма равны 18 и 43 см (5, 7).

П р и м е р 2. Разделите отрезок OA на пять равных отрезков.

Р е ш е н и е. Из условия задачи имеем:

1. Отрезок OA (дан) (рис. 2.120).

Рис. 2.120

2. Проведем через точку O луч OB_1 и отложим на нем последовательно пять равных отрезков (рис. 2.121):

$OB_1 = B_1B_2 = \ldots$
$\ldots = B_4B_5$.

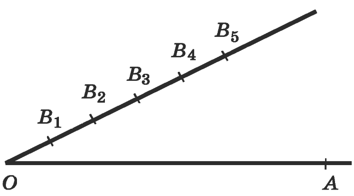


Рис. 2.121

3. Проведем прямую AB_5 и через точки B_1, B_2, B_3, B_4 — четыре прямые, параллельные этой прямой (рис. 2.122).

4. Эти прямые разделяют отрезок OA на пять равных отрезков (1, 2, 3, теорема 30).

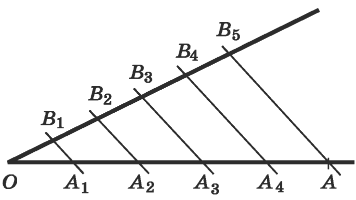


Рис. 2.122

27. Прямоугольник и квадрат.

Определение. *Прямоугольник* — это параллелограмм, у которого все углы прямые.

Определение. *Квадрат* — это прямоугольник, у которого все стороны равны.

Прямоугольник обладает следующими *свойствами*:

— серединные перпендикуляры к сторонам прямоугольника являются его осями симметрии (рис. 2.123);

— у прямоугольника есть две оси симметрии (рис. 2.124);

— диагонали прямоугольника равны.

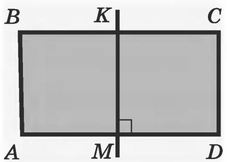


Рис. 2.123

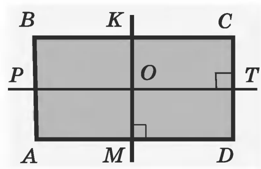


Рис. 2.124

Справедлива следующая теорема:

Теорема 31. Около прямоугольника всегда можно описать окружность.

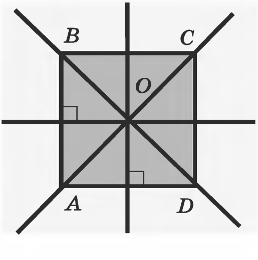


Рис. 2.125

Так как квадрат является прямоугольником (по определению), то у него есть две оси симметрии — серединные перпендикуляры к его сторонам; можно также доказать, что диагонали квадрата также являются его осями симметрии (рис. 2.125).

Пример 1. Сторона прямоугольника равна 4 см и образует с диагональю угол 60°. Найдите эту диагональ.

Решение. Из условия задачи имеем:

$$\left.\begin{array}{l}1.\ ABCD \text{ — прямоугольник.}\\ 2.\ BC = 4 \text{ см.}\\ 3.\ \angle BAC = 60^\circ.\end{array}\right\}\ \text{дано (рис. 2.126)}$$

4. Найдите AC.

5. $\triangle ABC$ — прямоугольный, в нем катет $BC = 4$ см, а $\angle BAC = 30°$. По свойству катета, лежащего в прямоугольном треугольнике против угла 30°, $BC = \frac{1}{2}AC$ (1, 2, 3).

6. $AC = 8$ см (5).

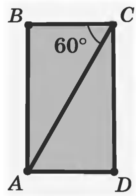


Рис. 2.126

28. Ромб.

Определение. Параллелограмм, все стороны которого равны, называют *ромбом*.

На рисунке 2.127 изображен параллелограмм $ABCD$, у которого $AB = BC = CD = DA$. По определению этот параллелограмм является ромбом.

Так как ромб — параллелограмм, то он обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме того, у ромба есть и другие свойства.

Теорема 32. Прямая, содержащая диагональ ромба, является его осью симметрии (рис. 2.128).

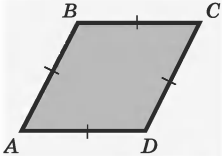


Рис. 2.127

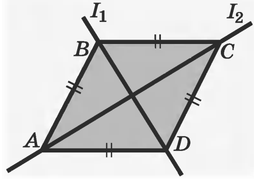


Рис. 2.128

Используя теорему 32, можно доказать следующие следствия — *свойства ромба*.

Следствие 1. Диагонали ромба делят его углы пополам.

Следствие 2. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Квадрат является ромбом, поэтому он обладает свойствами как прямоугольника, так и ромба.

Пример. Найдите углы ромба, если основание перпендикуляра, опущенного из вершины тупого угла, делит сторону ромба пополам.

Решение. Из условия задачи имеем:

$$\left.\begin{array}{l}1.\ ABCD \text{ — ромб.}\\ 2.\ AK \perp CD.\\ 3.\ AK = DK.\end{array}\right\} \text{дано (рис. 2.129)}$$

4. Найдите углы ромба.
5. $AB = BC = DC = DA$ (1, определение ромба).

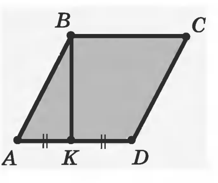


Рис. 2.129

Нужно использовать данные п. 2 и 3. Это подсказывает дополнительное построение:

6. Проведем диагональ ромба BD (рис. 2.130).
7. $\triangle ABD$ — равнобедренный с основанием BD (5, 6, определение равнобедренного треугольника).
8. $\triangle ABD$ — равнобедренный с основанием AD (2, 3, признак равнобедренного треугольника).
9. $\triangle ABD$ — равносторонний (7, 8).
10. $\angle A = 60°$ (9).
11. $\angle A = \angle C = 60°$, $\angle B = \angle D = 120°$ (1, 10).

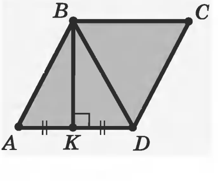


Рис. 2.130

29. Трапеция.

Определение. Четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны, называется *трапецией*.

На рисунке 2.131 изображена трапеция $ABCD$. Параллельные стороны трапеции называют ее *основаниями*, а непараллельные — *боковыми сторонами* (на рис. 2.131 BC и AD — основания, AB и CD — боковые стороны).

Определение. Если боковые стороны трапеции равны, то трапеция называется равнобедренной.

На рисунке 2.132 $AB = CD$, значит, трапеция равнобедренная.

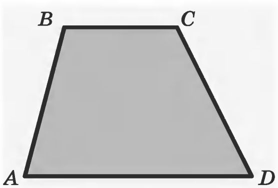


Рис. 2.131

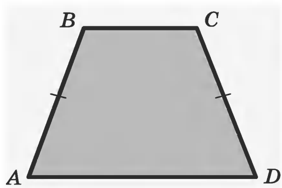


Рис. 2.132

Определение. Трапецию, один из углов которой прямой, называют *прямоугольной*.

На рисунке 2.133 угол K прямой, значит, трапеция $KLMN$ прямоугольная.

Определение. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется *средней линией трапеции*.

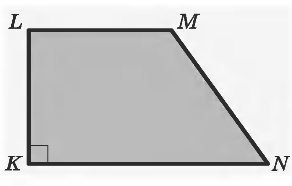


Рис. 2.133

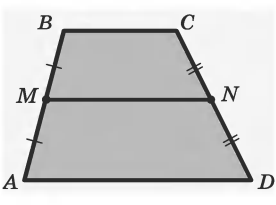


Рис. 2.134

На рисунке 2.134 точки M и N — середины боковых сторон трапеции. Значит, MN — средняя линия $ABCD$.

Средняя линия трапеции обладает некоторыми *свойствами*: средняя линия трапеции параллельна основаниям, а длина ее равна полусумме длин оснований.

Пример. Докажите, что середины сторон равнобедренной трапеции являются вершинами ромба.

Решение. Из условия задачи имеем:

1. $ABCD$ — равнобедренная трапеция, $AB = DC$.
2. M, N, P, K — середины сторон трапеции $ABCD$.
3. $MNPK$ — четырехугольник.

дано (рис. 2.135)

4. $MNPK$ — ромб (требуется доказать).

Чтобы доказать, что $MNPK$ — ромб, нужно доказать, что $MN \parallel KP$, $MK \parallel NP$ и что $MN = NP = PK = KM$. Как это сделать? Помогает п. 2 и понятие средней линии треугольника.

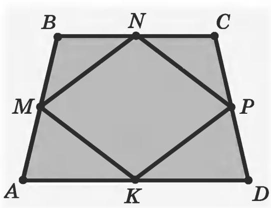


Рис. 2.135

5. Проведем диагонали AC и BD трапеции (построение) (рис. 2.136).

6. $AC = BD$ (5).

7. $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$ (5, теорема 7).

8. $KP \parallel AC$, $KP = \frac{1}{2}AC$ (5, теорема 7).

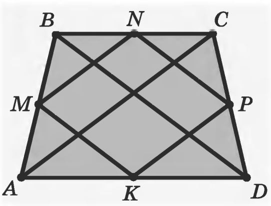


Рис. 2.136

9. $MN \parallel KP$ и $MN = KP$ (7, 8).

Аналогично получаем, что $MK \parallel NP$ и $MK = NP$. Учитывая п. 6, задача решена.

30. Правильные многоугольники.

Определение. Многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны, называют *правильным*.

На рисунке 2.137 изображены правильные треугольник, четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник, восьмиугольник и десятиугольник.

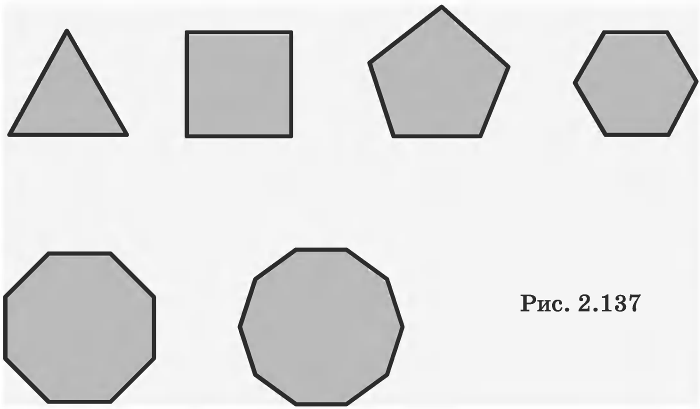


Рис. 2.137

По теореме 25 о сумме внутренних углов многоугольников можно вычислить величину каждого угла правильных многоугольников: для правильного треугольника — 60°, для правильного четырехугольника (квадрата) — 90°, для правильного пятиугольника — 108°, для правильного шестиугольника — 120°.

Пользуясь этим методом, можно узнать величину каждого угла любого правильного n-угольника при любом n. Кроме того, можно решить и обратную задачу: зная сумму углов правильного многоугольника, можно найти число его сторон.

§ 7. Площади фигур

31. Понятие площади.

Площадь — это тоже *величина*. Каждой плоской геометрической фигуре соответствует своя площадь. У пространственных фигур тоже есть соответствующая им площадь, называемая *площадью поверхности*.

Площадь фигур мы будем обозначать буквой S. Запись S_F читается как «площадь фигуры F».

Определение. Измерить площадь фигуры — это значит сравнить ее с площадью некоторой фигуры, принятой за *единицу измерения площади*.

Измерить площадь фигуры в Древней Греции означало построить квадрат, площадь которого равна площади данной фигуры. С тех пор всякое вычисление площади принято называть *квадратурой*.

Если за единицу длины принимается 1 мм, то единицей площади является 1 мм^2 (квадратный миллиметр); при единице длины 1 см единицей площади является 1 см^2 (квадратный сантиметр). Если единицей измерения длины является 1 м, ему соответствует единица площади 1 м^2 (квадратный метр).

Любую площадь S можно выразить через единицу измерения площади в виде $S = ke^2$, где k — числовой множитель, который показывает, сколько раз единичный квадрат укладывается в данной фигуре.

Пусть, например, за единицу измерения площади принят квадратный сантиметр (т. е. $e^2 = 1$ см^2). Тогда запись $S = 15$ см^2 означает, что площадь фигуры равна 15 см^2, т. е. в данной фигуре квадрат со стороной 1 см укладывается 15 раз.

Можно сфорулировать свойства *измерения площади*.

1. Всякий многоугольник F имеет площадь S_F. Площадь является величиной, численное значение которой неотрицательно, т. е. $S_F \geqslant 0$ для любой фигуры F.

Площадь фигуры зависит только от ее размеров и формы и не зависит от места расположения фигуры в пространстве. Это формулируется так.

2. Если две фигуры равны, то равны и их площади.

Пусть дана фигура F, которая является объединением двух фигур F_1 и F_2, причем эти фигуры пересекаются не более чем по конечному числу отрезков и точек. Тогда

$$S_F = S_{F_1} + S_{F_2}.$$

Есть случаи, когда фигура является объединением двух других фигур, но данное равенство не выполняется. На рисунке 2.138 изображены два треугольника R_1 и R_2. Фигура R — их объединение. В этом случае $S_R < S_{R_1} + S_{R_2}$ (при сложении площадь ромбовидной области в центре рисунка войдет в сумму дважды).

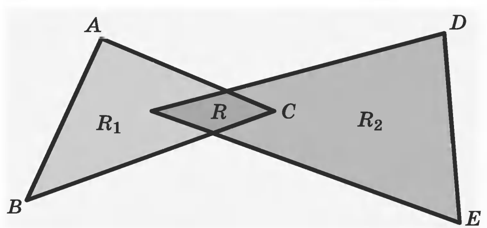


Рис. 2.138

Еще одно свойство площади формулируется следующим образом.

3. За единицу измерения площади принимают площадь квадрата, сторона которого равна единице измерения длины отрезка.

Для фигуры, разбитой на части, справедливо следующее свойство.

4. Если фигура разбита на части, то площадь фигуры равна сумме площадей частей фигуры.

Свойство измерения площади квадрата.

5. Площадь квадрата со стороной a равна a^2.

$$S_{\text{квадрата}} = a^2.$$

В геометрии различают фигуры *равные* и *равновеликие*.

Определение. Две фигуры называются равновеликими, если они имеют одинаковую площадь.

32. Площади прямоугольника и прямоугольного треугольника.

Теорема 33. Площадь прямоугольника равна произведению его основания на высоту.

$$S = ab,$$

где a и b — стороны прямоугольника.

Проведя диагональ AC прямоугольника $ABCD$ (рис. 2.139), можно легко доказать, что она раз-

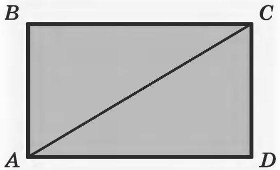


Рис. 2.139

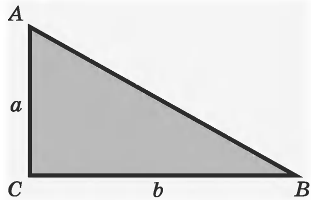


Рис. 2.140

бивает этот прямоугольник на два равных треугольника ABC и CDA, а тогда нетрудно доказать теорему 34.

Теорема 34. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов (рис. 2.140):

$$S_{\text{пр. треуг.}} = \frac{1}{2}ab,$$

где a и b — катеты прямоугольного треугольника.

33. Площади треугольников.

Теорема 35. Площадь треугольника равна половине произведения основания и высоты.

На рисунке 2.141 изображен треугольник ABC.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ch_c.$$

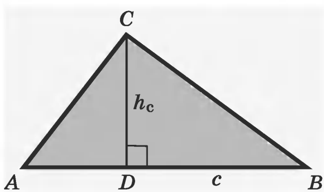


Рис. 2.141

Есть еще одна формула для вычисления площади треугольника через его стороны. Эта формула носит имя древнегреческого математика Герона Александрийского (около I в.). Кроме этой формулы, есть еще так называемые героновы треугольники — это треугольники, у которых целочисленные стороны и их площадь тоже есть целое число (примерами таких треугольников могут быть треугольники со сторонами 13, 14, 15 или 51, 52, 53).

Теорема 36 (*формула Герона*). Площадь треугольника равна

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

где a, b, c — стороны треугольника, а p — его полупериметр, $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Существует формула площади треугольника, которая использует понятие синуса угла.

Теорема 37. Площадь треугольника равна половине произведения его сторон на синус угла между ними

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} b \cdot c \ \sin\alpha,$$

где b, c — стороны $\triangle ABC$, а α — угол между этими сторонами.

34. Площади четырехугольников и многоугольников.

Для вывода *формулы площади параллелограмма* определим высоту параллелограмма.

Определение. *Высотой параллелограмма* называют отрезок перпендикуляра, проведенного из любой точки какой-нибудь стороны параллелограмма к прямой, содержащей противоположную сторону.

Высотой параллелограмма можно считать также и длину этого перпендикуляра. У параллелограмма две пары противоположных параллельных сторон и соответственно две высоты.

На рисунке 2.142 изображен параллелограмм $ABCD$, M_1N_1 и M_2N_2 — его высоты. Заметим, что основания высот параллелограмма могут попасть и на продолжение одной из сторон (рис. 2.143).

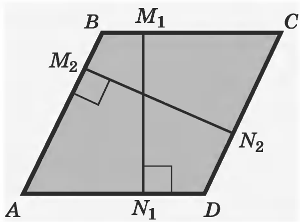


Рис. 2.142

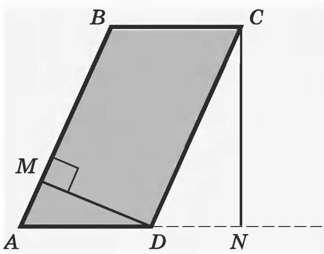


Рис. 2.143

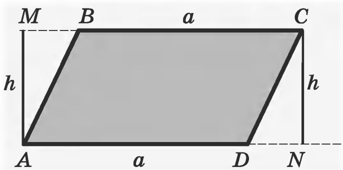


Рис. 2.144

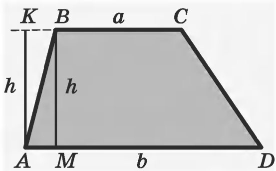


Рис. 2.145

Теорема 38. Площадь параллелограмма равна произведению его стороны и проведенной к ней высоты.

$ABCD$ — параллелограмм, $AD = BC = a$, $AM = CN = h$ (рис. 2.144).

$$S_{ABCD} = ah.$$

Для вывода *формулы площади еще одного четырехугольника — трапеции* определяется понятие высоты трапеции.

Определение. *Высотой трапеции* называют отрезок перпендикуляра, проведенного из какой-либо точки основания трапеции к прямой, содержащей другое основание.

Высотой можно также считать длину этого перпендикуляра. На рисунке 2.145 BM — высота трапеции $ABCD$.

Теорема 39. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований и высоты, т. е. если a и b — основания трапеции, h — высота и S — площадь трапеции, то

$$S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Чтобы вычислить *площадь произвольного многоугольника*, можно разбить его на треугольники, не имеющие общих внутренних точек, и найти сумму их площадей.

Такое разбиение выпуклого многоугольника можно осуществить, проведя, например, диагонали из одной его вершины (рис. 2.146). Иногда удобно пользоваться другими разбиениями (рис. 2.147, 2.148).

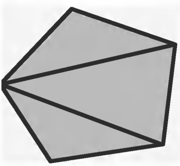


Рис. 2.146

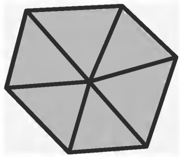


Рис. 2.147

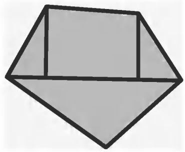


Рис. 2.148

П р и м е р. Через середину основания треугольника проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Докажите, что полученный таким образом четырехугольник — параллелограмм и что его площадь равна половине площади треугольника.

Р е ш е н и е. Из условия задачи имеем:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \triangle ABC. \\ 2.\ AD = DC. \\ 3.\ DE \parallel BC,\ DF \parallel AB. \end{array}\right\} \text{дано (рис. 2.149)}$$

4. Надо доказать, что $BEDF$ — параллелограмм и что $S_{BEDF} = \frac{1}{2} S_{ABC}$.

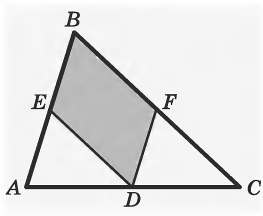


Рис. 2.149

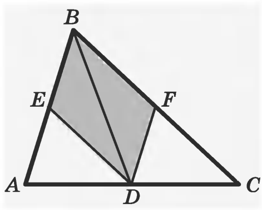


Рис. 2.150

5. Так как $DE \parallel BC$ и $DF \parallel AB$, то $BEDF$ — параллелограмм (2, определение параллелограмма).

Нужно установить связь между площадью параллелограмма и треугольника. Для этого удобно параллелограмм разбить на треугольники.

6. Соединим точки B и D и рассмотрим полученные треугольники (построение) (рис. 2.150).

7. $\triangle BED$ и $\triangle BDF$ равны (BD — общая сторона, $\angle EBD = \angle BDF$ и $\angle BDE = \angle DBF$, как углы внутренние накрест лежащие при параллельных прямых (1, 2, 3, признак равенства треугольников по сторонам и двум прилежащим углам).

8. Эти треугольники и равновелики.

9. Треугольники BFD и CFD также равновелики между собой (хотя в общем случае они не равны), так как $BF = FC$ (DF — средняя линия), т. е. основания их равны и они имеют одинаковую высоту, так как вершина D у них общая.

10. Аналогично равновелики между собой и $\triangle ADE$ и $\triangle BDE$.

11. $S_{BED} = S_{BDF}$, $S_{BDF} = S_{CFD}$ и $S_{BDE} = S_{ADE}$, следовательно, площади $\triangle ABC$ и параллелограмма $BEDF$ можно записать так: $S_{ABC} = 4S_{ADE}$, а $S_{BEDF} = 2S_{ADE}$. (8, 10, свойства площадей).

12. $S_{BEDF} = \frac{1}{2}S_{ABC}$ (11).

§8. Окружность и круг

35. Определение окружности и круга.

Определение. *Окружностью* называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной точки.

Эта точка называется *центром* окружности. Расстояние от точек окружности до ее центра называют *радиусом* окружности. Радиусом называется также любой отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром.

Определение. Отрезок, соединяющий две точки окружности, называют *хордой*. Хорду, проходящую через центр, называют *диаметром*.

На рисунке 2.151 изображена окружность с центром в точке O. Отрезок OA — радиус этой окружности, BD — хорда окружности, CM — диаметр окружности.

Определение. *Кругом* называют фигуру, которая состоит из всех точек плоскости, находящихся на расстоянии, не большем данного от данной точки.

Эту точку называют *центром* круга, а данное расстояние — *радиусом* круга. *Границей* круга является окружность с тем же центром и радиусом (рис. 2.152).

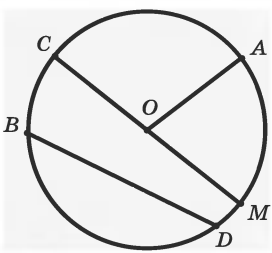


Рис. 2.151

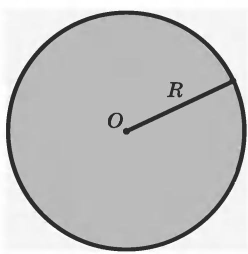


Рис. 2.152

П р и м е р. На какое наибольшее число различных частей, не имеющих общих точек, кроме своих границ, могут разбивать плоскость: а) две окружности; б) три окружности?

Р е ш е н и е. Изобразим на рисунке соответствующие условию случаи взаимного расположения фигур. Запишем ответ: а) четыре части (рис. 2.153); б) восемь частей (рис. 2.154).

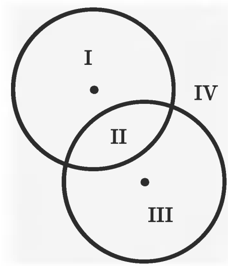


Рис. 2.153

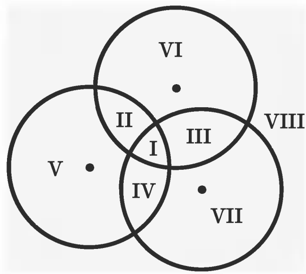


Рис. 2.154

36. Центральные углы и дуги окружности.

Пусть вершина некоторого угла совпадает с центром окружности (рис. 2.155). Угол AOB мы будем называть *центральным углом*.

Определение. *Центральным углом* в окружности называется плоский угол с вершиной в ее центре.

Часть окружности, расположенная внутри угла, называется *дугой окружности*, соответствующей этому центральному углу.

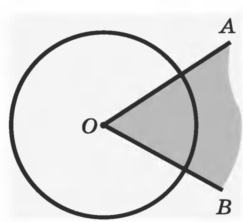


Рис. 2.155

Определение. Пересечение окружности и ее центрального угла называют *дугой окружности*.

Градусной мерой дуги окружности называют градусную меру соответствующего центрального угла.

Градусная мера дуги AB на рисунке 2.155 равна градусной мере угла AOB. Градусная мера дуги AB обозначается $\cup AB$.

Можно ввести еще одну важную единицу измерения дуг. При измерении угловой величины дуги окружности за единицу измерения принимается угловая величина дуги этой окружности, длина которой равна радиусу окружности. Эту единицу измерения угловых величин дуг называют *радианом*.

Сформулируем некоторые свойства измерения дуг окружностей:

— градусная мера дуги не зависит от размера окружности;

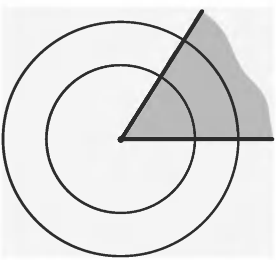


Рис. 2.156

— соответствующие дуги двух концентрических окружностей на рисунке 2.156 имеют одну и ту же градусную меру (величину).

— если дуга (на данной окружности) становится больше, то увеличивается и ее величина.

Окружности (или круги) равны, если равны их радиусы. Можно говорить и о равных дугах окружностей, но равные дуги могут быть или у одной окружности или у равных окружностей.

Определение. Две дуги одной и той же окружности или же равных окружностей называют равными, если они имеют одну и ту же градусную меру.

37. Вписанные углы.

Вершина угла может принадлежать окружности. В этом случае мы получаем *вписанные углы*.

Определение. Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называют *вписанным* в окружность.

На рисунке 2.157 угол ABC вписанный. Его вершина B принадлежит окружности, стороны BA и BC пересекают окружность. В этом случае говорят, что *вписанный угол ABC опирается на дугу AC окружности*.

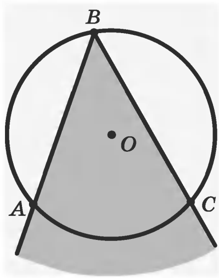


Рис. 2.157

Величина вписанного угла выражается в тех же единицах, что и у других углов, а вот правило нахождения этой величины другое.

Теорема 40. Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

При доказательстве теоремы 40 необходимо рассмотреть три разных случая, которые изображены на рисунках 2.158—2.160: одна из сторон вписан-

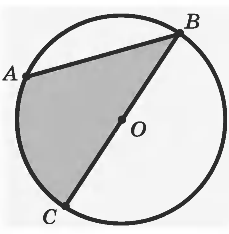


Рис. 2.158

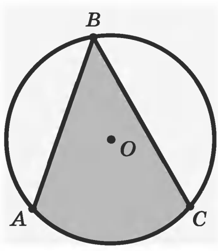


Рис. 2.159

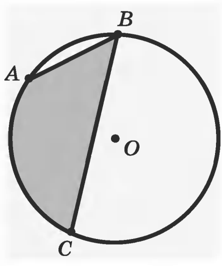


Рис. 2.160

ного угла проходит через центр окружности (рис. 2.158); центр окружности лежит внутри вписанного угла (рис. 2.159); центр окружности лежит внутри вписанного угла (рис. 2.160).

Из теоремы 40 можно получить следующие следствия:

Следствие 1. Все вписанные в окружность углы, стороны которых проходят через две данные точки окружности, а вершины лежат по одну сторону от прямой, соединяющей эти точки, равны.

Следствие 2. Вписанные углы, стороны которых проходят через концы диаметра окружности, прямые.

На рисунке 2.161 стороны вписанного угла ABC проходят через концы диаметра AC, поэтому $\angle ABC = 90°$.

П р и м е р. Точки A, B и C лежат на окружности с центром O. Найдите угол AOC, если $\angle ABC = 66°$.

Р е ш е н и е.

Из условия задачи имеем:

$\left.\begin{array}{l} \text{1. Точки } A, B \text{ и } C \text{ лежат} \\ \text{на окружности.} \\ \text{2. } \angle ABC = 66°. \end{array}\right\}$ дано (рис. 2.162)

3. Найдите $\angle AOC$.

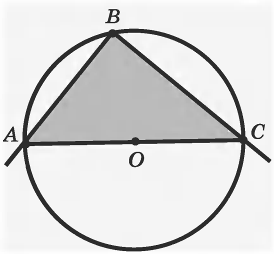


Рис. 2.161

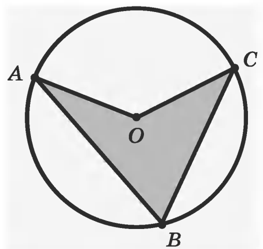


Рис. 2.162

4. Угол ABC, вписанный в окружность, опирается на дугу AC (1, определение вписанного угла).

5. $\angle AOC$ — центральный угол данной окружности (1, определение центрального угла), $\smile AC = 132°$ (1, свойство измерения вписанных углов).

6. $\angle AOC = 132°$ (5, свойство измерения центральных углов).

38. Взаимное расположение прямой и окружности. Возможны три случая взаимного расположения прямой и окружности, если эта прямая и окружность лежат в одной плоскости:

а) прямая имеет две общие точки с окружностью;

б) прямая имеет только одну общую точку с окружностью;

в) прямая не имеет общих точек с окружностью.

Перечислим условия, определяющие все возможные случаи взаимного расположения прямой и окружности, в зависимости от расстояния между центром окружности и прямой.

1) Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса, то прямая и окружность не имеют общих точек (рис. 2.163). При этом окружность лежит по одну сторону от прямой.

2) Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу, то окружность имеет с прямой единственную общую точку, т. е. прямая касается окружности (рис. 2.164). И в этом случае окружность лежит по одну сторону от прямой.

3) Если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса, то прямая пересекает окружность ровно в двух точках (рис. 2.165). В этом случае прямая разбивает окружность на две части.

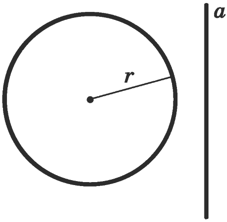


Рис. 2.163

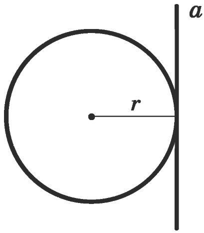


Рис. 2.164

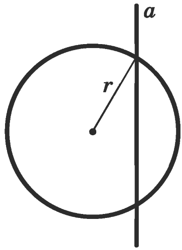


Рис. 2.165

Определение. Если прямая имеет две общие точки с окружностью, то говорят, что прямая и окружность пересекаются. В этом случае прямая называется *секущей*.

Можно доказать *свойство секущей* окружности.

Теорема 41. Если прямая проходит через точку, внутреннюю относительно окружности, то она является секущей, т. е. пересекает окружность в двух точках.

Определение. Прямую, имеющую с окружностью только одну общую точку, называют *касательной* к окружности, а общую точку прямой и окружности — *точкой касания* (рис. 2.166).

Все точки касательной, кроме точки касания, лежат вне данной окружности. Действительно, если предположить, что на касательной AB имеется хотя бы одна точка, лежащая внутри окружности, то прямая AB должна пересекать окружность в двух точках, поэтому она не может быть касательной.

Прямая и окружность могут иметь только одну общую точку, но через эту точку может проходить бесконечное множество прямых, не лежащих с окружностью в одной плоскости (рис. 2.167).

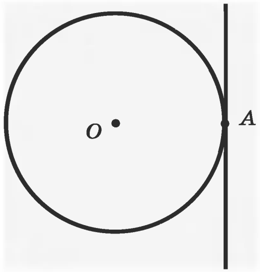


Рис. 2.166

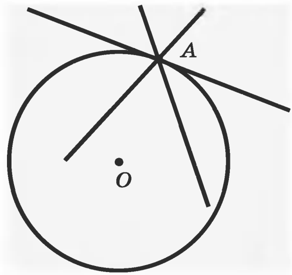


Рис. 2.167

Теорема 42. **Касательная к окружности перпендикулярна радиусу этой окружности, проведенному в точку касания.**

Теорема 43. **Если прямая перпендикулярна радиусу окружности и проходит через его конец, лежащий на окружности, то она является касательной к этой окружности.**

Пример. Постройте касательную к данной окружности с центром O и радиусом r, проходящую через ее точку A.

Решение. Из условия задачи имеем:

$$\left.\begin{array}{l}\text{1. Окр. } (0, r). \\ \text{2. Точка } A \text{ на окружности.}\end{array}\right\} \text{дано (рис. 2.168)}$$

3. Требуется построить касательную к окружности, проходящую через точку A.

Анализ. Предположим, что задача решена и построена касательная AB к окружности (рис. 2.168). По теореме 42 касательная AB перпендикулярна радиусу OA в точке A, поэтому, если построить прямую AB, перпендикулярную OA, то эта прямая будет искомой.

Построение. Нужно построить перпендикуляр AB к прямой OA в точке A. Это построение можно свести к построению серединного перпендикуляра к отрезку OO_1 (рис. 2.168).

Задача имеет только одно решение. Действительно, касательная, проходящая через точку A, должна быть перпендикулярна прямой OA (т. 42), а через точку A в плоскости данного радиуса проходит только одна прямая AB, перпендикулярная к прямой OA (т. 41).

39. Взаимное расположение двух окружностей.

На рисунке 2.169 изображены две окружности с радиусом r_1 и с центром в точке O_1 и с радиусом r_2 с центром O_2. Эти окружности не имеют общих точек, т. е. не пересекаются. Сравнив расстояние h между центрами O_1 и O_2 с радиусами окружностей, заметим, что $h > r_1 + r_2$.

Представьте теперь, что первая окружность передвигается так, что расстояние h между центрами O_1 и O_2 уменьшается. Когда расстояние между центрами станет равным сумме радиусов $h = r_1 + r_2$, окружности будут иметь одну общую точку. О таких окружностях говорят, что они касаются *внешним образом*, а их общую точку называют *точкой касания* (рис. 2.170).

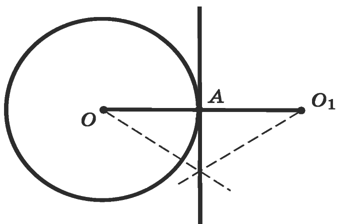


Рис. 2.168

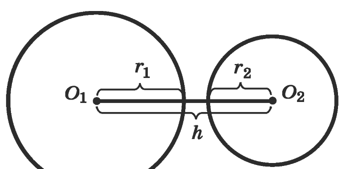
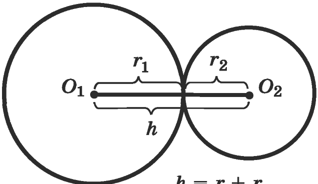
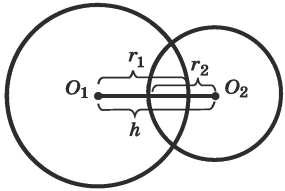


Рис. 2.169



$h = r_1 + r_2$

Рис. 2.170



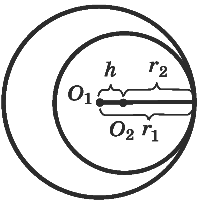
$r_1 - r_2 < r_1 + r_2$

Рис. 2.171

При дальнейшем уменьшении расстояния h окружности будут пересекаться, то есть иметь две общие точки (рис. 2.171). При этом $r_1 - r_2 < h < r_1 + r_2$.

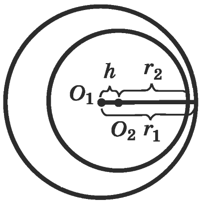
В случае, когда $h = r_1 - r_2$, окружности имеют лишь одну общую точку — точку касания (рис. 2.172). Все точки окружности меньшего радиуса, кроме точки касания, будут расположены во внутренней области окружности большего радиуса. В этом случае говорят, что окружности касаются *внутренним образом*.

При дальнейшем уменьшении расстояния между центрами, т. е. при условии $h < r_1 + r_2$ (рис. 2.173), окружности не пересекаются, т. е. не имеют общих точек. Причем окружность меньшего радиуса расположена во внутренней области окружности большего радиуса. В частности, при $h = 0$ центры окружностей совпадут (рис. 2.174). Окружности, имеющие общий центр, называются *концентрическими*.



$h = r_1 - r_2$

Рис. 2.172



$h < r_1 - r_2$

Рис. 2.173

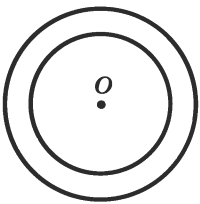


Рис. 2.174

Итак, в зависимости от соотношений между h, r_1, r_2 две окружности могут не иметь общих точек, могут иметь одну или две общие точки.

а) $h > r_1 + r_2$ — окружности не имеют общих точек;

б) $h = r_1 + r_2$ — окружности касаются внешним образом;

в) $r_1 - r_2 < h < r_1 + r_2$ — окружности пересекаются в двух точках;

г) $h = r_1 - r_2$ — окружности касаются внутренним образом;

д) $h < r_1 - r_2$ — окружности не имеют общих точек;

е) $h = 0$ — окружности являются концентрическими.

П р и м е р. Две окружности диаметром 4 и 8 см касаются внешним образом. Чему равно расстояние между центрами окружностей?

Р е ш е н и е. Радиусы окружностей OA и O_1A перпендикулярны их общей касательной, проходящей через точку A (рис. 2.175). Поэтому $OO_1 = OA + O_1A = 6$ см.

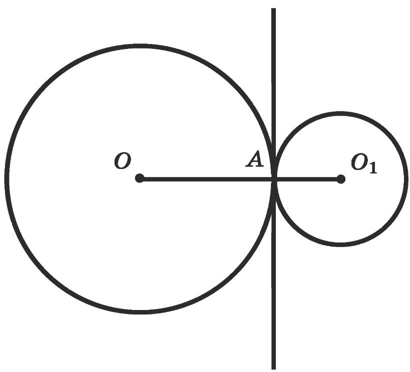


Рис. 2.175

40. Окружности, описанные около треугольника и вписанные в треугольник.

Определение. Окружность называют *описанной около треугольника*, если она проходит через все его вершины.

На рисунке 2.176 изображен треугольник ABC, вписанный в окружность, а окружность будет описана около этого треугольника.

Теорема 44. Около любого треугольника можно описать окружность и притом только одну. Центр такой окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника (рис. 2.176).

Определение. Окружность называют *вписанной в треугольник*, если она касается всех его сторон.

Теорема 45. Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис (рис. 2.177).

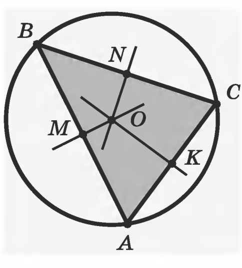


Рис. 2.176

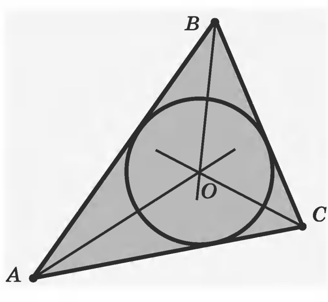


Рис. 2.177

Пример. В прямоугольном треугольнике катеты равны 12 и 16 см. Вычислите радиусы: 1) вписанной в него окружности; 2) описанной окружности.

Решение. 1) Из условия задачи имеем:

1. Треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $BC = 12$ см, $AC = 16$ см.
2. O — центр вписанной окружности.

} дано (рис. 2.178)

3. Найдите радиус вписанной окружности.

4. $OM = OL = OK = r$, $OM \perp CA$, $OL \perp BC$, $OK \perp AB$ (2, определение окружности, вписанной в треугольник).

Надо найти r. Как это сделать? Мы видим, что $CMOL$ — квадрат, и, соединив точку O с точками A и B, применим теорему 45.

5. AO, BO, CO — биссектрисы углов ΔABC (4, т. 45) (рис. 2.179).

6. $\triangle MOA = \triangle KOA$, $\triangle BOL = \triangle BOK$ (4, теорема 19).

7. $MA = KA$, $KB = LB$ (6).

8. $AB = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ см (1, теорема Пифагора).

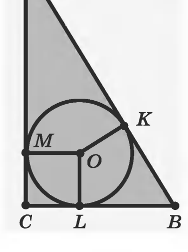


Рис. 2.178

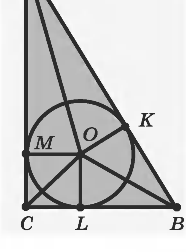


Рис. 2.179

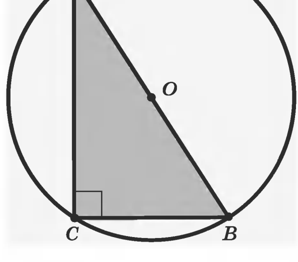


Рис. 2.180

Вычислим два раза периметр $\triangle ABC$.

9. $AB + BC + CA = 2AB + 2r$ (1, 7).

10. $2r = 8$ см, $r = 4$ см (1, 8, 9).

2) Центр описанной около прямоугольного треугольника окружности совпадает с серединой гипотенузы, откуда радиус описанной окружности $R = 10$ см (рис. 2.180).

41. Многоугольники, вписанные в окружности и описанные около них.

Определение. Многоугольник называют *вписанным в окружность*, если все его вершины лежат на этой окружности.

На рисунке 2.181 изображен пятиугольник, вписанный в окружность, его вершины A, B, C, D, E лежат на окружности с центром в точке O, а значит, $OA = OB = OC = OD = OE = r$, где r — радиус окружности, описанной около пятиугольника.

Определение. Многоугольник называется *описанным около окружности*, если все его стороны касаются этой окружности.

На рисунке 2.182 шестиугольник $ABCDEF$ описан около окружности.

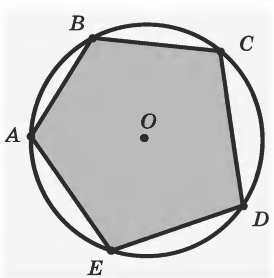


Рис. 2.181

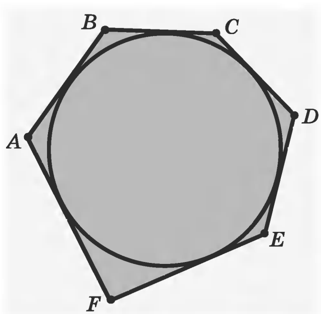


Рис. 2.182

Не всякий многоугольник можно вписать в окружность и не около всякого многоугольника можно описать окружность.

Далее сформулированы свойства и признаки вписанных в окружность четырехугольников.

Например, есть четырехугольники, которые можно вписать в окружность (квадрат всегда можно вписать в окружность, рис. 2.183). А вот ромб вписать в окружность (рис. 2.184) нельзя.

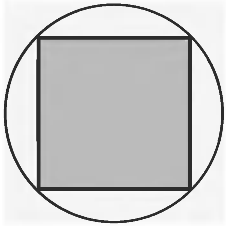


Рис. 2.183

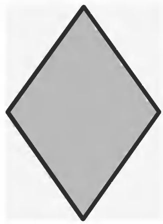


Рис. 2.184

Теорема 46. Сумма противоположных углов вписанного в окружность четырехугольника равна 2π.

Теорема 47. Если четырехугольник описан около окружности, то суммы длин его противолежащих сторон равны.

Теорема 48. Если сумма двух противоположных углов четырехугольника равна 2π, то около этого четырехугольника можно описать окружность.

Теорема 49. Если суммы длин противолежащих сторон четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

42. Вписанные и описанные правильные многоугольники.

Теорема 50. Около всякого правильного многоугольника можно описать окружность.

Теорема 51. Во всякий правильный многоугольник можно вписать окружность.

Теорема 52. Правильный выпуклый многоугольник является вписанным в окружность и описанным около окружности.

Радиус R окружности, описанной около правильного n-угольника со стороной a, находится по формуле

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}.$$

Радиус окружности, вписанной в правильный n-угольник со стороной a, находится по формуле

$$r = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}.$$

Сторону правильного n-угольника обозначим a_n. Можно доказать теорему:

Теорема 53. Сторона a_n правильного n-угольника выражается через радиус R описанной около него окружности формулой $a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$.

Из этой теоремы можно получить следующие следствия.

Следствие 1. $a_6 = R$.

Действительно, $a_6 = 2R\sin\frac{180^\circ}{6} = 2R\sin 30^\circ = 2R\cdot\frac{1}{2} = R$.

Следствие 2. $a_4 = R\sqrt{2}$.

$$a_4 = 2R \sin \frac{180^\circ}{4} = 2R \sin 45^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}.$$

Следствие 3. $a_3 = R\sqrt{3}$.

$$a_3 = 2R \sin \frac{180^\circ}{3} = 2R \sin 60^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}.$$

Пример. Впишите в данную окружность правильный восьмиугольник.

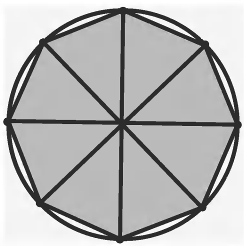


Рис. 2.185

Решение. Два перпендикулярных диаметра делят окружность на четыре равные части. Для построения правильного восьмиугольника необходимо каждую из этих частей разделить пополам, т. е. провести биссектрисы прямых углов, и полученные восемь точек окружности последовательно соединить отрезками. Получим вписанный в окружность восьмиугольник (рис. 2.185). Равенство сторон и равенство углов восьмиугольника следует из равенства всех восьми треугольников, которые равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, полученный восьмиугольник правильный.

43. Длина окружности. Из наглядных соображений ясно, что длина окружности сколь угодно мало отличается от периметра вписанного в нее многоугольника с достаточно малыми сторонами. Имеет место такое свойство длины окружности.

Теорема 54. **Отношение длины окружности к ее диаметру не зависит от окружности, т. е. одно и то же для любых двух окружностей.**

Отношение длины окружности к диаметру обозначают греческой буквой π (читается «пи»): $\dfrac{C}{2R} = \pi$, где C — длина окружности, R — ее радиус. Число π иррациональное, $\pi \approx 3{,}1416\ldots$

Таким образом, *длина окружности* вычисляется по формуле

$$C = 2\pi R.$$

На рисунке 2.186 изображена дуга AB окружности с центром O.

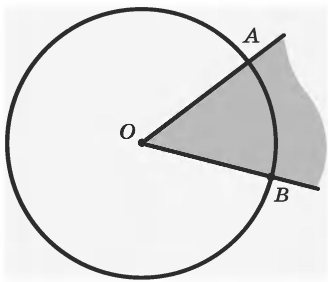


Рис. 2.186

Длина дуги окружности, соответствующей центральному углу в $n°$, находится по формуле

$$l = \frac{\pi R}{180} \cdot n.$$

Радианной мерой угла называют отношение длины соответствующей дуги к радиусу окружности. Из формулы длины дуги окружности следует, что $\dfrac{l}{R} = \dfrac{\pi}{180} \cdot n$, т. е. радианная мера угла получается из градусной умножением на $\dfrac{\pi}{180}$; в частности, радианная мера угла $180°$ равна π, радианная мера прямого угла равна $\dfrac{\pi}{2}$.

Единицей радианной меры углов является *радиан*. Угол в один радиан — это центральный угол, у которого длина дуги равна радиусу. Градусная мера угла в один радиан равна $\frac{180°}{\pi} \approx 57°$.

Пример 1. Точки M и N делят окружность на две дуги, разность градусных мер которых равна 90°. Чему равны градусные меры каждой из дуг?

Решение. Сумма градусных мер дуг равна 360°, а разность равна 90°. Обозначим градусные меры этих дуг x и y. Имеем:

$$\begin{cases} x + y = 360, \\ x - y = 90. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $x = 225°$, $y = 135°$.

Пример 2. Сторона квадрата равна 4 см. Вычислите длину окружности: 1) вписанной в него; 2) описанной около него.

Решение. 1) Радиус вписанной в квадрат окружности равен 2 см, тогда длина окружности равна $C = 2\pi r$, т. е. $C = 4\pi$ см.

2) Радиус окружности, описанной около квадрата, равен $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Поэтому $R = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, а длина окружности равна $C = 4\sqrt{2}\pi$ см.

44. Площадь круга. Коэффициент подобия двух кругов равен отношению их диаметров или радиусов. Отношение площадей двух подобных фигур равно квадрату их коэффициента подобия. Следовательно, площади двух кругов относятся как квадраты их радиусов. Обозначим радиус круга через S. Отношение площадей S_1 и S_2 двух кругов, радиусы которых r_1 и r_2, записывается так:

$$S_1 : S_2 = r_1^2 : r_2^2 \text{ или } \frac{S_1}{r_1^2} = \frac{S_2}{r_2^2}.$$

Итак, *площади кругов пропорциональны квадратам их радиусов.*

Коэффициент их пропорциональности, как и в случае с длиной окружности, равен числу π. Таким образом:

$$\frac{S}{r^2} = \pi \text{ или } S = \pi r^2.$$

Площадь круга выражается формулой: $S = \pi r^2$.

Через диаметр площадь круга выражается формулой:

$$S = \frac{\pi d^2}{4}.$$

45. Части окружности и круга.

Определение. *Круговым сектором* называют часть круга, лежащую внутри соответствующего центрального угла (рис. 2.186).

Площадь кругового сектора вычисляется по формуле

$$S = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha,$$

где r — радиус круга, α — градусная мера соответствующего центрального угла.

Определение. *Круговым сегментом* называют общую часть круга и полуплоскости, граница которой содержит хорду этого круга (рис. 2.187, 2.188).

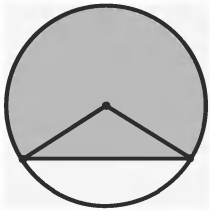


Рис. 2.187

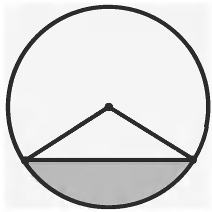


Рис. 2.188

Площадь кругового сегмента, не равного полукругу, вычисляется по формуле

$$S = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha \pm S_{\triangle},$$

где r — радиус круга, α — градусная мера центрального угла, который содержит дугу этого кругового сегмента, а $S_{\triangle}$ — площадь треугольника с вершинами в центре круга и в концах радиусов, ограничивающих соответствующий сектор. Знак $+$ надо брать, если $\alpha > 180°$ (рис. 2.187), а знак $-$, если $\alpha < 180°$ (рис. 2.188).

Пример 1. Проведите необходимые измерения и вычислите площади фигур, изображенных на рисунках 2.189—2.191.

Решение. а) $\triangle ABC$ правильный (рис. 2.189), точки K и L — середины его сторон, AKM и CML —

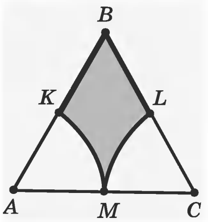


Рис. 2.189

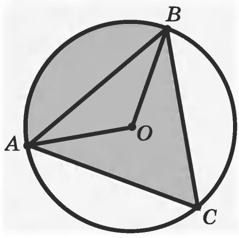


Рис. 2.190

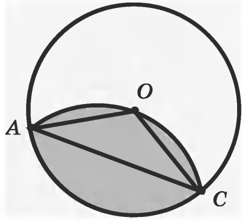


Рис. 2.191

секторы, дуга каждого из которых содержит 60°. Поэтому

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi a^2}{12} = \frac{a^2}{4}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) \approx 0{,}17\ a^2,$$

где a — сторона $\triangle ABC$.

Например, при $a = 16$ мм, $S \approx 44$ мм^2.

б) Считая, что AOB — сектор с углом 120°, O — центр окружности (рис. 2.190), получим:

$$S = \frac{\pi r^2}{3} + r^2 \sin 120° = \frac{r^2}{6}(2\pi + 3\sqrt{3}) \approx 1{,}9r^2,$$

где r — радиус окружности.

Например, при $d = 16$ мм, $S \approx 122$ мм^2.

в) Считая, что дуга AOC (рис. 2.191) проходит через центр окружности O, а ее радиус равен радиусу окружности и $\angle AOC = 120°$, получим:

$$S = 2\left(\frac{\pi r^2}{3} - \frac{1}{2}r^2 \sin 120°\right) \approx 1{,}2r^2,$$

где r — радиус окружности.

Например, при $d = 16$ мм, $S \approx 77$ мм^2.

Пример 2. Докажите, что сумма площадей двух заштрихованных луночек (рис. 2.192) равна площади прямоугольного треугольника ABC.

Решение. Обозначим катеты прямоугольного треугольника ABC через a и b, гипотенузу через c

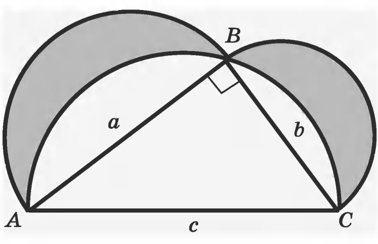


Рис. 2.192

(рис. 2.192), а сумму площадей заштрихованных фигур через S.

По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$, т. е. $a^2 + b^2 - c^2 = 0$.

$$S = \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} - \left(\frac{\pi c^2}{8} - S_{\triangle ABC}\right) = \frac{\pi}{8}(a^2 + b^2 - c^2) + S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABC}.$$

§9. Многогранники

46. Трехгранный угол. Свойства плоских углов трехгранного угла. Рассмотрим произвольные три луча a, b и c с общим началом — точкой O (рис. 2.193, 2.194), причем эти лучи не лежат в одной плоскости.

Лучи a, b и c попарно задают три плоских угла α, β и γ (рис. 2.195). Фигуру, образованную тремя углами (частями плоскости) и частью пространства, расположенной внутри пространства, называют *трехгранным углом* (рис. 2.195).

Лучи a, b и c называют *ребрами трехгранного угла*, а углы $\alpha = \angle AOB$, $\beta = \angle AOC$, $\gamma = \angle BOC$, ограничивающие трехгранный угол, — его *гранями*. Эти углы-грани образуют *поверхность трехгранного угла*. Трехгранный угол можно обозначить

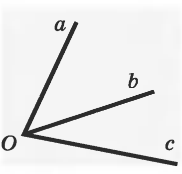


Рис. 2.193

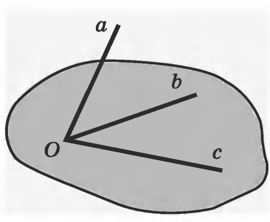


Рис. 2.194

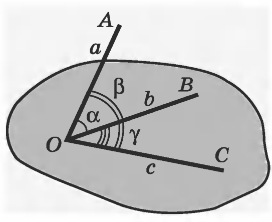


Рис. 2.195

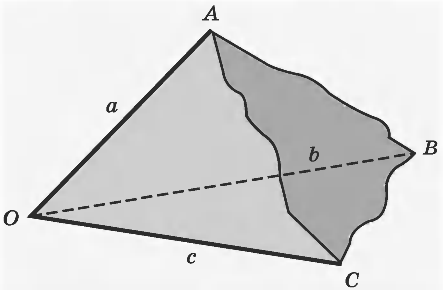


Рис. 2.196

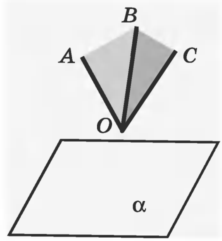


Рис. 2.197

OABC. Точку *O* называют *вершиной трехгранного угла* (рис. 2.196).

Возможны такие случаи взаимного расположения трехгранного угла *OABC* и некоторой плоскости α:

а) трехгранный угол *OABC* и плоскость α могут не иметь общих точек (рис. 2.197);

б) трехгранный угол *OABC* и плоскость α могут иметь одну общую точку — вершину трехгранного угла — точку *O* (рис. 2.198), которая принадлежит плоскости α;

в) трехгранный угол *OABC* может иметь с плоскостью α общий луч — ребро *OA* (рис. 2.199), который принадлежит плоскости α;

г) грань трехгранного угла *AOB* может лежать в плоскости α (рис. 2.200);

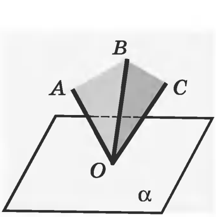


Рис. 2.198

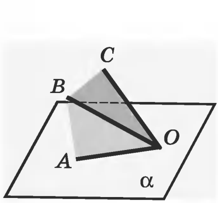


Рис. 2.199

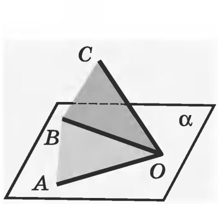


Рис. 2.200

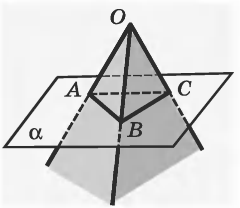


Рис. 2.201

д) плоскость α, не проходящая через вершину трехгранного угла $OABC$, может пересекать все ребра трехгранного угла соответственно в точках A, B, C (рис. 2.201).

В пересечении трехгранного угла $OABC$ и плоскости α получили треугольник ABC. Таким образом, в случае д) мы получили фигуру, ограниченную частью поверхности трехгранного угла и треугольником ABC. Это тело называют *треугольной пирамидой*, о свойствах которой мы будем говорить отдельно.

Плоские углы трехгранного угла обладают следующими *свойствами*.

Теорема 55. В трехгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух других плоских углов.

Теорема 56. В трехгранном угле каждый плоский угол больше разности двух других плоских углов.

47. Многогранные углы. Если взять больше лучей с общим началом, то получатся так называемые *многогранные углы*, некоторые из которых показаны на рисунке 2.202.

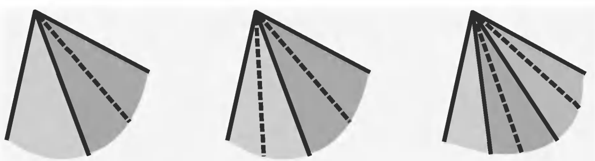


Рис. 2.202

Рис. 2.203

Изучив все многогранные углы на рис. 2.202, заключаем, что у многогранных углов одинаковое число ребер и граней:

у четырехгранного угла — 4 ребра и 4 грани;

у пятигранного угла — 5 ребер и 5 граней;

у шестигранного угла — 6 ребер и 6 граней и т. д.

Если пересечь каждый из построенных многогранных углов плоскостями, не проходящими через их вершины и пересекающими все их ребра, то в сечениях получатся фигуры: четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник (рис. 2.203).

Таким образом, в сечении получились различные многоугольники и, как и в случае с трехгранным углом, получились различные пирамиды: четырехугольная, пятиугольная, шестиугольная.

На рисунке 2.204 показаны так называемый невыпуклый многогранный угол и соответственно невыпуклый четырехугольник.

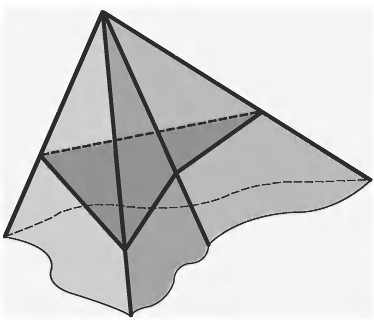


Рис. 2.204

Используя свойства плоских углов трехгранного угла, можно доказать важное *свойство плоских углов многогранного угла*.

Теорема 57. Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 4π.

48. Прямоугольные трехгранные углы.

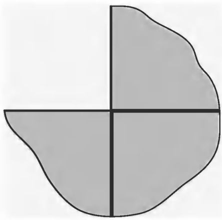


Рис. 2.205

Среди трехгранных углов и их разверток особое значение имеют так называемые *прямоугольные трехгранные углы*, у которых все плоские углы прямые (рис. 2.205). Именно такие трехгранные углы мы видим у куба, у торца дома, внутри каждой комнаты.

Прямоугольные трехгранные углы находят интересные и важные применения в черчении, а также при решении широкого круга прикладных геометрических задач.

Обозначим прямоугольный трехгранный угол $ABCD$. A — вершина этого угла, лучи AB, AC и AD — ребра угла. Расположим трехгранный угол $ABCD$ как на рис. 2.206. Разрежем модель поверхности этого угла по ребру AD и развернем его на плоскости, как на рис. 2.207, чтобы грань ABC рас-

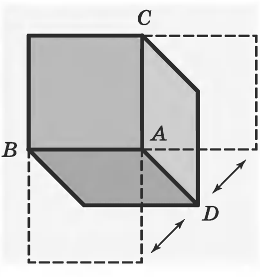


Рис. 2.206

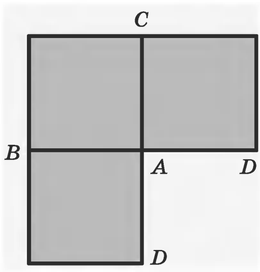


Рис. 2.207

полагалась прямо перед нами (фронтом к нам), грань ABD — внизу (совпадая с линией горизонта), а грань ACD — боком к нам (как бы в профиль). Изобразим каждую грань в виде квадрата (но не забывая при этом, что плоскость бесконечна).

В соответствии с тем, как расположили прямоугольный трехгранный угол, каждая его грань имеет свое название: ABC — *фронтальная*, ABD — *горизонтальная* и ACD — *профильная* (или вертикальная).

П р и м е р. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с его ребрами a, b и c углы α, β и γ. Докажите, что $\alpha + \beta + \gamma$ меньше π.

Р е ш е н и е. Из условия задачи имеем:

1. Прямоугольный параллелепипед с диагональю OA.
2. α, β, γ — углы, образованные диагональю OA и с ребрами параллелепипеда.

} дано (рис. 2.208)

3. Докажите, что $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.

Для решения задачи нужна идея:

4. Расположим три равных параллелепипеда так, как показано на рисунке 2.208.

5. Тогда $\angle BOC = 2\alpha$, $\angle AOC = 2\beta$, $\angle AOB = 2\gamma$.

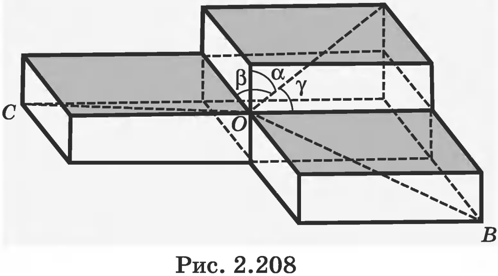


Рис. 2.208

Точка O не лежит в плоскости, проходящей через точки A, B, C. Значит, по свойству плоских углов многогранного угла, $2\alpha + 2\beta + 2\gamma < 2\pi$ (4).

3. $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ (5).

49. Пирамиды. *Пирамида* — это многогранник, одной из граней которого является некоторый многоугольник, а остальные грани — треугольники. На рисунке 2.209 изображена треугольная пирамида, гранями которой являются треугольники OAB, OBC, OCA, ABC. Ребрами пирамиды являются отрезки OA, OB, OC, AB, BC, CA. Треугольная пирамида имеет еще одно название — *тетраэдр*, что означает «четырехгранник» (у нее всегда четыре грани).

Точку O называют *вершиной пирамиды*, ребра OA, OB, OC — *боковыми ребрами*, а грань ABC — *основанием пирамиды*. Вершина O треугольной пирамиды и ее ребра OA, OB, OC образуют трехгранный угол.

В зависимости от вида трехгранного угла и от основания пирамиды различают треугольные пирамиды: прямые (рис. 2.210), наклонные (рис. 2.211).

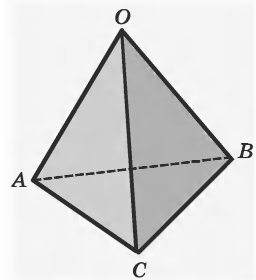


Рис. 2.209

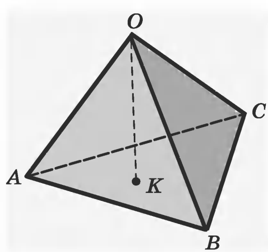


Рис. 2.210

Определение. *Пирамидой* называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника — *основания* пирамиды, точки, не лежащей в плоскости основания — *вершины* пирамиды и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания.

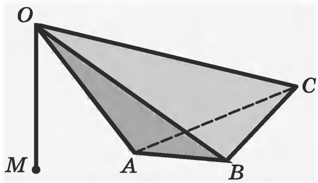


Рис. 2.211

На рисунке 2.212 изображена пирамида $SABCD$. Четырехугольник $ABCD$ — основание пирамиды, точка S — вершина пирамиды, отрезки SA, SB, SC и SD — ребра пирамиды.

Определение. *Высотой* пирамиды называют перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

На рисунке 2.212 SO — высота пирамиды. На рис. 2.210 у прямой пирамиды основание высоты — точка K — принадлежит основанию пирамиды. На рис. 2.211 у наклонной пирамиды основание высоты — точка M — не принадлежит основанию пирамиды — треугольнику ABC.

Может быть так, что высота пирамиды совпадает и с ее ребром. На рис. 2.213 OA — высота пира-

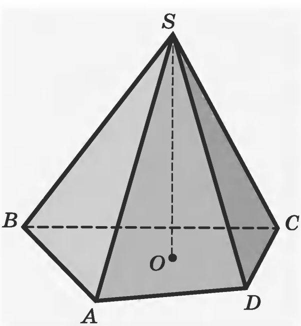


Рис. 2.212

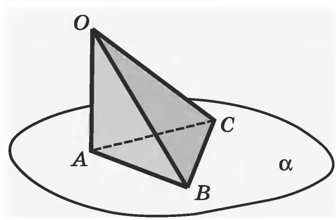


Рис. 2.213

миды и одновременно ее ребро. Такую пирамиду называют *прямоугольной*.

Пирамиды обладают свойством «жесткости» (как и треугольники). Пирамида — «жесткое» геометрическое тело, т. е. ее нельзя изменить, сломать.

Если в основании пирамиды лежит n-угольник, то пирамида называется n-угольной.

Определение. Пирамиду называют *правильной*, если ее основанием является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника.

У правильной пирамиды боковые ребра равны; следовательно, боковые грани — равные равнобедренные треугольники. Высоту боковой грани правильной пирамиды, проведенную из ее вершины, называют *апофемой*.

Из определения правильной пирамиды следует, что основание ее высоты попадает в центр основания. У правильной треугольной пирамиды — это центр равностороннего треугольника, у четырехугольной — центр квадрата и т. д.

Определение позволяет легко строить правильные пирамиды. Для такого построения достаточно взять любой правильный многоугольник, из его центра провести перпендикуляр к плоскости многоугольника и соединить какую-нибудь точку перпендикуляра (отличную от его основания) с точками многоугольника отрезками.

Однако это определение не позволяет легко проверить, будет ли правильной данная реальная пирамида (например, деревянная или металлическая). Возможность такой проверки дают следующие простые *свойства правильных пирамид*.

Теорема 58. Боковые ребра правильной пирамиды равны.

Теорема 59. Боковые грани правильной пирамиды — равные друг другу равнобедренные треугольники.

Можно иначе определить правильную пирамиду.

Определение. Пирамиду называют *правильной*, если ее основание — правильный многоугольник, а боковые ребра равны.

Пирамиду называют *правильной*, если ее боковые грани — равные равнобедренные треугольники, основания которых лежат на основании пирамиды.

Плоскость α, параллельная плоскости β основания пирамиды и пересекающая пирамиду, отсекает от нее *подобную пирамиду*. Другая часть пирамиды представляет собой многогранник, который называют *усеченной пирамидой*. Грани усеченной пирамиды, лежащие в параллельных плоскостях α и β, называют *основаниями* усеченной пирамиды, остальные грани называют *боковыми гранями*. Основания усеченной пирамиды представляют собой подобные (более того, гомотетичные) многоугольники, боковые грани — трапеции. На рисунке 2.214 изображена усеченная пирамида $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

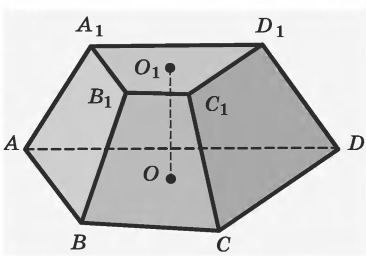


Рис. 2.214

Усеченную пирамиду, которая получается из правильной пирамиды, также называют *правильной*. Боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные равнобокие трапеции, их высоты называют *апофемами*.

На рисунке 2.215 изображена правильная усеченная четырехугольная пирамида. Ее основания — квадраты $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, грани — равные равнобокие трапеции — ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, DAA_1D_1, боковые ребра — равные отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1.

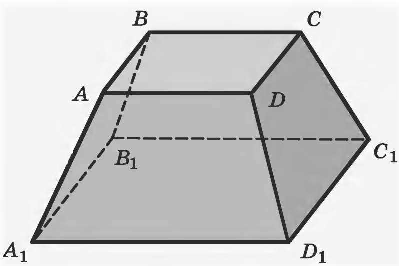


Рис. 2.215

П р и м е р. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро $CD \perp AD$, $CD \perp BD$, двугранный угол при ребре $CD = 1$ равен $120°$, а $AD = BD = \sqrt{2}$. Найдите величину двугранного угла при ребре AB.

Р е ш е н и е. Из условия задачи имеем:

1. $ABCD$ — треугольная пирамида, $CD \perp AD$, $CD \perp BD$.
2. $CD = 1$.
3. Двугранный угол при ребре CD равен $120°$.

дано (рис. 2.216)

4. $AD = BD = \sqrt{2}$.
5. Найдите двугранный угол при ребре AB.

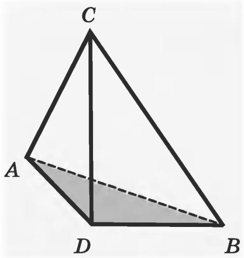


Рис. 2.216

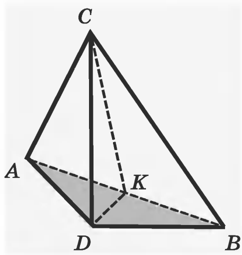


Рис. 2.217

Изучив данные задачи, получим:

6. Отрезок CD перпендикулярен двум пересекающимся прямым BD и AD плоскости ABD, а значит, CD перпендикулярен плоскости ABD (1, теорема 1 п. 77, см. с. 540).

7. $\angle ADB = 120°$ (3, определение линейного угла двугранного угла).

8. $\triangle ADB$ — равнобедренный (4).

Нужно найти величину двугранного угла при ребре AB. Для этого надо найти линейный угол этого двугранного угла, а стороны линейного угла перпендикулярны AB. Учитывая п. 8, можно рассмотреть (построить) точку K — середину ребра AB.

9. Построим точку K — середину ребра AB и соединим K с точками C и D (построение) (рис. 2.217).

10. DK — медиана $\triangle ADB$, а значит, и высота (8, 9, т. 15).

11. $KB \perp CK$ (1, 6, 10, теорема о трех перпендикулярах).

12. $\angle CKD$ — линейный угол двугранного угла при ребре AB (10, 11, определение линейного угла двугранного угла).

13. $\angle CKD = 45°$ (найдите самостоятельно).

50. Призмы.

Определение. *Призмой* называют многогранник, у которого две грани, называемые *основаниями* призмы, равны, и их соответственные стороны параллельны, а остальные грани — параллелограммы, у каждого из которых две стороны являются соответственными сторонами оснований. Эти остальные грани называют *боковыми гранями* призмы, а их стороны, не лежащие на основаниях призмы, — *боковыми ребрами* призмы.

Отрезки, соединяющие соответствующие вершины оснований призмы (боковые ребра), равны и параллельны друг другу.

На рисунке 2.218 изображена четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, на рисунке 2.219 — $ABCFA'B'C'F'$. Четырехугольники $ABCF$ и $A'B'C'F'$ — равные основания (произвольные четырехугольники). Грани $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CFF'C'$, $FAA'F'$ — параллелограммы. Ребра AA', BB', CC', FF' равны между собой и параллельны.

В зависимости от числа сторон основания различают призмы треугольные (рис. 2.220), четырехугольные (рис. 2.221), пятиугольные (рис. 2.222) и т. д. В основании призмы может лежать произвольный n-угольник.

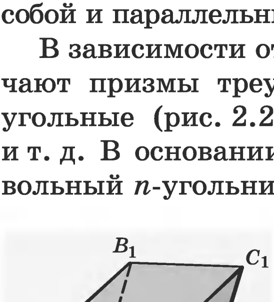


Рис. 2.218

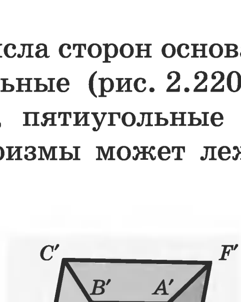


Рис. 2.219

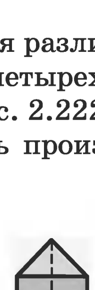


Рис. 2.220

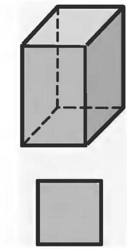


Рис. 2.221

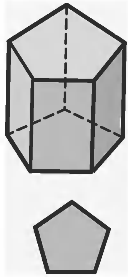


Рис. 2.222

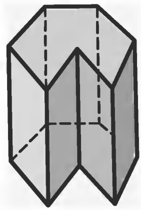


Рис. 2.223

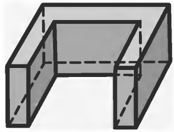


Рис. 2.224

Во всех приведенных выше примерах в основании призмы лежали выпуклые многоугольники. Но есть призмы, в основании которых лежат и невыпуклые многоугольники. В этом случае получаются невыпуклые призмы. На рисунках 2.221, 2.222 призмы выпуклые, а на рисунках 2.223, 2.224 — невыпуклые. В дальнейшем мы будем изучать свойства только выпуклых призм.

Среди различных призм выделяются два вида: *прямые* и *наклонные* призмы. На рисунке 2.225 изображена наклонная шестиугольная призма, а на рисунке 2.226 — прямая.

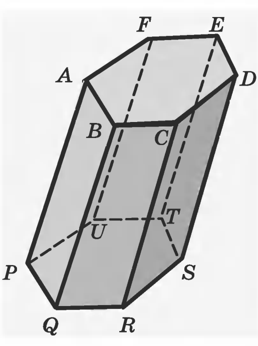


Рис. 2.225

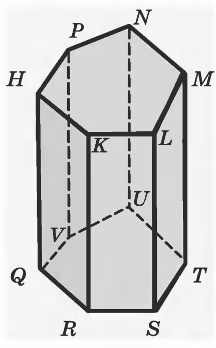


Рис. 2.226

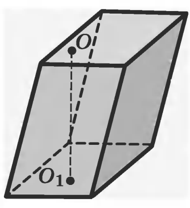


Рис. 2.227

У прямой призмы боковые ребра образуют с ребрами основания прямые углы, а боковыми гранями таких призм являются прямоугольники, а у наклонных призм все боковые грани — параллелограммы.

Различие между прямой и наклонной призмами связано с понятием высоты призмы. *Высотой призмы* является отрезок, перпендикулярный к обоим основаниям призмы. На рисунке 2.227 высотой четырехугольной призмы является отрезок OO_1. Высоту можно провести из любой точки верхнего основания, в том числе и из его вершины.

Определение. Прямую призму называют *правильной*, если ее основаниями являются правильные многоугольники (рис. 2.220—2.222). Ребра правильных призм являются высотами этих призм.

Определение. Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной ее грани, называют *диагональю* призмы (рис. 2.228).

Кроме диагоналей призмы рассматривают и диагональные сечения призмы.

Определение. *Диагональным сечением* призмы называют сечение ее плоскостью, проходящей че-

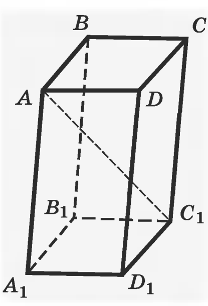


Рис. 2.228

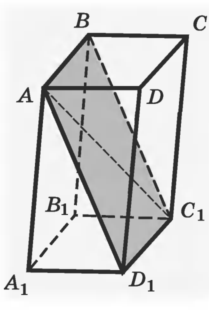


Рис. 2.229

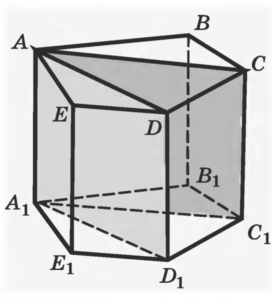


Рис. 2.230

рез два боковых ребра, не принадлежащих одной грани.

Диагональные сечения связаны с соответствующими диагоналями призмы.

На рисунке 2.229 изображена призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, AC_1 — одна из ее диагоналей. Сечение ABC_1D_1 является одним из диагональных сечений призмы.

Сечения призмы могут быть связаны и с диагоналями оснований. На рисунке 2.230 изображены два сечения ACC_1A_1 и ADD_1A_1 пятиугольной призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$, проходящие через диагонали AC и A_1C_1, а также AD и A_1D_1 оснований.

51. Параллелепипеды.

Определение. Призму, у которой основание — параллелограмм, называют *параллелепипедом*.

На рисунках 2.231, 2.232 изображены параллелепипеды.

У параллелепипеда шесть граней, и все они параллелограммы. Причем эти параллелограммы попарно равны и параллельно расположены, поэтому любую грань параллелепипеда можно принять за основание. Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называют противолежащими. На рисунке 2.228 грани ABB_1A_1 и DCC_1D_1 — противолежащие.

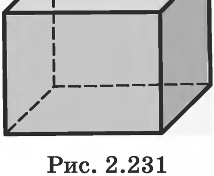


Рис. 2.231

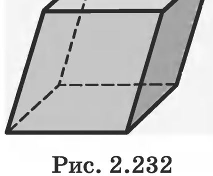


Рис. 2.232

Определение. Прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник, называют *прямоугольным параллелепипедом*.

Прямоугольный параллелепипед является примером многогранника, который наиболее широко используется в окружающей нас действительности. Практически все здания и все коробки для упаковки товара имеют форму прямоугольного параллелепипеда.

Определение. Прямоугольный параллелепипед, все ребра которого равны, называют *кубом*.

Длины трех ребер прямоугольного параллелепипеда, имеющих общую вершину, называют *измерениями этого параллелепипеда*, их часто называют еще длиной, шириной и высотой параллелепипеда.

На рисунке 2.233 у прямоугольного параллелепипеда длина равна 12 см, ширина 10 см, высота 8 см, а у куба на рисунке 2.234 все три измерения равны 10 см.

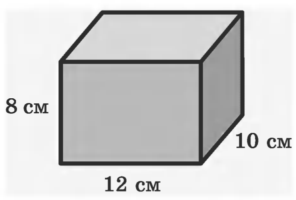


Рис. 2.233

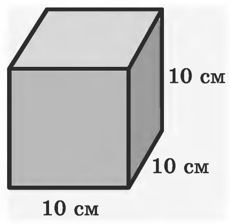


Рис. 2.234

У каждого параллелепипеда восемь вершин и четыре диагонали. Можно доказать теорему о *свойствах диагоналей параллелепипеда*.

Теорема 60. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам (рис. 2.235).

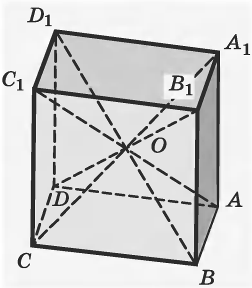


Рис. 2.235

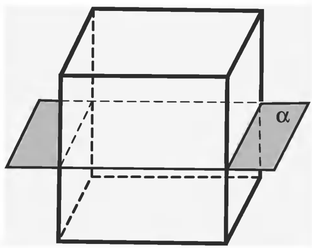


Рис. 2.236

Можно также заметить, что у прямоугольного параллелепипеда есть три плоскости симметрии, проходящих через центр симметрии параллельно граням. На рисунке 2.236 изображена одна из таких плоскостей. Она проходит через середины четырех параллельных ребер параллелепипеда. Концы ребер симметричны друг другу относительно этой плоскости.

Если у прямоугольного параллелепипеда все измерения (размеры) различны, то у него нет других плоскостей симметрии. Если у него равны два измерения, то плоскости диагональных сечений являются еще двумя плоскостями симметрии (рис. 2.237).

При пересечении прямоугольного параллелепипеда плоскостью могут получаться более сложные сечения (рис. 2.238—2.240).

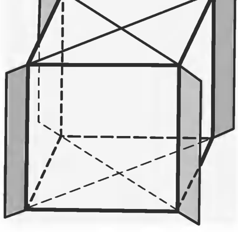


Рис. 2.237

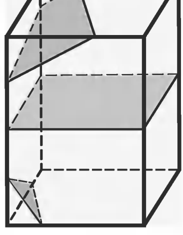


Рис. 2.238

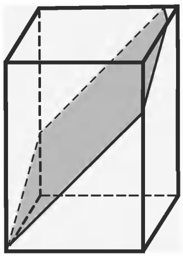


Рис. 2.239

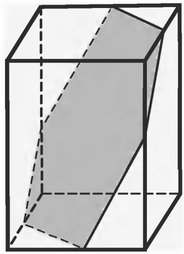


Рис. 2.240

П р и м е р. Докажем теорему 60.

Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы имеем:

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. 2. AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 — диагонали параллелограмма.	дано (рис. 2.235)

3. Диагонали AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам (требуется доказать).

4. Ребра AB, DC, D_1C_1, A_1B_1 равны и параллельны (1).

5. ABC_1D_1 и DCB_1A_1 — параллелограммы (1, 4, признак параллелограмма).

Таким образом, выбрали два параллелограмма, у которых диагонали параллелепипеда являются их диагоналями. Надо доказать, что эти диагонали пересекаются в одной точке и в этой точке делятся пополам.

6. Пусть диагонали AC_1 и BD_1 параллелограмма ABC_1D_1 пересекаются в точке O, а диагонали DB_1 и CA_1 параллелограмма BCD_1A_1 пересекаются в точке O_1 (предположение).

7. ADC_1B_1 — параллелограмм (1, признак параллелограмма).

8. Точки O и O_1 являются серединами отрезков AC_1 и DB_1 (7).

Пункт 8 не может выполняться и, значит, точки O и O_1 должны совпадать. Итак, мы доказали пункт 3.

52. Тело и его поверхность. По аналогии с понятием плоского многоугольника вводится понятие *тела*, его *поверхности* и *внутренней области*.

Для определения тела нужны следующие понятия.

Определение. Точку геометрической фигуры называют *внутренней*, если существует шар с центром в этой точке, целиком принадлежащий этой фигуре.

Определение. Фигуру называют *областью*, если все ее точки внутренние и если любые две точки можно соединить ломаной, целиком принадлежащей фигуре.

Определение. Точку пространства называют *граничной точкой* данной фигуры, если любой шар с центром в этой точке содержит как точки, принадлежащие фигуре, так и точки, не принадлежащие ей. Граничные точки области образуют границу области.

Определение. *Телом* называют область вместе с ее границей. Границу тела называют *поверхностью тела*. Тело называют *простым*, если его можно разбить на конечное число треугольных пирамид.

В курсе геометрии часто говорят о геометрических фигурах, когда рассматривают плоские фигуры и телах, когда изучают пространственные объекты. Можно в каждом случае говорить о фигурах, так как определение тела имеет много сложностей, которые, как правило, не входят в обязательную программу школы.

53. Общее определение многогранника.

Определение. *Многогранником* называют тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских выпуклых многоугольников.

Определение. Многогранник называют *выпуклым*, если он расположен по одну сторону плоскости каждого многоугольника на его поверхности (рис. 2.241). Общую часть такой плоскости и поверхности выпуклого многогранника называют *гранью*. Грани выпуклого многогранника — выпуклые многогранники. Стороны граней называют *ребрами многогранника*, а вершины — *вершинами многогранника*.

Если эти условия не выполнены, то многогранники будут невыпуклыми (рис. 2.242).

Леонард Эйлер (1707—1783) — гений XVIII века, академик Санкт-Петербургской Академии наук, один из величайших математиков мира, доказал теорему о многогранниках. Если число граней многогранника $Г$, число вершин — $В$, число ребер — $Р$,

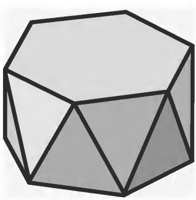


Рис. 2.241

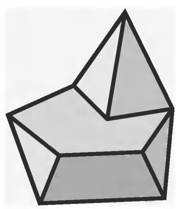


Рис. 2.242

то эти три числа для любого простого многогранника (они не имеют дыр) связаны одним и тем же соотношением: $B + \Gamma - P = 2$. Например, у куба $B = 8$, $\Gamma = 6$, $P = 12$: $8 + 6 - 12 = 2$; для шестиугольной призмы (обычный карандаш с шестью гранями): $12 + 8 - 18 = 2$; для четырехугольной пирамиды: $5 + 5 - 8 = 2$.

Теорема 61 *(теорема Эйлера)*. У любого простого многогранника сумма числа граней и вершин на 2 больше числа ребер:

$$B + \Gamma - P = 2.$$

54. Правильные многогранники.

Определение. Выпуклый многогранник называют *правильным*, если все его грани — равные правильные многоугольники и, кроме того, к каждой его вершине сходится одно и то же число ребер.

Математики древности уделяли много внимания изучению этих многогранников. Платон связывал с ними устройство нашей Вселенной. Правильных многогранников всего пять, по имени Платона их иногда называют «пять платоновых тел». На рисунке 2.243 изображены пять правильных выпуклых многогранников.

Очевидно, что все ребра правильного многогранника равны друг другу. Можно доказать, что равны и все многогранные углы при вершинах, а также другие свойства.

Если число сторон каждой грани m, а число ребер каждой вершины — n, то числа m и n определяют вид правильного многогранника. Два правильных многогранника одного вида называют *одноименными*.

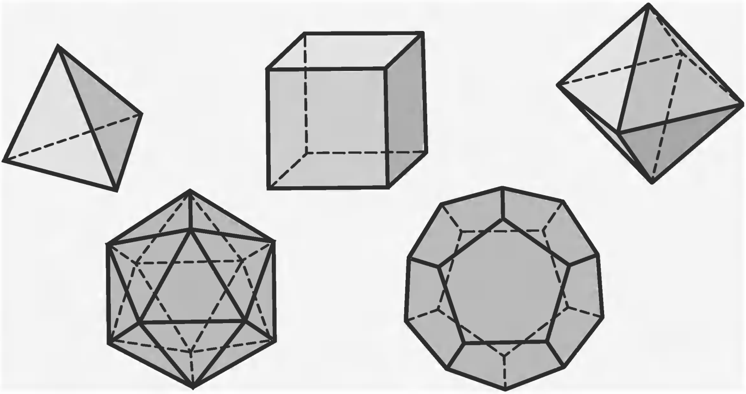


Рис. 2.243

У куба $m = 4$, а $n = 3$. У правильного тетраэдра $m = 3$, а $n = 3$ и т. д.

Правильные многогранники	Грань	Плоский угол
Тетраэдр	Треугольник	60°
Куб	Квадрат	90°
Октаэдр	Треугольник	60°
Додекаэдр	Пятиугольник	108°
Икосаэдр	Треугольник	60°

Леонардо да Винчи делал каркасные модели правильных многогранников, изготавливая ребра из дерева и оставляя грани воображаемыми. Если смотреть на такую модель из точки, лежащей строго напротив одной из его граней вблизи центра, то эта грань будет представляться большим многоугольником, внутри которого лежат все остальные

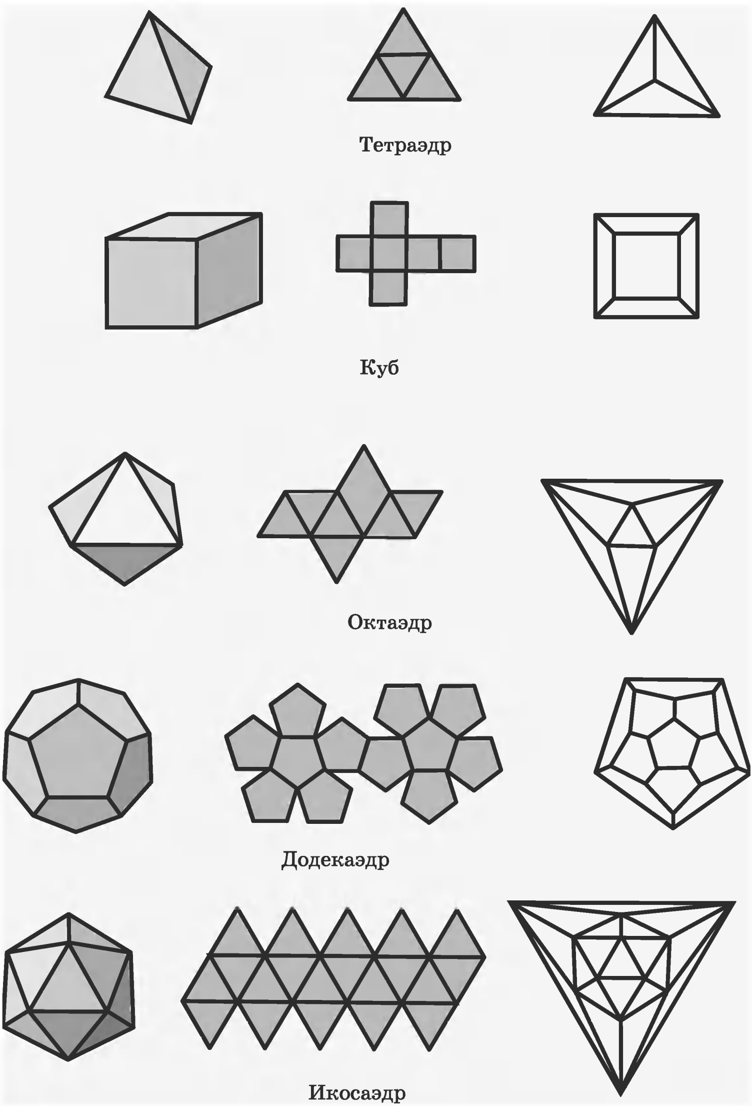


Рис. 2.244

грани. Такой рисунок многогранника называется *диаграммой Шлегеля*.

На рисунке 2.244 изображены перспективный чертеж, развертка, из которой можно сложить картонную модель фигуры, и диаграмма Шлегеля для каждого из пяти платоновых тел. На них видны устройство граней и их расположение около вершин.

Пример. Является ли правильным многогранник, вершины которого — центры всех граней: а) куба; б) правильного тетраэдра; в) правильного октаэдра?

Многогранник, у которого вершины являются центрами всех граней куба, есть правильный октаэдр (рис. 2.245). Если же соединить центры всех граней правильного октаэдра, то получим ребра куба (рис. 2.246). Говорят, что куб и октаэдр *двойственны* друг другу. Правильный тетраэдр двойственен сам себе, то есть центры граней правильного тетраэдра являются вершинами правильного тетраэдра (рис. 2.247).

55. Триангуляция многоугольников и многогранников. Многоугольники можно получать, прикладывая друг к другу треугольники (рис. 2.248). При данном приложении треугольников следует учитывать, что треугольники, из которых конструируется многоугольник, должны: а) либо не иметь общих точек; б) либо иметь общую вершину; в) либо иметь общую целую сторону.

При этом можно говорить не о прикладывании треугольников, а о разбиении многоугольников на указанные треугольники. В этом случае происходит так называемая *триангуляция многоугольника*.

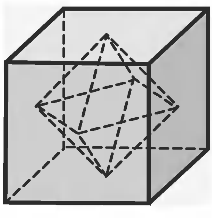


Рис. 2.245

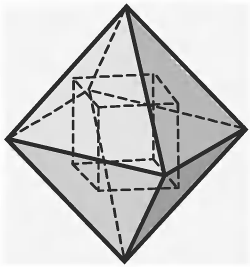


Рис. 2.246

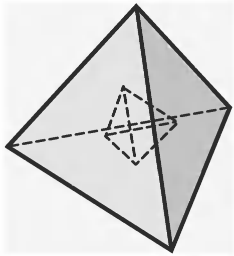


Рис. 2.247

Есть два способа триангуляции выпуклых многоугольников:

1) проведение всех диагоналей из одной его вершины (рис. 2.249);

2) соединение отрезками любой его внутренней точки со всеми вершинами (рис. 2.250).

Триангуляцию можно проводить и с многогранниками.

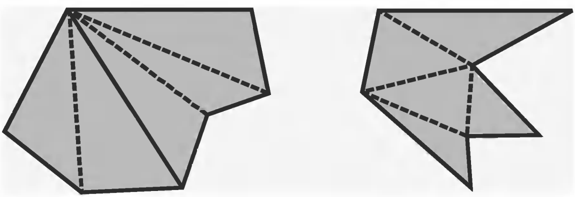


Рис. 2.248

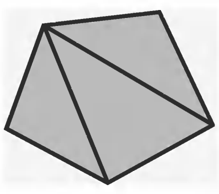


Рис. 2.249

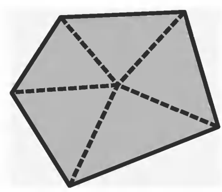


Рис. 2.250

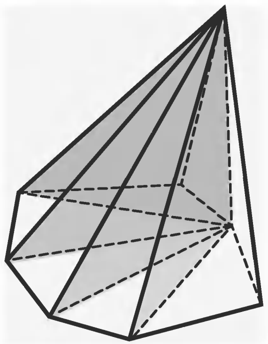


Рис. 2.251

Триангуляцией многогранника называют такое его разбиение на треугольные пирамиды, при котором каждые две треугольные пирамиды либо не имеют общих точек, либо имеют только общую вершину, либо общее ребро, либо целую общую грань.

Легко триангулировать выпуклую пирамиду, триангулируя диагоналями ее основание и проводя затем диагональные сечения (рис. 2.251).

56. Развертки многогранников

Нам часто приходится проделывать две операции, связанные с многогранниками:

— разрезать их поверхности по ребрам, разворачивать эти поверхности на плоскости (на крышке стола), в этом случае говорят, что мы получаем *развертку поверхности многогранника*;

— из имеющейся выкройки (развертки) склеивать (конструировать) многогранник.

На рисунке 2.252 вы видите развертку куба, а на рисунке 2.253 изображена развертка прямоугольного параллелепипеда.

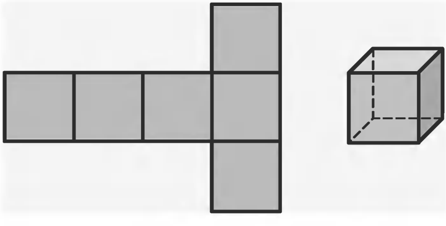


Рис. 2.252

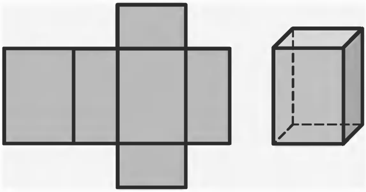


Рис. 2.253

Если мы, отправляясь из одной вершины и разрезая многогранник ножницами по ребрам, побываем в каждой из остальных вершин ровно по одному разу, то поверхность многогранника уже можно будет развернуть на плоскость.

Заметим, что в этом случае число разрезов окажется на единицу меньше числа вершин.

Как уже говорилось, кроме операции получения разверток многогранников часто встречаются и операции *моделирования многогранников из разверток*. При этом сгибают развертку по пунктирным линиям и склеивают соответствующие ребра. Для удобства склейки развертку многогранника изготавливают с клапанами (рис. 2.254).

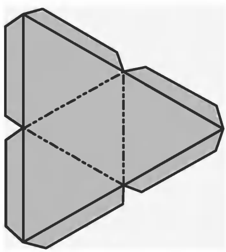


Рис. 2.254

Многогранник может иметь несколько различных разверток. Вид развертки зависит от того, по каким ребрам разрезали поверхность многогранника.

Представим себе модель четырехугольной пирамиды, изготовленную из гибкого нерастяжимого материала (бумага, картон и т. д.). Эту модель можно разрезать по нескольким ребрам и развер-

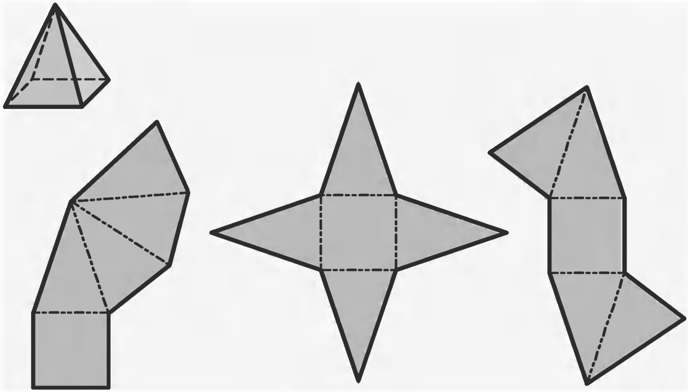


Рис. 2.255

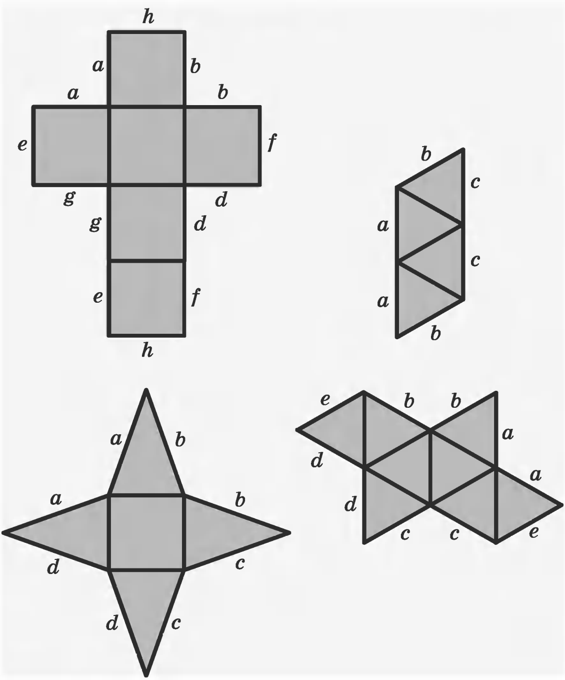


Рис. 2.256

нуть на плоскости. Мы получим различные многоугольники, которые являются развертками данной пирамиды. На рисунке 2.255 изображены три различные развертки такой пирамиды.

Разверткой многогранника (многогранной поверхности) является совокупность многоугольников, для которых указано, как их нужно склеивать (какими сторонами прикладывать друг к другу).

При составлении развертки соблюдают следующие правила: склеиваемые стороны должны быть равной длины; на сторонах развертки указывают, как они должны быть склеены.

На рисунке 2.256 изображены развертки различных многогранников с такими указаниями.

§10. Тела вращения

57. Понятие о поверхностях и телах вращения. Если многоугольник $ABCDE$ вращается вокруг прямой AB (рис. 2.257), то каждая его точка, не принадлежащая прямой AB, описывает окружность с центром на этой прямой. Весь многоугольник $ABCDE$ при этом описывает некоторое *тело вращения* (рис. 2.258); прямая AB — ось этого тела.

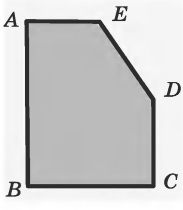


Рис. 2.257

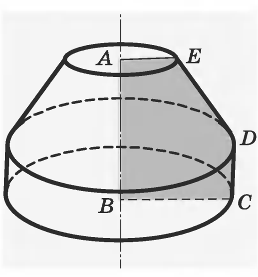


Рис. 2.258

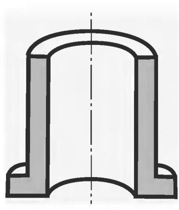


Рис. 2.259

Плоскость, проходящая через ось тела вращения, является его *плоскостью симметрии*. Таких плоскостей каждое тело вращения имеет бесконечно много.

Любая плоскость, проходящая через ось тела вращения, пересекает это тело. Полученное сечение называют *осевым сечением*. В частности, осевое сечение тела вращения может состоять из двух изолированных друг от друга плоских фигур, симметричных относительно оси (рис. 2.259). Все осевые сечения тела вращения равны.

Чтобы *задать тело вращения*, достаточно указать его ось и фигуру, вращением которой получено данное тело. Описывая такое тело словесно, вместо оси иногда указывают принадлежащий ей отрезок. Например, вместо «тело, образованное вращением треугольника вокруг оси, содержащей его сторону» говорят и короче: «тело, образованное вращением треугольника вокруг его стороны».

58. Цилиндр. Можно дать определение цилиндра.

Определение. *Цилиндром* (точнее, круговым цилиндром) называют тело, которое состоит из двух кругов, совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов. Круги называют *основаниями* цилиндра, а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей кругов — *образующими* цилиндра (рис. 2.260, 2.261).

Можно доказать, что основания цилиндра равны и лежат в параллельных плоскостях, что у цилиндра образующие параллельны и равны. Поверхность цилиндра состоит из оснований и *боковой поверхности*. Боковая поверхность составлена из образующих.

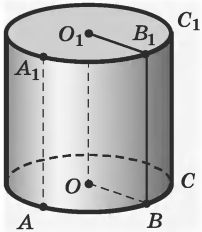


Рис. 2.260

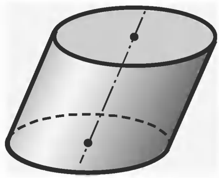


Рис. 2.261

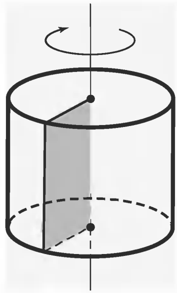


Рис. 2.262

Определение. Цилиндр называют *прямым*, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований.

На рисунке 2.261 изображен наклонный цилиндр, а на рис. 2.260 — прямой. В школьном курсе, как правило, рассматривают только прямые цилиндры, называя их для краткости просто цилиндрами.

Цилиндр можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг одной из его сторон как оси (рис. 2.262).

Радиусом цилиндра называют радиус его основания. *Высотой* цилиндра называют расстояние между плоскостями оснований. *Осью* цилиндра называют прямую, проходящую через центры оснований. Ось цилиндра параллельна образующим.

Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называют *осевым сечением* цилиндра (рис. 2.263). Именно через такое сечение обозначают цилиндр. Плоскость, проходящая через образующую прямого цилиндра и перпендикулярная осевому сечению, проведенному через эту образующую, называется *касательной плоскостью* цилиндра (рис. 2.264).

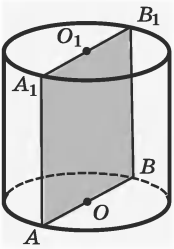


Рис. 2.263

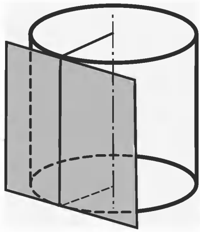


Рис. 2.264

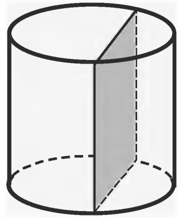


Рис. 2.265

Плоскость, перпендикулярная оси цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.

На рисунке 2.265 изображено сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси. Оно представляет собой прямоугольник.

Если цилиндр AA_1B_1B с радиусом основания $AO = r$ разрезать по образующей l (рис. 2.266) и развернуть на плоскости, получится прямоугольник, стороны которого — спрямленная окружность основания $ABA = 2\pi r$ и образующая l — развертка боковой поверхности цилиндра. Чтобы получить развертку полной поверхности, надо присоединить два круга — основания цилиндра (рис. 2.267).

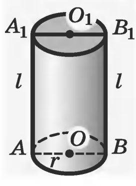


Рис. 2.266

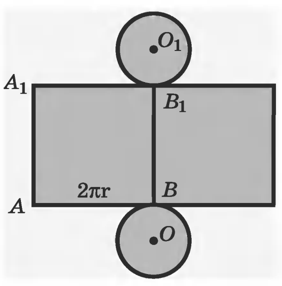


Рис. 2.267

59. Призма, вписанная в цилиндр и описанная около него.

При решении геометрических задач часто приходится рассматривать комбинации многогранников и цилиндров, в частности, призм, вписанных в цилиндр и описанных около цилиндра.

Определение. Призмой, *вписанной* в цилиндр, называют такую призму, основания которой — равные многоугольники, вписанные в основания цилиндра. Ее боковые ребра являются образующими цилиндра (рис. 2.268).

Определение. Призму называют *описанной* около цилиндра, если ее основания — равные многоугольники, описанные около основания цилиндра. Плоскости ее граней касаются боковой поверхности цилиндра (рис. 2.269).

П р и м е р. В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Найдите угол между диагональю ее боковой грани и осью цилиндра, если радиус основания равен высоте цилиндра.

Р е ш е н и е. Из условия задачи имеем:

1. В цилиндр вписана
правильная шестиугольная призма.
2. Радиус основания цилиндра
равен высоте призмы $AO = AA_1$.

} дано (рис. 2.270)

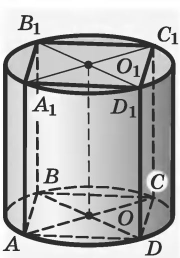


Рис. 2.268

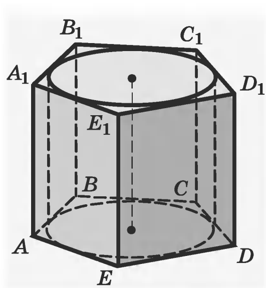


Рис. 2.269

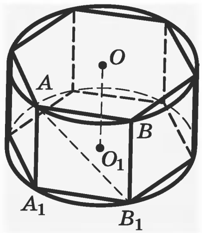


Рис. 2.270

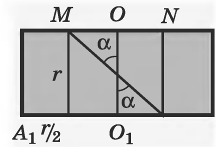


Рис. 2.271

3. Требуется найти угол между OO_1 и AB_1.

4. $AO = AA_1 = A_1B_1$ (1, свойства правильного шестиугольника, вписанного в окружность).

5. ABB_1A_1 — квадрат (1, 4, определение квадрата).

Надо найти угол между OO_1 и AB_1. Как это сделать? Лучше всего рассмотреть осевое сечение призмы, изображенное на рисунке 2.271. Задача сводится к нахождению угла α.

6. $\alpha = 45°$ (найдите самостоятельно).

60. Конус.

Определение. *Конусом* (точнее, круговым конусом) называют тело, которое состоит из круга — *основания* конуса, точки, не лежащей в плоскости этого круга, — *вершины* конуса и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания. Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называют *образующими* конуса (рис. 2.272).

Поверхность конуса состоит из основания и *боковой поверхности*.

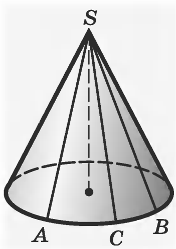


Рис. 2.272

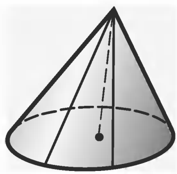


Рис. 2.273

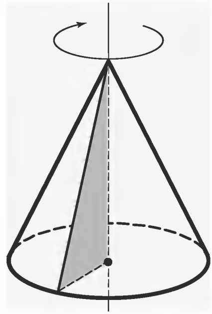


Рис. 2.274

Определение. Конус называется *прямым*, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания (рис. 2.272).

На рисунке 2.273 изображен наклонный конус, в дальнейшем будет рассматриваться только прямой конус, называемый для краткости просто конусом.

Прямой круговой конус можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета как оси (рис. 2.274).

Определение. *Высотой* конуса называют перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания.

У прямого конуса основание высоты совпадает с центром основания (рис. 2.272). *Осью* прямого конуса называется прямая, содержащая его высоту. У наклонного конуса основание высоты может не совпадать с центром круга, лежащего в основания конуса (рис. 2.273).

Если конус PAB с радиусом основания r и образующей l (рис. 2.275) разрезать по образующей PB и развернуть на плоскости, то получим развертку.

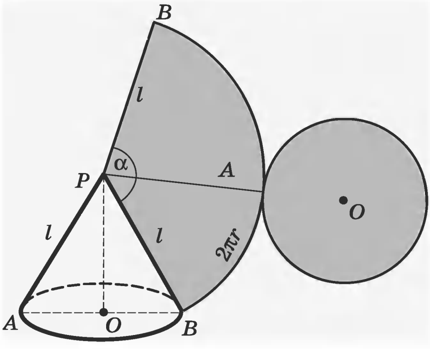


Рис. 2.275

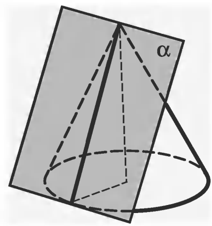


Рис. 2.276

Развертка конуса будет состоять из сектора $BPAB$ и круга (основания) диаметра $d = 2r$.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называют *осевым сечением*. Плоскость, проходящая через образующую конуса и перпендикулярная осевому сечению, проведенному через эту образующую, называется *касательной плоскостью* конуса (рис. 2.276).

Плоскость, перпендикулярная оси конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность — по окружности с центром на оси конуса.

Плоскость, перпендикулярная оси конуса, отсекает от него меньший конус. Оставшуюся часть называют *усеченным конусом* (рис. 2.277).

Усеченный конус можно получить и как тело вращения.

Определение. *Усеченным конусом* называют тело вращения, образованное вращением прямоугольной трапеции около боковой стороны, перпендикулярной основаниям.

Круги O и O_1 — его основания (рис. 2.277), его образующие равны между собой, прямая OO_1 —

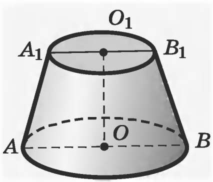


Рис. 2.277

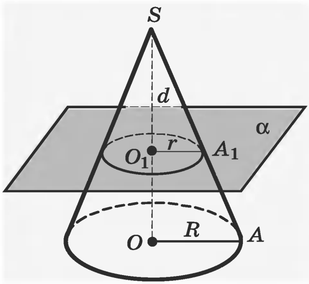


Рис. 2.278

ось, отрезок OO_1 — высота. Его осевое сечение AA_1B_1B — равнобедренная трапеция.

П р и м е р. Конус пересечен плоскостью, параллельной основанию, на расстоянии d от вершины. Найдите площадь сечения, если радиус основания конуса R, а высота H.

Р е ш е н и е. Из условия задачи имеем:

1. Конус с вершиной S.
2. $SO_1 = d$.
3. $SO = H$.
4. $OA = R$.
5. Плоскость α пересекает конус и параллельна основанию.

} дано (рис. 2.278)

6. Найдите площадь сечения конуса.

7. Сечение конуса получается из основания конуса преобразованием гомотетии относительно вершины конуса с коэффициентом гомотетии $k = \dfrac{d}{H}$ (1, 2, 3, 4, 5, определение гомотетии).

8. Радиус круга в сечении $r = R\dfrac{d}{H}$ (7).

9. Площадь сечения $S = \pi R^2 \dfrac{d^2}{H^2}$ (8, теорема о площади круга).

61. Пирамида, вписанная в конус и описанная около него.

Определение. Пирамидой, *вписанной* в конус, называют такую пирамиду, основание которой есть многоугольник, вписанный в окружность основания конуса, а вершиной является вершина конуса. Боковые ребра пирамиды, вписанной в конус, являются образующими конуса (рис. 2.279).

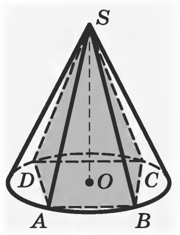


Рис. 2.279

Определение. Пирамиду называют *описанной* около конуса, а конус — *вписанным* в пирамиду, если ее основанием является многоугольник, описанной около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. Плоскости боковых граней описанной пирамиды являются касательными плоскостями конуса (рис. 2.280).

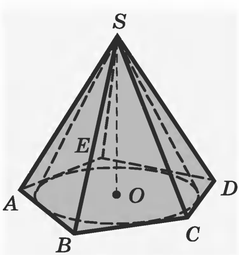


Рис. 2.280

62. Шар.

Определение. *Шаром* называют тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного, от данной точки. Эту точку называют *центром* шара, а данное расстояние — *радиусом* шара (рис. 2.281).

Границу шара называют шаровой поверхностью или *сферой*. На рисунке 2.281 точки A, B и D принадлежат сфере, а, например, точка M ей не принадлежит. Таким образом, точками сферы являются все точки шара, которые удалены от центра на расстояние, равное *радиусу*. Любой отрезок, соеди-

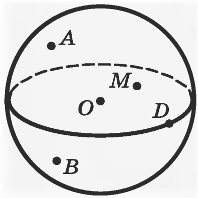


Рис. 2.281

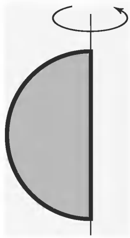


Рис. 2.282

няющий центр шара с точкой шаровой поверхности, также называют *радиусом*.

Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называют *диаметром*. Концы любого диаметра называют *диаметрально противоположными точками* шара.

Шар так же, как цилиндр и конус, является телом вращения. Он получается при вращении полукруга вокруг его диаметра, как оси (рис. 2.282).

Теорема 62. Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Если шар с центром O и радиусом R пересечен плоскостью α, то в сечении по теореме 62 получается круг радиуса r с центром K (рис. 2.283). Радиус сечения шара плоскостью можно вычислить по формуле

$$r = \sqrt{R^2 - OK^2}.$$

Из формулы видно, что плоскости, равноудаленные от центра, пересекают шар по равным кругам. Радиус сечения шара тем больше, чем ближе секущая плоскость к центру шара, т. е. чем меньше

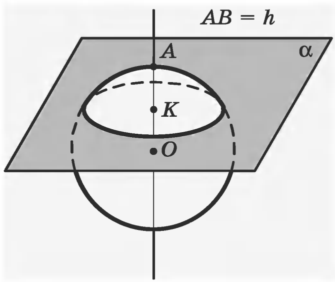


Рис. 2.283

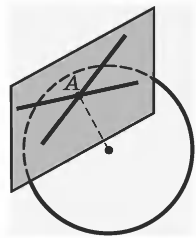


Рис. 2.284

расстояние OK. Наибольший радиус имеет сечение плоскостью, проходящей через центр шара. Радиус этого круга равен радиусу шара.

Плоскость, проходящую через центр шара, называют *диаметральной плоскостью*. Сечение шара *диаметральной плоскостью* называют *большим кругом*, а сечение сферы — *большой окружностью*.

Теорема 63. Любая диаметральная плоскость шара является его плоскостью симметрии. Центр шара является его центром симметрии.

Плоскость, проходящую через точку A шаровой поверхности и перпендикулярную радиусу, проведенному в точку A, называют *касательной плоскостью*. Точку A называют *точкой касания* (рис. 2.284).

Теорема 64. Касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку — точку касания.

Прямую, проходящую через точку A шаровой поверхности перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку, называют *касательной* (рис. 2.285).

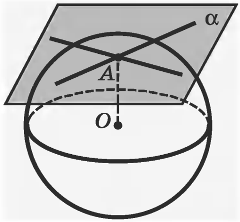


Рис. 2.285

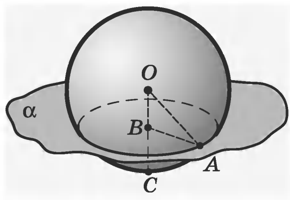


Рис. 2.286

Теорема 65. Через любую точку шаровой поверхности проходит бесконечно много касательных, причем все они лежат в касательной плоскости шара.

П р и м е р. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная радиусу плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?

Р е ш е н и е. Из условия задачи имеем:

1. Шар с центром O и радиусом R, $OC = OA = R$.
2. $OB = BC = \dfrac{R}{2}$.
3. CO перпендикулярен плоскости окружности с центром в точке B.

дано (рис. 2.286)

4. Найдите отношение площади круга с центром в точке B к площади большого круга.

Чтобы решить задачу, надо знать радиус получающегося в сечении круга с центром в точке B. Как его найти?

5. $\triangle OBA$ — прямоугольный (3, определение перпендикуляра к плоскости).

6. Если радиус шара R, то радиус круга в сечении будет $\sqrt{R^2 - \left(\dfrac{R}{2}\right)^2} = R\sqrt{\dfrac{3}{4}}$.

7. Отношение площади этого круга к площади большого круга равно $\pi\left(R\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 : \pi R^2 = \frac{3}{4}$ (1, 2, 5, теорема Пифагора).

63. Части шара и сферы.

В геометрии существуют специальные названия частей сферы и шара, которые получаются при разбиении этих фигур на части отрезками, прямыми или плоскостями.

Определение. Часть шара, отсекаемую плоскостью, называют *шаровым сегментом*.

Шаровой сегмент ограничен: 1) частью сферы, которую называют *сегментной поверхностью*; 2) кругом, который называют *основанием шарового сегмента*.

На рис. 2.287 плоскость α, проходящая через точку B, отсекает от шара два шаровых сегмента.

Определение. *Сферическим сегментом* называют часть сферы, отсекаемую плоскостью.

Окружность, по которой плоскость пересекает сферу, называют *основанием сферического сегмента*.

Высотой шарового сегмента и сегментной поверхности называют отрезок радиуса, перпендикулярного к основанию сегмента. На рисунке 2.287 верхний сегмент имеет высоту AB.

Если пересечь шар двумя параллельными плоскостями, тогда шар (его граничная сфера) разделится на три части, две из них — *шаровые (сферические) сегменты*.

Определение. Часть шара, заключенную между двумя пересекающими его параллельными плоскостями, называют *шаровым слоем*.

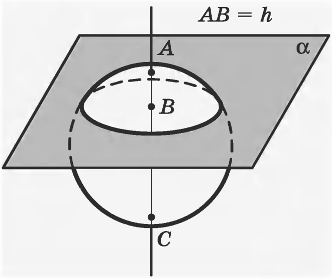


Рис. 2.287

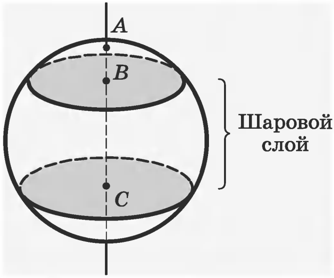


Рис. 2.288

На рисунке 2.288 две параллельные плоскости, проходящие через точки CB, отсекают от шара *шаровой слой*.

Определение. *Сферическим поясом* называют часть сферы, заключенную между двумя ее параллельными сечениями.

Поверхность шарового слоя состоит из двух кругов, называемых *основаниями шарового слоя*, и сферического пояса соответственно.

Высотой шарового слоя называют перпендикуляр, проведенный из точки одного основания к плоскости другого; чаще всего берут за высоту отрезок диаметра сферы, перпендикулярного основаниям, с концами на них. *Высотой сферического пояса* называют высоту соответствующего шарового слоя. На рисунке 2.288 высотой шарового слоя является отрезок BC.

Сферический сегмент и сферический пояс можно рассматривать как поверхности, образованные вращением некоторых дуг окружности вокруг прямой AB (рис. 2.288).

Шаровой сектор — это часть шара, получаемая не простым сечением шара плоскостью (или плоскостями), а как фигура, образованная при

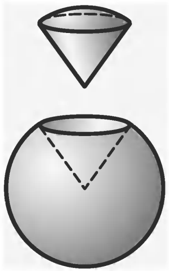


Рис. 2.289

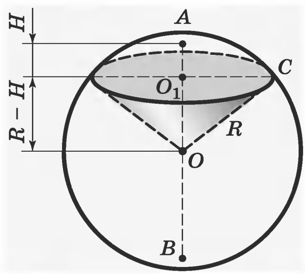


Рис. 2.290

вращении соответствующего кругового сектора (рис. 2.289).

Определение. *Шаровым сектором* называют фигуру, полученную при вращении кругового сектора с углом, меньшим 90°, вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов.

Шаровой сектор состоит из шарового сегмента и конуса. На рисунке 2.290 изображен круговой сектор COA (O — центр данного круга). Вращая круговой сектор COA вокруг радиуса AO, получим шаровой сектор с центром в точке O (рис. 2.290). Полученный шаровой сектор состоит из шарового сегмента высотой H и конуса с вершиной в точке O и высотой $R - H$.

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ

§11. Пересекающиеся прямые

64. Понятие пересекающихся прямых.

Определение. Если две прямые имеют только одну общую точку, то такие прямые называют *пересекающимися*.

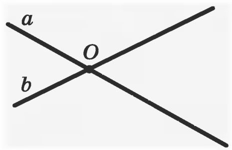


Рис. 2.291

На рисунке 2.291 прямые a и b пересекаются в точке O.

Можно доказать такую теорему.

Теорема 1. Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и только одну.

Несколько прямых могут пересекаться не в одной точке, а, например, попарно. На рисунке 2.292 изображено пересечение трех прямых, каждые две из которых пересекаются только в одной точке. При этом образуется треугольник и вся эта фигура всегда лежит в одной плоскости.

Четыре прямые, каждые две из которых имеют только одну общую точку, образуют четырехугольник (рис. 2.293).

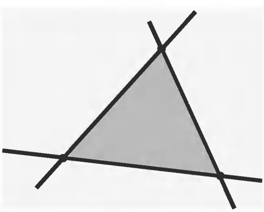


Рис. 2.292

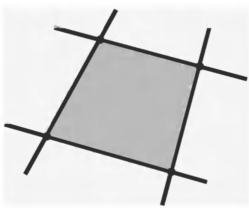


Рис. 2.293

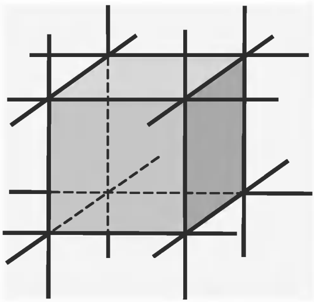


Рис. 2.294

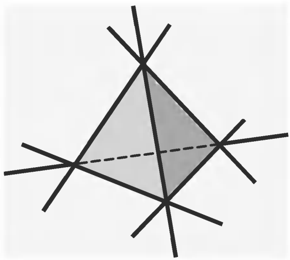


Рис. 2.295

На рисунках 2.294, 2.295 изображены куб и тетраэдр, у которых продолжены их ребра. Мы видим, что в каждой вершине куба и тетраэдра пересекаются три прямые.

§12. Перпендикулярные прямые

65. Понятие перпендикулярных прямых.

При пересечении двух прямых есть очень важный случай, когда, пересекаясь, прямые образуют прямые углы (рис. 2.296).

Определение. Две прямые называют *перпендикулярными*, если они пересекаются под прямым углом.

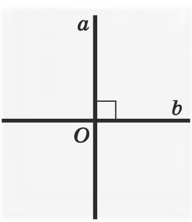


Рис. 2.296

На рисунках перпендикулярность прямых обозначается специальным знаком — ⌐ (рис. 2.296).

При записи перпендикулярность прямых обозначается так: $\perp$.

Запись $a \perp b$ читается: «прямая a перпендикулярна прямой b».

Кроме понятия перпендикулярности прямых в геометрии используется понятие *перпендикуляра к прямой*. Говорят: провести перпендикуляр к прямой, проходящий через данную точку, опустить перпендикуляр из точки на прямую.

Определение. Перпендикуляром, проведенным из точки A к прямой a, называют отрезок прямой, перпендикулярной к прямой a, с концами в точках A и B, где A — точка, из которой проводится перпендикуляр, а B — точка пересечения прямой a с пердпендикулярной ей прямой AB.

На рисунке 2.297 прямая AB перпендикулярна к прямой a, отрезок AB является перпендикуляром к прямой a, точку B называют *основанием перпендикуляра* AB.

Определение. Длину перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую, называют *расстоянием* от точки до прямой.

Построение перпендикулярных прямых связано с вычерчиванием прямых углов.

Для вычерчивания прямых углов используется угольник или чертежный треугольник (рис. 2.298). Прямой угол может быть изображен в любом положении (рис. 2.299).

На рисунке 2.300 показано, как с помощью угольника и линейки можно провести перпендикуляр через точку O, лежащую на прямой AB. На

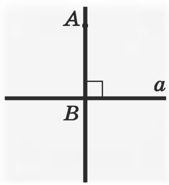


Рис. 2.297

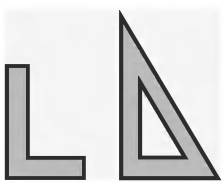


Рис. 2.298

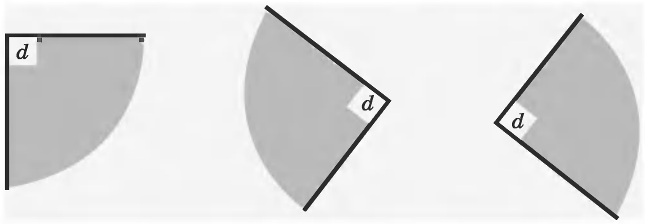


Рис. 2.299

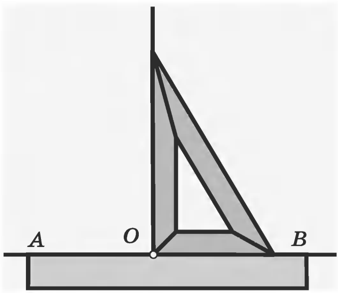


Рис. 2.300

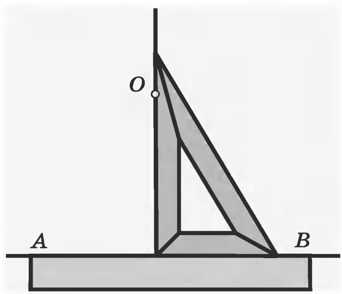


Рис. 2.301

рисунке 2.301 показано, как можно провести перпендикуляр с помощью угольника и линейки через точку O к прямой AB при условии, что O не лежит на AB.

Теорема 2. К данной прямой через данную точку можно провести только один перпендикуляр.

66. Серединный перпендикуляр отрезка.

Определение. Прямую, проходящую через середину отрезка перпендикулярно ему, называют *серединным перпендикуляром* (рис. 2.302).

Свойства серединного перпендикуляра к отрезку:

— если точка равноудалена от концов отрезка, то она принадлежит серединному перпендикуляру этого отрезка;

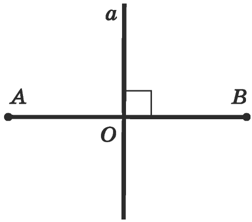


Рис. 2.302

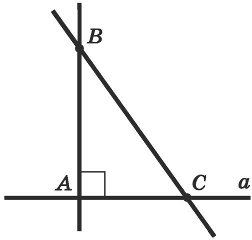


Рис. 2.303

— если точка принадлежит серединному перпендикуляру отрезка, то она равноудалена от его концов.

Можно доказать такую теорему.

Теорема 3. Множество точек плоскости, равноудаленных от концов отрезка, есть серединный перпендикуляр к этому отрезку.

67. Перпендикуляр и наклонная. Если есть точка и прямая, то по теореме 1 есть и плоскость, в которой они лежат, а значит, все рассуждения в данном случае будут связаны с той плоскостью, в которой лежат данные точка и прямая.

Пусть даны прямая a и точка B, не лежащая на этой прямой. BA — перпендикуляр, опущенный из точки B на прямую a, и C — любая точка прямой a, отличная от A. Отрезок BC называется *наклонной*, проведенной из точки B к прямой a (рис. 2.303). Точку C называют *основанием наклонной*.

В отличие от перпендикуляра наклонная образует с прямой, к которой она проведена, угол, отличный от 90°.

Можно доказать теорему.

Теорема 4. Расстояние от точки A до основания перпендикуляра, проведенного через нее к прямой

***a*, меньше, чем расстояние от *A* до любой другой точки прямой *a*.**

Иначе говоря, перпендикуляр BA короче, чем отрезок BC любой наклонной.

Есть еще одно понятие, которым часто пользуются в данной ситуации, — это *проекция точки на прямую*. Даны прямая a и точка A вне ее. Опустив перпендикуляр из точки A на прямую a, мы получим точку A_1 — основание перпендикуляра. Точка A_1 имеет еще одно название, ее называют *проекцией точки A на прямую a*.

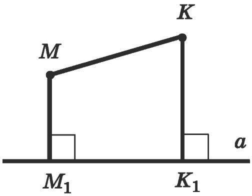


Рис. 2.304

Можно, пользуясь понятием проекции точки на прямую, определить и *проекцию фигуры на данную прямую*. Например, на рисунке 2.304 изображена проекция отрезка на прямую a. Проекция отрезка есть тоже отрезок M_1K_1, который состоит из всех проекций точек отрезка MK. Именно такие проекции нам в дальнейшем придется рассматривать.

Пример. Равные отрезки AD и CB, заключенные между параллельными прямыми AC и BD, пересекаются в точке O. Докажите, что $AO = CO$ и $BO = DO$.

Решение. Из условия задачи имеем:

1. $AD = CB$.
2. $AC \parallel BD$.
3. AD и CB пересекаются в точке O.

} дано (рис. 2.305)

4. $AO = CO$ и $BO = DO$ (требуется доказать).

Чтобы доказать п. 4, нужно доказать, что $\triangle AOC$ и $\triangle BOD$ — равнобедренные. Как это доказать?

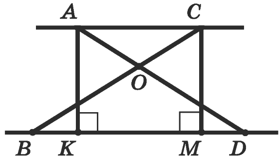


Рис. 2.305

5. Проведем из точек A и C перпендикуляры к прямой BD (построение) (рис. 2.305).

6. $AK = CM$ (5, свойство расстояний между параллельными прямыми).

7. $\triangle AKD = \triangle CMB$ (5, теорема 21, см. п. 23).

8. $\angle CBM = \angle ADK$ (7).

9. $\triangle BOD$ — равнобедренный (8, признак равнобедренного треугольника).

10. $BO = DO$ (9).

Аналогично можно доказать, что $AO = CO$.

68. Геометрическое место точек. В геометрии для описания некоторых геометрических фигур есть свое название — *геометрическое место точек*.

Определение. Геометрическим местом точек называют фигуру, которая состоит из всех точек плоскости, обладающих определенным свойством.

Например, окружность можно определить как геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки. Серединный перпендикуляр отрезка можно также определить как геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от концов этого отрезка.

В этих примерах говорится о геометрическом месте точек плоскости.

Геометрические места точек широко используются при решении геометрических задач на построение. Сущность метода геометрических мест, используемого при решении задач на построение, состоит в следующем.

Пусть для решения задачи на построение надо найти точку X, удовлетворяющую двум условиям. Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, есть некоторая фигура F_1, а геометрическое место точек, удовлетворяющих второму условию, есть некоторая фигура F_2. Искомая точка X принадлежит F_1 и F_2, т. е. является их точкой пересечения. Покажем работу этого метода на примере решения задачи.

Пример 1. Даны три точки: A, B, C. Постройте точку X, которая одинаково удалена от точек A и B и находится на данном расстоянии от точки C.

1. Нам даны три точки A, B, C (рис. 2.306).

2. Искомая точка X удовлетворяет двум условиям: 1) она одинаково удалена от точек A и B; 2) она находится на данном расстоянии от точки C. Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, есть серединный перпендикуляр отрезка AB (рис. 2.307).

3. Геометрическое место точек, удовлетворяющих второму условию, есть окружность данного радиуса с центром в точке C (рис. 2.308). Искомая точка X лежит на пересечении этих геометрических мест. В данном случае искомых точек две: X_1 и X_2.

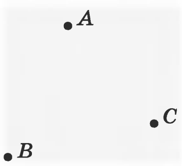


Рис. 2.306

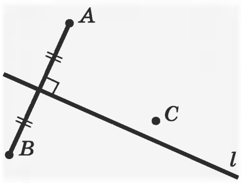


Рис. 2.307

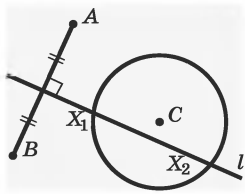


Рис. 2.308

Биссектриса угла также является очень важным и широко используемым геометрическим местом точек.

П р и м е р 2. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла и находящихся в его внутренней области.

Р е ш е н и е. А) Пусть точка принадлежит внутренней области угла и равноудалена от его сторон. Докажем, что эта точка принадлежит биссектрисе данного угла.

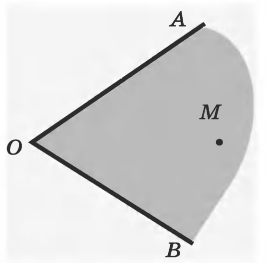


Рис. 2.309

1. Точка M принадлежит внутренней области угла AOB (рис. 2.309).

2. Проведем $MK \perp OA$, $MC \perp OB$, $MK = MC$ (рис. 2.310).

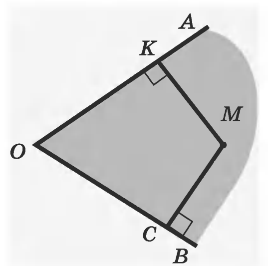


Рис. 2.310

3. OM — биссектриса угла AOB (требуется доказать).

У нас на чертеже нет луча OM, проведем его.

4. Соединим точки O и M (построение) (рис. 2.311).

Нам нужно доказать, что OM — биссектриса угла O или, что $\angle KOM = \angle COM$. Для этого рассмотрим $\triangle KOM$ и $\triangle COM$.

5. $\triangle OKM = \triangle COM$ (2, теорема 21, см. п. 23).

6. $\angle AOM = \angle COM$ (4).

7. OM — биссектриса угла AOB.

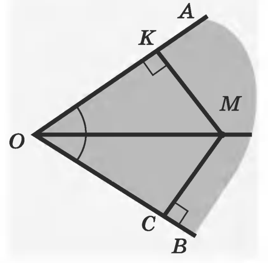


Рис. 2.311

Б) Пусть точка принадлежит биссектрисе данного угла.

Докажем, что эта точка равноудалена от сторон данного угла.

1. Пусть M — произвольная точка биссектрисы OM угла AOB (рис. 2.312) (дано).

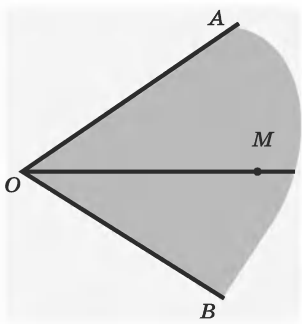


Рис. 2.312

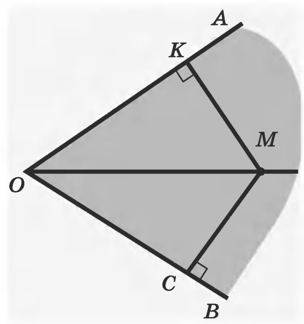


Рис. 2.313

2. $\angle AOM = \angle BOM$ (1).

3. Проведем MK и MC — перпендикуляры к сторонам угла AOB (рис. 2.313) (построение).

4. $\triangle OKM = \triangle OCM$ (1, 2, теорема 19, см. п. 23).

5. $MK = MC$. Точка M равноудалена от сторон угла (4).

Итак, геометрическим местом точек угла, равноудаленных от его сторон, является биссектриса этого угла.

§13. Параллельные прямые

69. Понятие параллельности прямых.

Определение. Прямые a и b называют *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

На рисунке 2.314 изображены две параллельные прямые a и b.

Прямые a и b параллельны, а значит, по определению, они лежат в одной плоскости или задают эту плоскость. На рисунке 2.315 показано, что прямые a и b задают плоскость α.

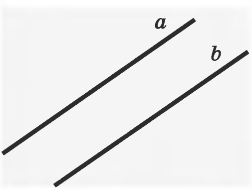


Рис. 2.314

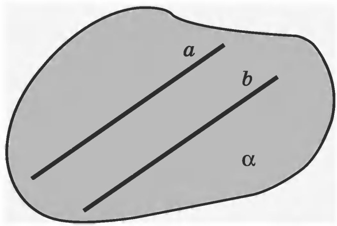


Рис. 2.315

Параллельность прямых обозначается знаком «$\|$». Запись $a \parallel b$ читается: «прямая a параллельна прямой b» или «прямые a и b параллельны».

Можно доказать теорему о центрально-симметричных прямых, которая будет первым признаком параллельности прямых.

Теорема 5. Если две прямые симметричны относительно некоторого центра, то они параллельны (рис. 2.316).

Следствие. Через любую точку, не принадлежащую данной прямой, проходит одна прямая, параллельная данной прямой.

Сформулированная теорема позволяет строить прямую, параллельную данной (отметим, что есть и другие способы построения параллельных прямых).

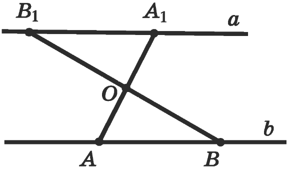


Рис. 2.316

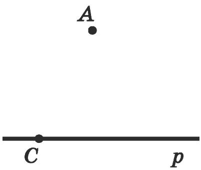


Рис. 2.317

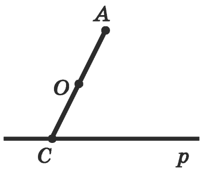


Рис. 2.318

Выполним это построение.

1. Пусть даны прямая p и точка A, $A \notin p$ (рис. 2.317).

Мы должны воспользоваться теоремой 5, а значит, построить прямую, центрально-симметричную прямой p и проходящую через точку A. Таким образом, первая проблема, которую надо решить, — это найти (построить) центр симметрии.

2. Определение центральной симметрии подсказывает ответ: возьмем произвольную точку C на прямой p, соединим ее с точкой A и найдем середину отрезка CA — точку O (рис. 2.318).

Как построить прямую, параллельную прямой p, зная, что точки A и C центрально-симметричны относительно точки O?

3. Построим еще одну пару центрально-симметричных точек относительно центра симметрии — точки O, одна из которых принадлежит прямой p. Пусть это будут точки B и B_1 (рис. 2.319).

4. Точки A и B_1 определяют прямую AB_1 (1, 3, аксиома 1).

5. AB_1 параллельна прямой p (4, теорема 5).

Перпендикулярность и параллельность прямых тесно связаны между собой.

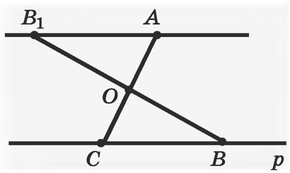


Рис. 2.319

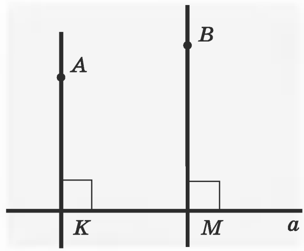


Рис. 2.320

Теорема 6. Если две прямые перпендикулярны одной и той же прямой, то эти прямые параллельны (рис. 2.320).

В условии теоремы имеются два перпендикуляра, проведенных к прямой, причем все эти фигуры лежат в одной плоскости. Представьте себе, что эти перпендикуляры и данная прямая не лежат в одной плоскости. На рисунке 2.321 дана прямая c и к ней из точек A и B в плоскостях α и β проведены перпендикуляры. В этом случае перпендикуляры

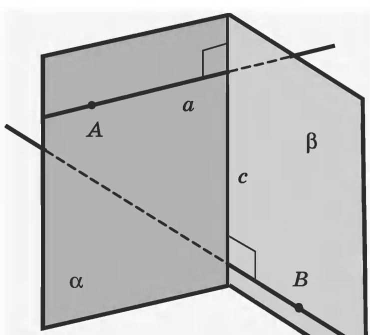


Рис. 2.321

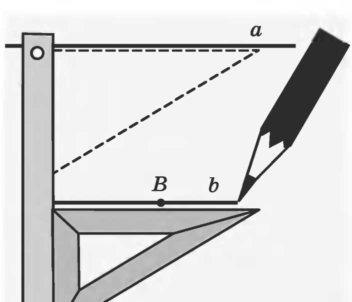


Рис. 2.322

не будут параллельны, так как они не лежат в одной плоскости. Таким образом, мы сформулировали *признак параллельности прямых* для плоскости, т. е. для случая, когда прямая a и перпендикуляры к ней лежат в одной плоскости.

На рисунке 2.322 показано, как с помощью угольника и линейки можно провести через данную точку B прямую b, параллельную данной прямой a.

70. Аксиома параллельных.

В великой книге Евклида «Начала» (III в. до н. э.) геометрия излагалась в строго систематическом виде. В основу этого изложения была положена четко оговоренная система первоначальных утверждений — аксиом, которые не доказывались. Все остальные утверждения — теоремы — выводились из них строго логически. Среди аксиом выделялась аксиома о параллельных — пятый постулат Евклида.

Аксиома 4 (*аксиома параллельных*). Через любую точку, не лежащую на данной прямой, проходит одна и только одна прямая, параллельная данной.

Применяя эту аксиому, можно доказать много различных теорем.

Теорема 7. Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

Верна ли эта теорема для любого расположения указанных прямых в пространстве? Нет, не верна. На рисунке 2.323 прямая c не пересекает прямую b.

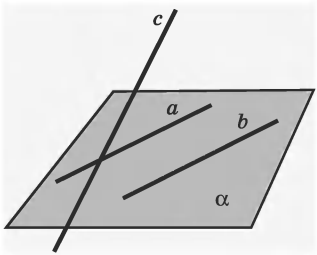


Рис. 2.323

Таким образом, теорема 7 верна для плоского случая, когда все указанные в формулировке теоремы прямые лежат в одной плоскости.

В пункте 67 мы рассматривали случаи, когда из некоторой точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонная, и сформулировали теорему 4 о том, что в этом случае перпендикуляр всегда короче наклонной. Теперь можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 8. Перпендикуляр и наклонная к одной и той же прямой пересекаются.

Теорема 9. Если прямые a и b параллельны прямой c, то прямые a и b параллельны.

Важность этого свойства можно продемонстрировать на примере устройства нотного стана (рис. 2.324). Все линии нотного стана параллельны между собой именно в силу свойства транзитивности параллельных прямых.

Верна эта теорема для произвольно расположенных прямых в пространстве?

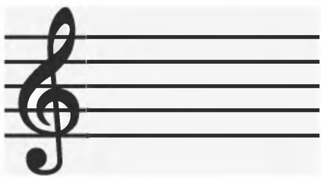


Рис. 2.324

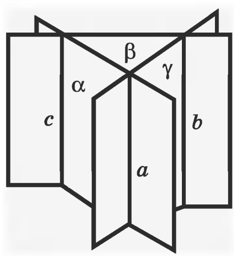


Рис. 2.325

Да, верна. На рисунке 2.325 изображено расположение прямых a, b, c в пространстве, когда параллельные прямые a и c лежат в плоскости α, а параллельные прямые b и c — в плоскости β, т. е. $a \parallel c$ и $b \parallel c$.

Свойство транзитивности утверждает, что $a \parallel b$. И действительно, видим, что $a \parallel b$ и эти прямые лежат в плоскости γ.

П р и м е р. Докажем для примера использования аксиомы параллельных теорему 9 (транзитивность параллельности прямых).

Р е ш е н и е. Из условия теоремы имеем:

1. $a \parallel c$, $b \parallel c$ (дано, рис. 2.326).

2. $a \parallel b$ (требуется доказать).

При доказательстве этой теоремы воспользуемся методом доказательства от противного.

3. Допустим противное: прямые a и b непараллельны, т. е. пересекаются в некоторой точке P (предположение) (рис. 2.327).

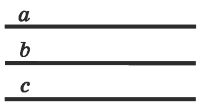


Рис. 2.326

Рис. 2.327

4. Через точку P будут проходить две прямые a и b, параллельные прямой c (1, 3).

5. П. 4 противоречит аксиоме параллельных, и, следовательно, наше предположение 3 неверно. Поэтому $a \parallel b$.

71. Пересечение двух прямых секущей.

Пусть AB и CD — две прямые, MK — третья прямая, пересекающая AB и CD (рис. 2.328). Прямую MK по отношению к прямым AB и CD называют *секущей*.

Пары углов, которые образуются при пересечении прямых AB и CD секущей MK, имеют специальные названия.

Определение. Если точки B и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC, то углы BAC и DCA называют *внутренними односторонними* (рис. 2.329).

Определение. Если точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC, то углы BAC и DCA называются *внутренними накрест лежащими* (рис. 2.330).

Таким образом, при пересечении прямых a и b секущей c образуется восемь углов, которые на рисунке 2.331 обозначены цифрами. В соответст-

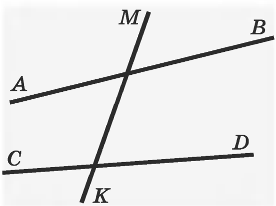


Рис. 2.328

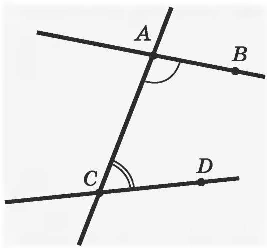


Рис. 2.329

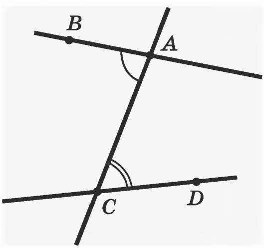


Рис. 2.330

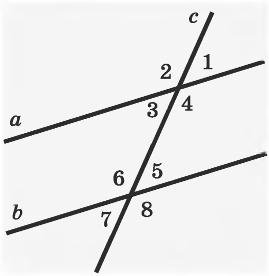


Рис. 2.331

вии с введенными выше названиями мы имеем: внутренние накрест лежащие углы — 3 и 5, 4 и 6, внутренние односторонние углы — 4 и 5, 3 и 6.

Внутренние накрест лежащие углы одной пары, например 3 и 5, являются смежными для внутренних накрест лежащих углов другой пары: 4 и 6 (рис. 2.331). Поэтому если внутренние накрест лежащие углы одной пары равны, то внутренние накрест лежащие углы другой пары тоже равны.

Пары внутренних накрест лежащих углов и внутренних односторонних, например 3 и 5, 4 и 5, имеют один общий угол 5, а два других угла — смежные 3 и 4. Поэтому если внутренние накрест лежащие углы равны, то сумма внутренних односторонних углов равна 180°. И обратно: если сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то внутренние накрест лежащие углы равны.

Можно доказать такие свойства секущих.

Теорема 10. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то внутренние накрест лежащие углы равны.

Теорема 11. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°.

Можно также доказать следующие *признаки параллельности двух прямых*.

Теорема 12. Если при пересечении двух прямых секущей внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

Теорема 13. Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

П р и м е р. Прямые a и b параллельны, а прямая c пересекает их (рис. 2.332). Докажем, что $\angle 7 + \angle 1 = 180°$.

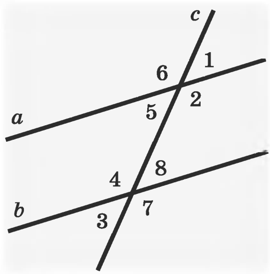


Рис. 2.332

Р е ш е н и е. Из условия задачи имеем:

1. $a \parallel b$ и c — секущая (дано, рис. 2.332).
2. $\angle 7 + \angle 1 = 180°$ (требуется доказать).
3. $\angle 7 = \angle 4$ (1, теорема о равенстве вертикальных углов).
4. $\angle 4 = \angle 2$ (1, теорема 10).
5. $\angle 2 + \angle 1 = 180°$ (1, определение смежных углов).
6. $\angle 7 + \angle 1 = 180°$ (1, 3, 4, 5).

72. Неевклидова геометрия. Проблема параллельных прямых уходит своими корнями в историю Древнего Египта и античную Грецию. Постепенно отрывочные, опытные, на глаз установленные факты здесь начинают превращаться в цепь связанных между собой предложений; каждое из них занимает в этой цепи определенное место и логически вытекает из предыдущих.

Применительно к геометрии этот замысел был выполнен Евклидом, создавшим первый в истории свод геометрических знаний в 13 книгах — «Начала».

Евклид (365—около 300 до н. э.) работал в Александрии при Птоломее I и возглавлял основанный в то время крупнейший научный центр древности — Александрийский музей.

Геометры в течение двух тысяч лет, относясь к «Началам» Евклида с большим уважением, подвергали их критике, указывали на те или иные недостатки и рекомендовали способы «очищения Евклида от пятен». Прежде всего критика относилась к пятому постулату (аксиоме параллельных), значительно более сложному, чем все остальные.

Многим математикам, работавшим после Евклида, аксиома параллельных в том или ином виде казалось с наглядной точки зрения недостаточно убедительной. Сам Евклид доказывал целый ряд теорем, не опираясь на пятый постулат. Особая роль пятого постулата, его сложность и недостаточная наглядность привели к тому, что математики более поздних времен стали пытаться доказать его как теорему.

Многие попытки доказательства проводились методом доказательства от противного, т. е. предполагалось, что пятый постулат неверен, и из этого делался ряд выводов. Если бы при этом удалось прийти к противоречию, то пятый постулат был бы доказан.

Но противоречия никак не удавалось обнаружить. Вместо этого получалась длинная цепь предположений, часто отличная от тех, которые имеются в евклидовой геометрии, но которые тем не менее складывались в стройную теорию.

Примерно в одно время три математика в разных странах мира пришли так или иначе к одной идее — созданию новой неевклидовой геометрии. Это были Карл Фридрих Гаусс, Янош Больяи и Николай Иванович Лобачевский.

Николай Иванович Лобачевский (1792—1856), русский математик, отличался силой воли, смелостью и упорством. Ему было всего 30 лет, когда он сформулировал свои результаты, и 31 год, когда он их опубликовал. Результаты, полученные Н. И. Лобачевским, не были признаны в то время. Его относили к разряду ученых, проводивших «сумасшедшие» исследования по «сумасшедшей» геометрии. Позднее он получил признание, пришедшее от Гаусса.

Великий наш соотечественник Н. И. Лобачевский построил геометрию, в которой все аксиомы Евклида выполняются, кроме одной — аксиомы параллельных.

Что же такое геометрия Лобачевского? Это геометрия, полученная из геометрии Евклида изменением только одной аксиомы параллельных. Именно у Лобачевского принимается за аксиому, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, параллельные данной (т. е. лежащие с ней в одной плоскости и ее не пересекающие).

Теоремы, которые выводятся из новой системы аксиом, и образуют *геометрию Лобачевского*. Трудность, однако, в том, что аксиома Лобачевского не соответствует нашему наглядному представлению. Поэтому и многие выводы геометрии Лобачевского оказываются довольно странными.

Сам Н. И. Лобачевский называл свою геометрию *воображаемой*.

§14. Скрещивающиеся прямые

73. Понятие скрещивающихся прямых.

Кроме пересекающихся и параллельных прямых существуют прямые, которые не лежат в одной плоскости и не имеют общих точек. Такие прямые называют *скрещивающимися*.

Определение. Две прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости, называют *скрещивающимися* прямыми.

Можно получить модели скрещивающихся прямых (например, прямые, изображенные на рис. 2.333). Ясно, что через эти прямые нельзя провести плоскость.

Точно так же, если взять две дощечки, поместить их параллельно друг другу и затем на одну из них положить палочку в направлении, например, с юга на север, а на другую — в направлении с запада на восток, эти две палочки образуют модель скрещивающихся прямых (рис. 2.334).

Проведем такие построения:

1) построим плоскость α и возьмем на ней прямую a и точку A, не принадлежащую прямой a (рис. 2.335);

2) отметим в пространстве точку B, не принадлежащую плоскости α (рис. 2.336);

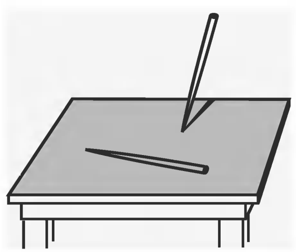


Рис. 2.333

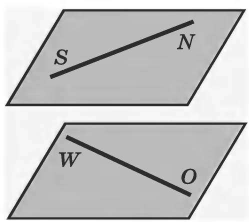


Рис. 2.334

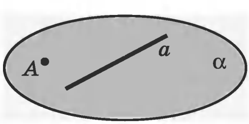


Рис. 2.335

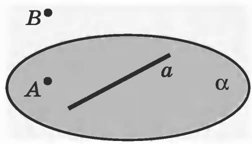


Рис. 2.336

3) через точки A и B на основании аксиомы 1 проведем единственную прямую AB (рис. 2.337).

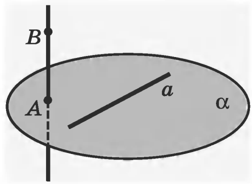


Рис. 2.337

Мы утверждаем, что прямые a и AB являются скрещивающимися. Для доказательства этого следует проверить, что прямые a и AB не лежат обе ни в какой плоскости.

Сформулируем теорему, которая является *признаком скрещивающихся прямых*.

Теорема 14. Если одна из прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то данные прямые скрещиваются.

Для обозначения скрещивающихся прямых a и b применяется запись «$a - b$».

На рисунке 2.338 изображена каркасная модель четырехугольной пирамиды, на которой выделены ребро a и скрещивающиеся с ним ребра b и c. Обратите внимание на то, что две прямые, скрещивающиеся с a, могут пересекаться или быть параллельными. Это видно на рисунке 2.338 (на рисунке изображены не прямые, а их отрезки).

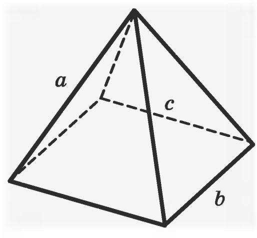


Рис. 2.338

П р и м е р. Докажите, что через две скрещивающиеся прямые можно провести параллельные плоскости.

Р е ш е н и е. Из условия задачи имеем:

1. a и b — скрещивающиеся прямые (дано, рис. 2.339).

2. Через a и b можно провести две параллельные плоскости (требуется доказать).

3. Через произвольную точку прямой a (точку A) проведем прямую b', параллельную b, а через произвольную точку (точку B) прямой b — прямую a', параллельную a (построение) (рис. 2.340).

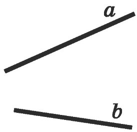


Рис. 2.339

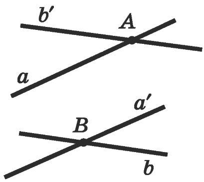


Рис. 2.340

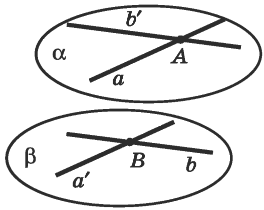


Рис. 2.341

4. Проведем две плоскости: одну через прямые a и b' (плоскость α), а другую через прямые b и a' (плоскость β) (построение) (рис. 2.341).

5. Плоскости a и b параллельны (3, 4, т. 8, см. п. 86).

74. Угол между скрещивающимися прямыми. Для скрещивающихся прямых вводится понятие *угла между скрещивающимися прямыми*.

Пусть a и b — две скрещивающиеся прямые (рис. 2.342). Выберем в пространстве произвольную точку A (пусть точка A не принадлежит этим прямым) и проведем через нее прямые a_1 и b_1, параллельные соответственно a и b (рис. 2.343) (построение). Получим угол α, который и назовем *углом между скрещивающимися прямыми a и b*.

Определение. *Углом* между скрещивающимися прямыми называется угол между любыми пересе-

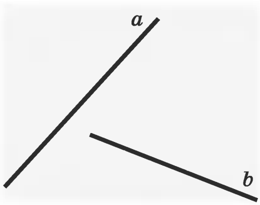


Рис. 2.342

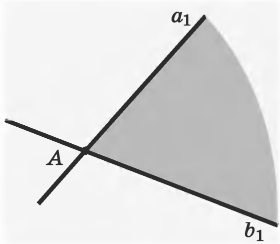


Рис. 2.343

кающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся прямым.

Представьте себе, что прямую a на рисунке 2.344 переместили параллельно самой себе. Изменится ли при этом угол между данными скрещивающимися прямыми? Не изменится и не станет другим, изменятся расстояния между точками этих прямых. Отсюда следует, что угол α еще не определяет полностью взаимного расположения скрещивающихся прямых a и b.

75. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

Определение. *Расстоянием* между скрещивающимися прямыми называют длину их *общего перпендикуляра AB* (рис. 2.345).

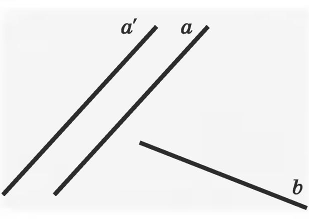


Рис. 2.344

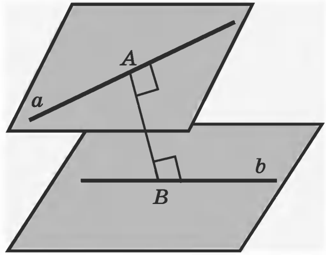


Рис. 2.345

При решении задач на вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми полезно различать два случая:

а) скрещивающиеся прямые перпендикулярны;

б) скрещивающиеся прямые не перпендикулярны.

Рассмотрим случай, когда скрещивающиеся прямые a и b перпендикулярны (рис. 2.346).

Нужно построить общий перпендикуляр к этим прямым, а для этого прежде всего нужна плоскость, в которой этот перпендикуляр можно провести.

1. Через одну из скрещивающихся прямых — a проведем плоскость α, перпендикулярную к другой прямой b (построение) (рис. 2.347).

2. Из точки O пересечения плоскости α и прямой b надо опустить перпендикуляр ON на прямую a, ON — искомое расстояние (рис. 2.348).

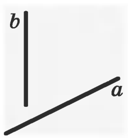


Рис. 2.346

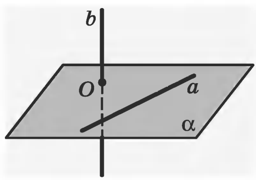


Рис. 2.347

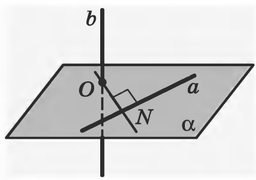


Рис. 2.348

Теперь рассмотрим случай, когда скрещивающиеся прямые не перпендикулярны между собой.

1. Мы имеем две произвольно расположенные скрещивающиеся прямые a и b (рис. 2.349).

2. Через прямую b проводим плоскость α, параллельную прямой a (рис. 2.350).

3. Отметим на прямой a произвольную точку M и опустим из нее перпендикуляр MN на плоскость α (рис. 2.351).

4. Проведем в плоскости α прямую ON, параллельную прямой a (рис. 2.352).

5. Построим отрезок OO_1, параллельный прямой MN (рис. 2.352).

6. Длина отрезка OO_1, равного длине отрезка MN, является искомым расстоянием между скрещивающимися прямыми.

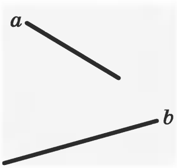


Рис. 2.349

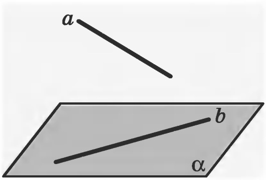


Рис. 2.350

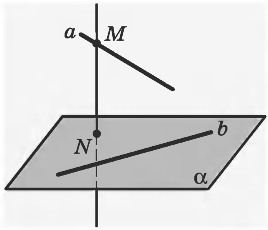


Рис. 2.351

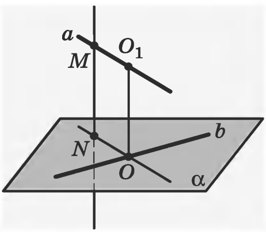


Рис. 2.352

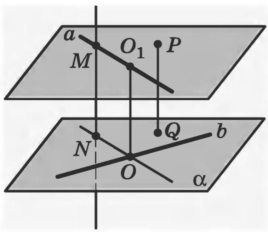


Рис. 2.353

7. Если мы проведем через прямую b плоскость β, параллельную α, то отрезок OO_1 будет равен расстоянию от любой точки P на одной плоскости до ее проекции Q на другую плоскость (рис. 2.353).

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

§15. Перпендикулярность прямой и плоскости

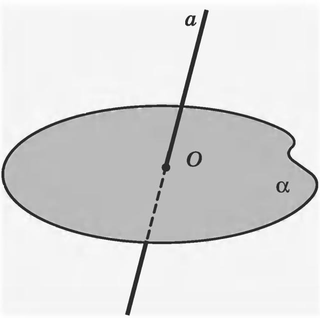


Рис. 2.354

76. Пересекающиеся прямые и плоскости. Прямая и плоскость могут иметь только одну общую точку, в этом случае говорят, что прямая и плоскость пересекаются (рис. 2.354).

Определение. Прямую и плоскость называют *пересекающимися*, если они имеют только одну общую точку.

На рисунке 2.354 показана плоскость α и прямая a. Эти фигуры имеют только одну общую точку O. По определению эти прямую и плоскость называют пересекающимися.

Возможна такая запись: $a \cap \alpha = O$. Она читается так: прямая a и плоскость α пересекаются в точке O.

Вокруг нас много примеров пересекающихся прямых и плоскостей: каждый телеграфный столб пересекает поверхность земли только в одной точке (при этом он может стоять вертикально или наклонно к поверхности земли), ствол дерева также может служить представлением о пересечении прямой и плоскости и т. д.

П р и м е р. Дана плоскость α. Докажите, что существует прямая, не лежащая в плоскости α и пересекающая ее.

Р е ш е н и е. Из условия задачи имеем:

1. Плоскость α (дано) (рис. 2.355).

2. Требуется доказать, что существует прямая a, не лежащая в плоскости α и пересекающая ее.

3. Возьмем в плоскости α точку A и точку B, которая плоскости α не принадлежит (построение) (рис. 2.356).

4. Через точки A и B проходит прямая AB (рис. 2.357) (2, аксиома 1).

5. Прямая AB не лежит в плоскости α и пересекает ее (1, 4).

Рис. 2.355

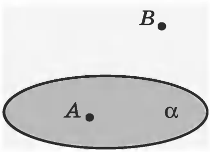


Рис. 2.356

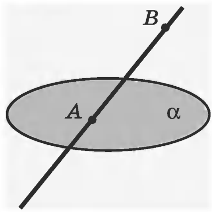


Рис. 2.357

77. Перпендикулярность прямой и плоскости.

Определение. Если прямая пересекает плоскость и перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости и проходящей через точку пересечения, то прямую называют *перпендикулярной* плоскости.

На рисунке 2.358 прямая a пересекает плоскость α в точке O и образует прямые углы с любой прямой, лежащей в плоскости α и проходящей через точку O. Согласно определению прямая a перпендикулярна плоскости α.

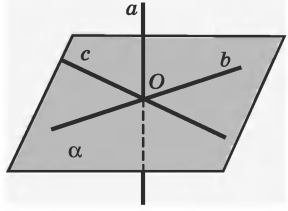


Рис. 2.358

Запись «$a \perp \alpha$» читается: прямая a перпендикулярна плоскости α. Говорят также, что плоскость перпендикулярна прямой или что прямая и плоскость взаимно перпендикулярны.

Имеет место признак перпендикулярности прямой и плоскости, который иногда называют *теоремой о двух перпендикулярах*.

Теорема 1. Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум прямым, лежащим в этой плоскости и проходящим через точку пересечения данной прямой и плоскости, то она перпендикулярна плоскости.

На рисунке 2.358 прямая a пересекает плоскость α в точке O и перпендикулярна двум прямым b и c, лежащим в плоскости α и проходящим через точку O. По теореме 1 прямая a будет перпендикулярна плоскости α.

В геометрии различают понятия *прямой, перпендикулярной к плоскости* и *перпендикуляра к плоскости*.

Определение. *Перпендикуляром*, опущенным из данной точки на данную плоскость, называют отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной к плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называют *основанием перпендикуляра*.

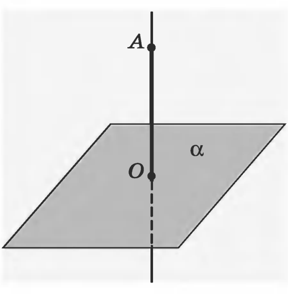


Рис. 2.359

На рисунке 2.359 прямая AO перпендикулярна плоскости α, а отрезок AO является перпендикуляром к плоскости α, проведенным из точки A.

Определение. Расстоянием от точки до плоскости называют длину перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

78. Параллельность и перпендикулярность прямых, проведенных к плоскости. Отдельно следует выделить взаимосвязи свойств параллельности и перпендикулярности прямых, проведенных к плоскости.

Теорема 2. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

Справедлива и обратная теорема.

Теорема 3. Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.

Пример. Докажем теорему 3.

Доказательство. Из условия теоремы имеем:

$$\left.\begin{array}{l}1.\ AB \perp \alpha.\\ 2.\ CD \perp \alpha.\end{array}\right\}\ \text{дано (рис. 2.360)}$$

3. $AB \parallel CD$ (требуется доказать).

Для доказательства того, что $AB \parallel CD$, используем метод доказательства от противного.

4. Предположим противное пункту 3, т. е. что прямые AB и CD не параллельны (предположение).

5. Проведем через точку D прямую C_1D, параллельную AB, $C_1D \parallel AB$ (построение) (рис. 2.361).

6. $C_1D \perp \alpha$ (5).

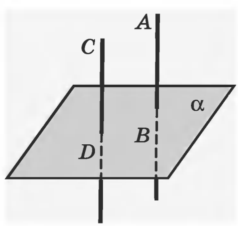


Рис. 2.360

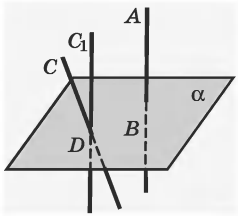


Рис. 2.361

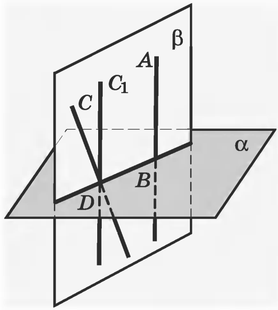


Рис. 2.362

На рисунке 2.362 у нас образовались две пересекающиеся прямые, которые, как известно, определяют плоскость.

7. Через прямые CD и C_1D проведем плоскость β (5) (рис. 2.362).

8. Плоскости α и β имеют общую точку D и пересекутся по прямой DB (7, аксиома 5).

9. $CD \perp DB$ (2, 8, определение перпендикулярности прямой и плоскости).

10. Через точку D прямой DB в плоскости β проведено два перпендикуляра к этой прямой (6, 9).

11. П. 10 противоречит теореме о единственности перпендикуляра. Значит, предположение 4 не верно и $AB \parallel CD$.

79. Наклонные к плоскости. Кроме перпендикуляра к плоскости рассматривают *наклонные к плоскости*.

Определение. *Наклонной*, проведенной из данной точки к данной плоскости, называют любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и не являющийся перпендикуляром к этой плоскости. Конец отрезка, лежащий в плоскости, называют *основанием наклонной*.

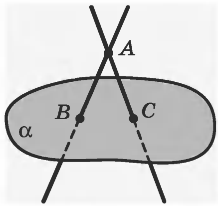


Рис. 2.363

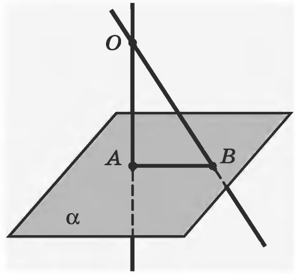


Рис. 2.364

На рисунке 2.363 к плоскости α проведены из точки A две наклонные AB и AC. Иногда отрезки AC и AB также называют *наклонными к плоскости*.

Определение. Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называют *проекцией наклонной*.

На рисунке 2.364 из точки O проведены к плоскости α перпендикуляр OA и наклонная OB. Точка A — основание перпендикуляра, точка B — основание наклонной, AB — проекция наклонной OB на плоскость α.

Можно доказать следующие *свойства перпендикуляра и наклонной*.

Теорема 4. Перпендикуляр короче всякой наклонной, проведенной из той же точки. Всякая наклонная больше своей проекции.

Верна обратная теорема.

Теорема 5. Если из точки S, лежащей вне плоскости α, проведены отрезки SA, SB, SC, ... во все точки плоскости α и SH — кратчайший из них, то SH — перпендикуляр к плоскости.

Теорема 6. Чем больше проекция, тем больше наклонная; если равны проекции, то равны и наклонные.

Теорема 7. Чем больше наклонная, тем больше проекция; если наклонные равны, то и проекции равны.

Наконец, имеет место одна из самых важных теорем геометрии.

Теорема 8 *(теорема о трех перпендикулярах)*. **Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна и самой наклонной.**

Здесь слова «перпендикуляр», «наклонная», «проекция» обозначают не отрезки, а прямые, на которых они лежат. Однако различие это несущественно, поскольку речь идет лишь об их взаимной перпендикулярности.

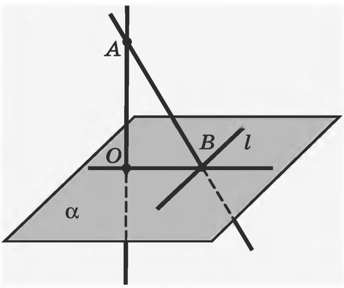


Рис. 2.365

На рисунке 2.365 из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AO и наклонная AB. Прямая l перпендикулярна OB — проекции наклонной AO на плоскость α. Значит, по теореме 8, она будет перпендикулярна и наклонной AB.

80. Угол между прямой и плоскостью. Если прямая параллельна плоскости, то угол между этой прямой и плоскостью равен 0°. Угол между прямой, перпендикулярной плоскости, и этой плоскостью равен 90°.

На рисунке 2.366 изображена прямая AB, пересекающая плоскость в точке B.

Проведем через точку B прямые BC и BD, лежащие в плоскости α (рис. 2.367). Можно ли считать, что $\angle ABC$ или $\angle ABD$ являются углом между прямой AB и плоскостью α? Нет. Можно дать такое определение *угла между прямой и плоскостью*.

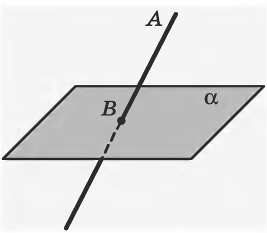


Рис. 2.366

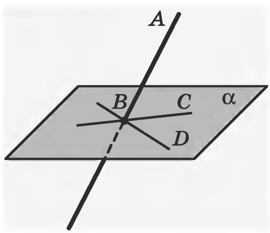


Рис. 2.367

Определение. Углом между прямой и плоскостью называют угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

На рисунке 2.368 мы имеем прямую AB, пересекающую плоскость β, AO — перпендикуляр к плоскости β, $\angle\alpha$ — угол между прямой AB и плоскостью β.

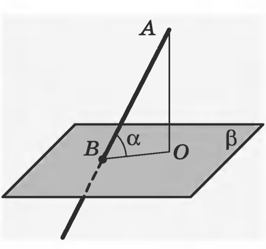


Рис. 2.368

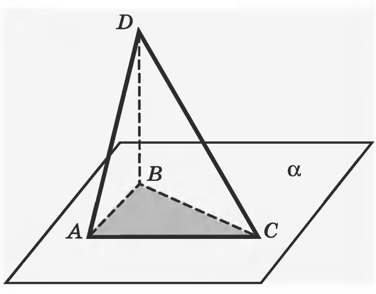


Рис. 2.369

Пример. Катеты прямоугольного треугольника ABC равны 15 и 20 м. Из вершины прямого угла B проведен к плоскости этого треугольника перпендикуляр $BD = 35$ м (рис. 2.369). Найдите расстояние от точки D до гипотенузы AC.

Решение. Из условия задачи имеем:

1. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle B = 90°$, $AB = 15$ м, $CB = 20$ м.
2. $DB \perp \alpha$, $DB = 35$ м.

дано (рис. 2.369)

3. Найдите расстояние от точки D до гипотенузы AC.

Нам нужно найти расстояние от точки A до гипотенузы AC. Однако это не отражено на рисунке 2.369.

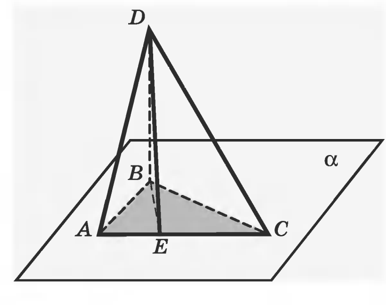


Рис. 2.370

4. Проведем $DE \perp AC$, DE есть искомое расстояние (построение) (рис. 2.370). DE можно найти из какого-то треугольника. Мы знаем BD, а значит, можно построить $\triangle BDE$ и из него найти DE.

5. Соединим точки B и E и получим $\triangle BDE$ (построение).

6. DB — перпендикуляр к α, DE — наклонная к α, значит, BE — проекция наклонной (4, 5, определение проекции).

7. $DE \perp AC$, значит, $BE \perp AC$ (4, 5, 6, теорема о трех перпендикулярах).

8. Из $\triangle ABC$ находим

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} =$$

$$= \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625},$$

т. е. 25 м (1, теорема Пифагора).

9. $S_{\triangle ABC} = \dfrac{AB \cdot CB}{2} = 150$ м (1, формула площади прямоугольного треугольника).

10. $S_{\triangle ABC} = \dfrac{AC \cdot BE}{2} = 150$ м (9, формула площади треугольника).

11. $BE = \dfrac{2S_{\Delta ABC}}{AC}$, т. е. $BE = 12$ м (9, 10).

12. Из $\triangle DBE$ находим $DE = \sqrt{DB^2 + BE^2}$, т. е. $DE = 37$ м (6, 11, теорема Пифагора).

§16. Параллельность прямой и плоскости

81. Понятие параллельности прямой и плоскости. Часто приходится рассматривать прямую, лежащую в плоскости. В этом случае все точки прямой принадлежат плоскости. Но есть случаи, когда прямая и плоскость не имеют общих точек.

Определение. Плоскость и прямую, не лежащую в этой плоскости, называют *параллельными*, если они не имеют общих точек.

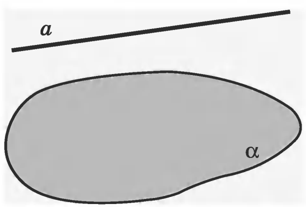


Рис. 2.371

На рисунке 2.371 изображены такие прямая и плоскость.

Примеры параллельности прямой и плоскости: каменщики кладут стену под отвес (рис. 2.372), шнур которого параллелен плоскости стены; если подводная лодка идет прямолинейно на одной глубине, значит, она идет параллельно поверхности моря.

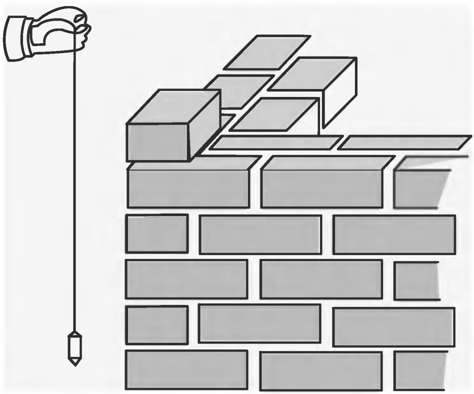


Рис. 2.372

Параллельность прямой и плоскости записывается так: $a \parallel \alpha$. Читаем: прямая a параллельна плоскости α.

Имеет место *признак параллельности прямой и плоскости*.

Теорема 9. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, расположенной в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости.

На рисунке 2.373 прямая a параллельна прямой b, лежащей в плоскости α, на основании теоремы 9 прямая a параллельна плоскости α.

Из теоремы вытекает существование параллельных прямой и плоскости, а точнее — способ построения прямой, параллельной данной плоскости:

1. Нам дана плоскость α (рис. 2.374).
2. Проведем в плоскости α прямую b, $b \subset \alpha$.

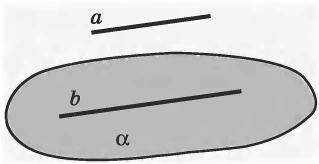


Рис. 2.373

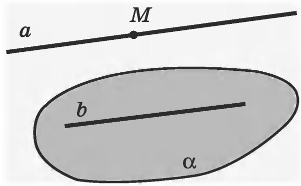


Рис. 2.374

3. Возьмем любую точку M, не принадлежащую α, $M \notin \alpha$.

4. Проведем через точку M прямую a, параллельную прямой b, $a \parallel b$.

В результате мы получим согласно теореме 9 прямую a, параллельную плоскости α.

Имеет место такая теорема.

Теорема 10. Если прямая параллельна плоскости, то она параллельна некоторой прямой на этой плоскости.

Из теоремы 10 можно получить следующее следствие.

Следствие. Если из двух параллельных прямых одна пересекает плоскость, то и другая пересекает эту плоскость; если из двух параллельных прямых одна параллельна плоскости или лежит в ней, то и другая параллельна этой плоскости или лежит в ней.

Короче: параллельные прямые или *обе* пересекают плоскость, или *обе* не пересекают ее (рис. 2.375).

Можно сформулировать еще один признак параллельности прямой и плоскости.

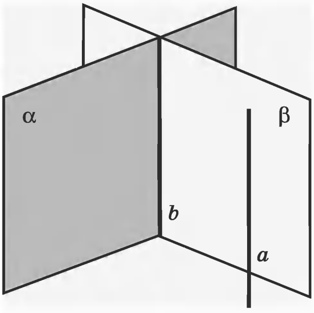


Рис. 2.375

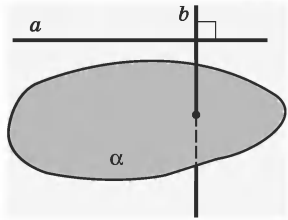


Рис. 2.376

Теорема 11. **Если прямая и плоскость перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны (рис. 2.376).**

Можно доказать следующую теорему.

Теорема 12. **Все точки прямой, параллельной плоскости, одинаково удалены от этой плоскости (рис. 2.377).**

Пример. Через вершину прямого угла C прямоугольного треугольника ABC параллельно гипотенузе на расстоянии 10 см от нее проведена плоскость. Проекции катетов на эту плоскость равны 30 и 50 см. Найдите проекцию гипотенузы на эту же плоскость.

Решение. Из условия задачи имеем:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ ABC \text{ — прямоугольный} \\ \text{треугольник, } \angle C = 90^\circ. \\ 2.\ AB \parallel \alpha. \\ 3.\ BB_1 \perp \alpha,\ AA_1 \perp \alpha, \\ BB_1 = AA_1 = 10 \text{ см}. \\ 4.\ B_1C = 30 \text{ см}. \\ 5.\ A_1C = 50 \text{ см}. \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{дано} \\ \text{(рис. 2.378)}\end{array}$$

6. $A_1B_1 = ?$ (требуется найти).

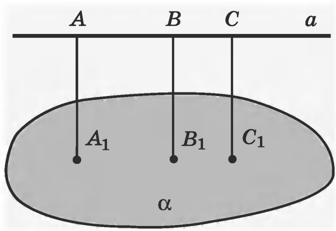


Рис. 2.377

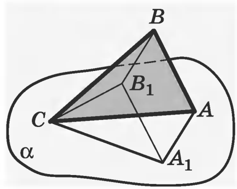


Рис. 2.378

7. Из прямоугольных треугольников BB_1C и AA_1C находим: $BC = \sqrt{10^2 + 30^2} = \sqrt{1000}$; $AC = \sqrt{10^2 + 50^2} = \sqrt{2600}$ (3, 4, 5, теорема Пифагора).

8. Из треугольника ABC находим:

$AB = \sqrt{1000 + 2600} = 60$ (1, 7, теорема Пифагора).

9. $AB = A_1B_1$ (2, 3, теорема о равенстве параллельных отрезков, лежащих между параллельными прямыми).

10. $AB = 60$ см (8, 9).

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ

§17. Пересекающиеся плоскости

82. Понятие пересекающихся плоскостей.

Определение. Плоскости, которые имеют хотя бы одну общую точку, называют *пересекающимися*.

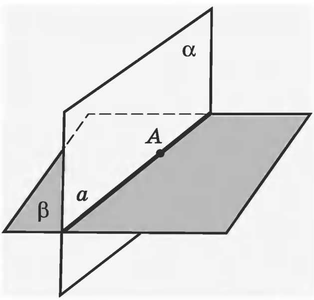


Рис. 2.379

Аксиома 5. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

При этом если какая-либо точка принадлежит обеим плоскостям, то она принадлежит прямой a. Плоскости α и β в этом случае являются *пересекающимися* по прямой a (рис. 2.379).

Пример. Дана плоскость α. Доказать, что существует другая плоскость β, пересекающая α.

Решение. Из условия задачи имеем:

1. Плоскость α (дано) (рис. 2.380).

2. Нужно доказать, что существует другая плоскость β, пересекающая α.

Мы знаем, что на основании аксиомы 3 (аксиомы плоскости) три точки определяют единственную плоскость.

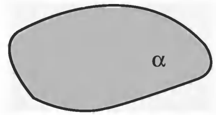


Рис. 2.380

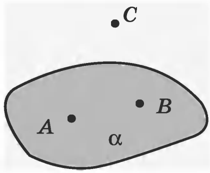


Рис. 2.381

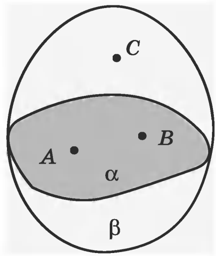


Рис. 2.382

3. Возьмем точки A и B, принадлежащие плоскости α, и точку C, не лежащую на прямой AB и не принадлежащую α (построение) (рис. 2.381).

4. Точки A, B и C не лежат на одной прямой. Через них можно провести плоскость β, и притом только одну (3, аксиома 3).

5. Плоскости α и β имеют общую точку (1, 3, 4).

6. Плоскости α и β пересекаются по прямой AB (5, аксиома 5) (рис. 2.382).

7. Мы доказали, что существует плоскость β, пересекающая α. (6)

Замечание. Если допустить, что точка C лежит на прямой AB, то она будет лежать и в плоскости α, что противоречит выбору точки C.

83. Двугранные углы.

При пересечении плоскостей образуются *двугранные углы*.

Определение. Фигуру, образованную двумя полуплоскостями, исходящими из одной прямой, называют *двугранным углом*. Прямую называют *реб-*

ром, а полуплоскости — сторонами или *гранями* двугранного угла.

На рисунке 2.383 изображен двугранный угол с ребром AB.

Этот угол можно обозначать двумя буквами, поставленными у его ребра (двугранный угол AB). Но если при одном ребре лежит несколько двугранных углов, то каждый из них обозначают четырьмя буквами, из которых две средние стоят при ребре, одна крайняя — у одной грани, другая — у другой (рис. 2.384).

Определение. Если через произвольную точку ребра двугранного угла провести плоскость, перпендикулярную ребру, то в пересечении этой плоскости с двугранным углом образуется угол, который называют *линейным углом двугранного угла*.

На рисунке 2.385 изображен линейный угол AOB двугранного угла $AOCB$. Вершиной линейного угла служит точка O, лежащая на ребре OC двугранного угла, а сторонами — лучи граней, исходящие из точки O и перпендикулярные ребру двугранного угла.

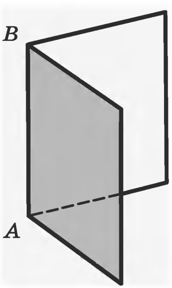


Рис. 2.383

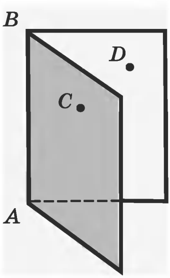


Рис. 2.384

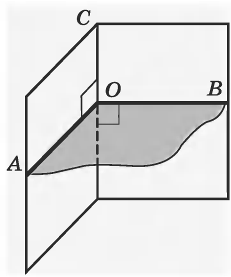


Рис. 2.385

Двугранный угол имеет бесконечное множество линейных углов (рис. 2.386).

Определение. *Градусной мерой* двугранного угла называют градусную меру любого из его линейных углов.

Определение. *Двугранный угол* называется *прямым* (острым, тупым), если его градусная мера равна 90° (меньше 90°, больше 90°).

Можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. Все линейные углы двугранного угла равны друг другу.

Для двугранных углов так же, как и для плоских, вводится понятие его градусной меры — величины.

Определение. Два двугранных угла называют *равными*, если они имеют одну и ту же градусную меру.

Если градусная мера одного из двугранных углов больше градусной меры другого, то говорят, что первый двугранный угол *больше* второго, а второй *меньше* первого. На рисунке 2.387 изображены три двугранных угла с общим ребром AB. Двугранные углы $CABD$ и $DABE$ равны, так как их градус-

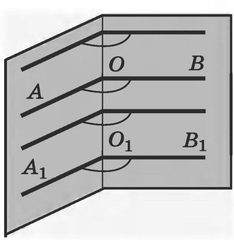


Рис. 2.386

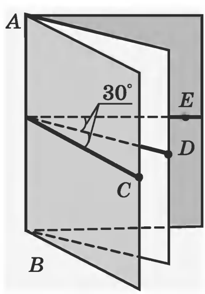


Рис. 2.387

ные меры равны 30°. Двугранный угол *CABE* больше двугранного угла *CABD*.

Подобно плоским углам, двугранные углы могут быть *смежные*, *вертикальные* и пр.

Если два смежных двугранных угла равны между собой, то каждый из них называется *прямым* двугранным углом.

Все сказанное можно сформулировать в виде теорем.

Теорема 2. 1. Равным двугранным углам соответствуют равные линейные углы.

2. Большему двугранному углу соответствует больший линейный угол.

Верна и обратная теорема.

Теорема 3. 1. Равным линейным углам соответствуют равные двугранные углы.

2. Большему линейному углу соответствует больший двугранный угол.

Из теорем 2 и 3 легко получить три следствия.

Следствие 1. Прямому двугранному углу соответствует прямой линейный угол, и обратно.

Следствие 2. Все прямые двугранные углы равны, потому что у них равны линейные углы.

Следствие 3. Вертикальные двугранные углы равны.

П р и м е р. Докажем теорему 3.

Из условия теоремы имеем:

1. $PABQ$ и $P_1A_1B_1Q_1$ — два данных двугранных угла (рис. 2.388).

2. Вложим угол A_1B_1 в угол AB так, чтобы ребро A_1B_1 совпало с ребром AB, а грань P_1 — с гранью P (построение) (рис. 2.389).

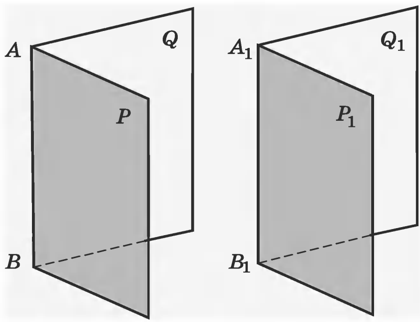


Рис. 2.388

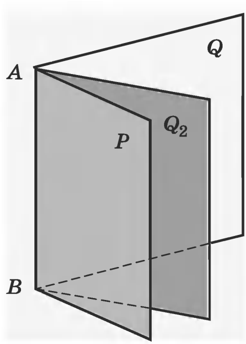


Рис. 2.389

3. Если эти двугранные углы равны, то грань Q_1 совпадает с Q; если же двугранные углы не равны, то грань Q_1 займет некоторое положение, не совпадающее с Q, например положение Q_2 (1, 2).

4. Возьмем на общем ребре какую-нибудь точку B и проведем через нее плоскость α, перпендикулярную ребру AB (построение) (рис. 2.390).

5. От пересечения этой плоскости с гранями двугранных углов получатся линейные углы.

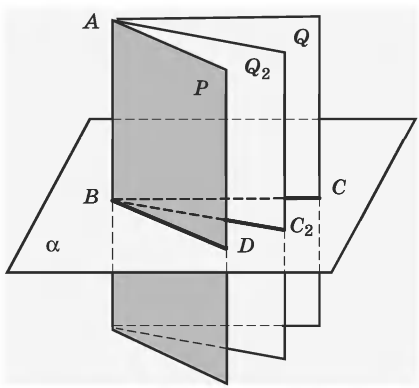


Рис. 2.390

Ясно, что если двугранные углы совпадут, то у них окажется один и тот же линейный угол CBD; если же двугранные углы не совпадут (если, например, грань Q_1 займет положение Q_2), то у большего двугранного угла окажется больший линейный угол (именно $CBD > C_2BD$) (3, 4).

§18. Перпендикулярность плоскостей

84. Понятие перпендикулярности плоскостей. Две пересекающиеся плоскости образуют двугранные углы. Если эти двугранные углы прямые, то говорят, что *плоскости взаимно перпендикулярны*.

Определение. Две пересекающиеся плоскости называются *перпендикулярными* (или взаимно перпендикулярными), если они образуют четыре прямых двугранных угла.

Можно доказать следующее свойство перпендикулярных плоскостей.

Теорема 4. Прямая, лежащая в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная их линии пересечения, перпендикулярна другой плоскости. Верно и обратное свойство.

Теорема 5. Прямая, имеющая общую точку с одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная другой плоскости, лежит в первой из них.

Имеет место признак перпендикулярности двух плоскостей.

Теорема 6. Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Следствие. Плоскость, перпендикулярная прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна каждой из этих плоскостей.

На рисунке 2.391 плоскость γ перпендикулярна прямой a, по которой пересекаются две плоскости α и β. Значит, согласно следствию, плоскость γ будет перпендикулярна плоскостям α и β.

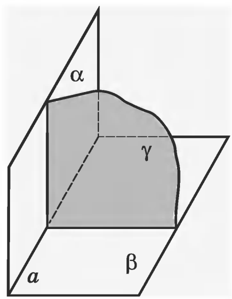


Рис. 2.391

С помощью свойств перпендикулярных плоскостей можно доказать еще один признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема 7. Если две плоскости, перпендикулярные третьей плоскости, пересекаются, то прямая их пересечения перпендикулярна третьей плоскости.

П р и м е р. Докажем теорему 6.

Из условия теоремы имеем:

$\left.\begin{array}{l}\text{1. Прямая } AB \text{ принадлежит плоскости } \alpha. \\ \text{2. } AB \perp \beta, AB \text{ пересекает } \beta \text{ в точке } B.\end{array}\right\}$ дано

3. $\alpha \perp \beta$ (требуется доказать).

4. Плоскости α и β имеют общую точку B, а значит, пересекаются по некоторой прямой CD (1, 2, аксиома 5) (рис. 2.392).

Нам нужно доказать перпендикулярность плоскостей α и β. Как это можно сделать? Ответ одно-

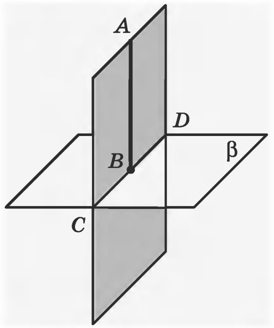


Рис. 2.392

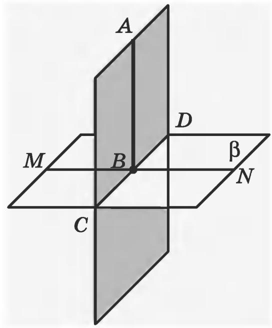


Рис. 2.393

значный — только через рассмотрение двугранных углов и градусных мер их линейных углов (они должны быть прямые). У нас на рисунке нет нужных нам линейных углов. Это подсказывает следующее построение.

5. Проведем в плоскости β прямую MN, перпендикулярную CD и проходящую через точку B (построение) (рис. 2.393).

6. $BA \perp CD$ и $MN \perp CD$, значит, $\angle ABN$ — линейный угол двугранного угла с ребром CD (2, 5, определение линейного угла двугранного угла).

7. $\angle ABN = 90°$ (2, 6).

8. $\alpha \perp \beta$ (1, 7).

§19. Параллельность плоскостей

85. Понятие параллельности плоскостей.

Определение. Две плоскости называют *параллельными*, если они не имеют общих точек.

Параллельность плоскостей α и β обозначается так: $\alpha \parallel \beta$. Читается: «плоскость α параллельна плоскости β» или «плоскости α и β параллельны».

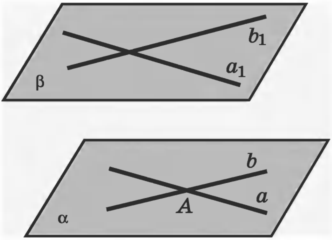


Рис. 2.394

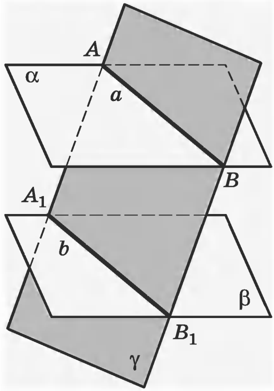


Рис. 2.395

86. Свойства и признаки параллельных плоскостей. Признак параллельности двух плоскостей.

Теорема 8. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

На рисунке 2.394 изображены две плоскости α и β. В плоскости α расположены две прямые a и b, пересекающиеся в точке A, а в плоскости β — прямые a_1 и b_1, соответственно параллельные прямым a и b. На основании теоремы 8 можно заключить, что плоскости α и β будут параллельны.

Далее сформулированы *свойства параллельных плоскостей*.

Теорема 9. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны (рис. 2.395).

Теорема 10. Отрезки параллельных прямых, заключенных между параллельными плоскостями, равны (рис. 2.396).

Понятия перпендикуляра к плоскости и параллельных плоскостей тесно связаны между собой. Можно доказать такую теорему.

Теорема 11. Если прямая перпендикулярна одной из параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой (рис. 2.397).

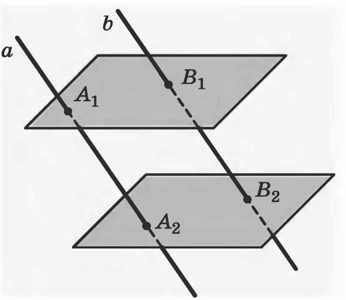


Рис. 2.396

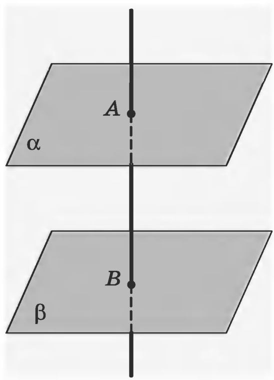


Рис. 2.397

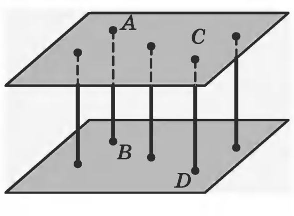


Рис. 2.398

Следствие. Параллельные плоскости одинаково удалены одна от другой.

На рисунке 2.398 отрезки AB и CD являются расстояниями между плоскостями α и β, а значит, они равны: $AB = CD$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФИГУР

§ 20. Изометрии (движения)

87. Понятие геометрического преобразования. *Преобразования фигур* изучаются в курсе геометрии на плоскости и в пространстве. Если каждую точку данной фигуры на плоскости или в пространстве сместить каким-нибудь образом, то получим новую фигуру. Говорят, что эта фигура получена преобразованием из данной.

Вспомните определение числовой функции в курсе алгебры (см. с. 111). В геометрии также есть некоторые функции, заданные на множестве точек. Такие «геометрические функции» называют *геометрическими преобразованиями*.

Определение. Пусть преобразование фигуры F в фигуру F_1 переводит различные точки фигуры F в различные точки фигуры F_1. Пусть произвольная точка X фигуры F при этом преобразовании переходит в точку X_1 фигуры F_1. Преобразование фигуры F_1 в фигуру F, при котором точка X_1 перейдет в точку X, называют *преобразованием, обратным данному*.

В геометрии выделяют *геометрические преобразования, сохраняющие расстояния между соответствующими точками*. Такие геометрические преобразования называют *изометриями* (*движениями*).

Заметим, что есть геометрические преобразования, для которых не выполняется это свойство (например, надувая мыльный пузырь, мы тоже осуществляем геометрическое преобразование, но при этом изменяются расстояния между соответствующими точками).

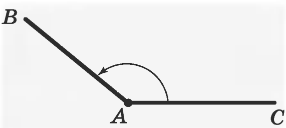


Рис. 2.399

88. Поворот вокруг точки на данный угол.

Если луч AC (рис. 2.399) поворачивать вокруг точки A против часовой стрелки, например, до положения AB, то его последовательные положения «заметут» угол со сторонами AC и AB.

Описанный выше процесс в геометрии называется *поворотом луча на некоторый угол вокруг данной точки*.

На плоскости вокруг точки можно поворачивать любую фигуру. На рисунке 2.400 изображен поворот «плоского» Буратино на углы 50° и 110° вокруг некоторой точки O.

На рис. 2.401 изображен поворот $\triangle ABC$ на угол 50° вокруг данной точки O. При этом $\triangle ABC$ перешел в $\triangle A_1B_1C_1$. Видно, что $\triangle A_1B_1C_1$ равен $\triangle ABC$.

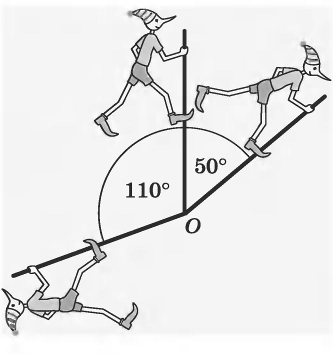


Рис. 2.400

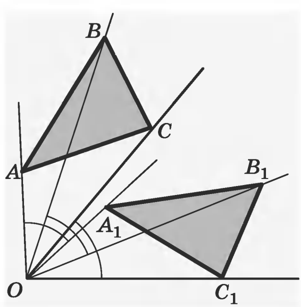


Рис. 2.401

Угол поворота, т. е. угол, на который мы поворачивали фигуру, всегда заключается в интервале от 0 до 180°: $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$. При повороте на 0° все точки фигуры остаются на месте. Такой поворот на 0° только один.

Поворотов существует два: *по часовой стрелке* и *против часовой стрелки*. Так будет при любом заданном угле поворота. На рисунке 2.401 треугольник ABC повернули на угол в 50° вокруг точки O по часовой стрелке.

Определение. Поворотом фигуры Φ вокруг точки O на угол α называют такое преобразование, при котором:

1) точка O переходит сама в себя (остается на месте);

2) любая точка X фигуры Φ переходит в такую точку X_1 фигуры Φ_1, что $\angle X_1OX$ всегда равен α;

3) $OX = OX_1$.

Существуют фигуры, которые при некоторых поворотах переходят сами в себя.

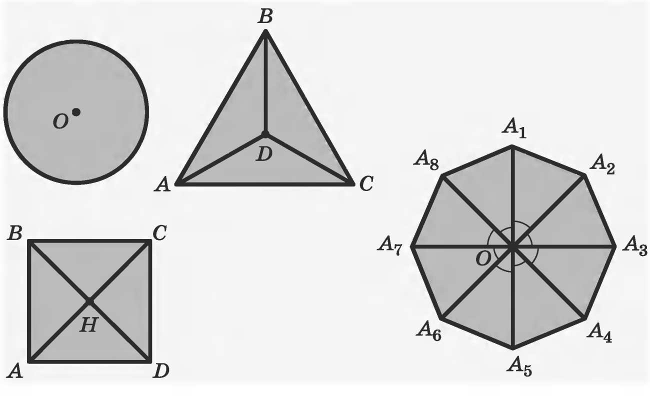


Рис. 2.402

Про такие фигуры можно сказать, что *они имеют центр поворота*. При этом разные фигуры могут иметь разные углы поворота (при повороте на который фигура переходит сама в себя).

На рисунке 2.402 изображены фигуры, имеющие центр поворота.

Можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Поворот фигуры вокруг точки на данный угол есть изометрия.

89. Вращение фигуры вокруг оси на данный угол. На практике широко используется не поворот фигур на плоскости, а *вращение фигуры вокруг оси* в пространстве.

Определение. Вращением вокруг оси l на угол φ называется такое преобразование пространства, при котором в каждой плоскости, перпендикулярной оси l, происходит поворот на угол φ вокруг точки пересечения этой плоскости с осью.

Прямую l называют *осью вращения*, угол φ — *углом вращения*.

Неподвижными элементами вращения являются точки оси вращения, а также все плоскости, перпендикулярные этой оси. Если $\varphi = 2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$, то вращение можно считать тождественным преобразованием.

Существуют фигуры, имеющие ось вращения, т. е. такие фигуры, которые при вращении вокруг этой оси на соответствующие углы переходят сами в себя. Оси вращения имеют прежде всего круглые фигуры — сфера, шар, цилиндр, конус (рис. 2.403). В связи с этим их называют *телами вращения*.

Оси вращения имеют и различные многогранники, например куб и тетраэдр.

Можно доказать, что вращение фигуры вокруг оси является изометрией.

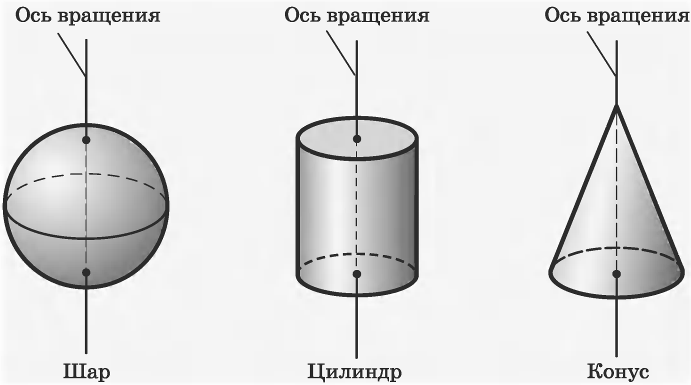


Рис. 2.403

90. Симметрия относительно точки (центральная симметрия).

Определение. Пусть O — фиксированная точка и X — произвольная точка. Точку X_1 называют *симметричной точке* X *относительно точки* O, если точки X, O, X_1 лежат на одной прямой и $OX = OX_1$. Точка, симметричная точке O, есть сама точка O.

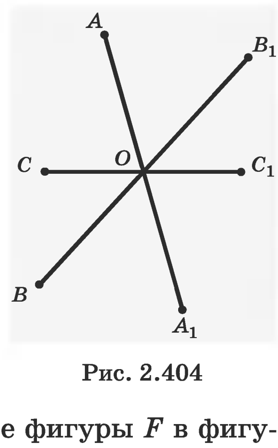


Рис. 2.404

На рисунке 2.404 точки A и A_1, B и B_1, C и C_1 симметричны друг другу относительно точки O.

Определение. Пусть F — данная фигура и O — фиксированная точка. Преобразование фигуры F в фигуру F_1, при котором каждая ее точка X переходит в точку X_1, симметричную X относительно данной точки O, называют *преобразованием симметрии относительно точки O*.

На рисунке 2.405 изображены две симметричные относительно точки O треугольные пирамиды.

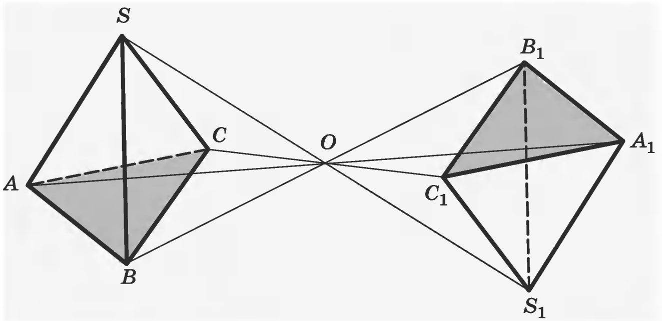


Рис. 2.405

Теорема 2. Центральная симметрия является изометрией.

Определение. Если преобразование симметрии относительно точки O переводит фигуру в себя, то фигуру называют *центрально-симметричной*, а точку O — *ее центром симметрии*.

Например, параллелограмм является центрально-симметричной фигурой. Центром его симметрии является точка пересечения диагоналей (рис. 2.406). Окружность с центром O тоже центрально-симметричная фигура с центром симметрии O (рис. 2.407). Все перечисленные фигуры плоские.

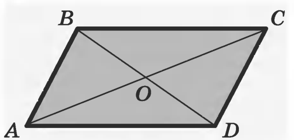


Рис. 2.406

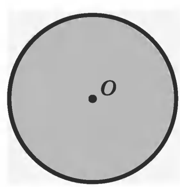


Рис. 2.407

В пространстве, так же как и на плоскости, много примеров центрально-симметричных фигур. Например, на рисунках 2.408 и 2.409 изображены такие фигуры: это куб и параллелепипед.

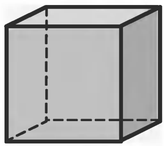


Рис. 2.408

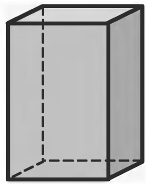


Рис. 2.409

91. Симметрия относительно прямой (осевая симметрия).

Определение. Пусть l — фиксированная прямая. Точку X_1 называют *симметричной точке X относительно прямой l*, если прямая XX_1 перпендикулярна прямой l и $OX_1 = OX$, где O — точка пересечения прямых XX_1 и l. Если точка X лежит на прямой l, то симметричная ей точка есть сама точка X, т. е. точка, симметричная точке X_1, есть точка X.

На рисунке 2.410 точки X и X_1, Y и Y_1, Z и Z_1 симметричны относительно прямой l.

Определение. Преобразование фигуры F в F_1, при котором каждая точка X переходит в точку X_1, симметричную относительно прямой l, называют преобразованием симметрии относительно прямой l. При этом фигуры F и F_1 называют *симметричными относительно прямой l*.

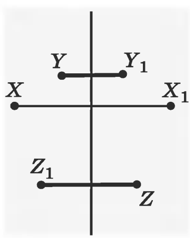


Рис. 2.410

На рисунке 2.411 изображены окружности, симметричные относительно прямой l.

На рисунке 2.412 изображены две сферы, симметричные относительно прямой l.

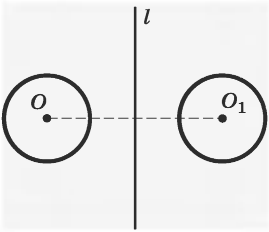


Рис. 2.411

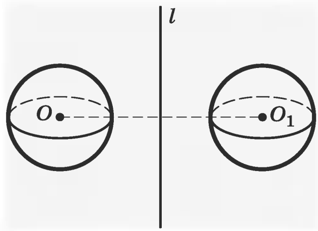


Рис. 2.412

Осевая симметрия является изометрией.

Определение. Если преобразование симметрии относительно прямой l переводит фигуру F в себя, то фигуру называют *симметричной относительно прямой* l, а прямую l называют *осью симметрии фигуры*.

Например, прямые, проходящие через точку пересечения диагоналей прямоугольника параллельно его сторонам, являются осями симметрии прямоугольника (рис. 2.413). Прямые, на которых лежат диагонали ромба, являются его осями симметрии (рис. 2.414). Окружность симметрична

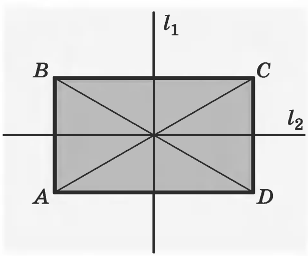


Рис. 2.413

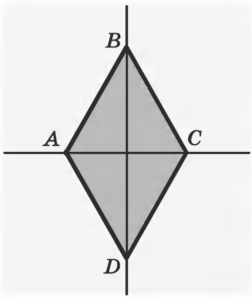


Рис. 2.414

относительно любой прямой, проходящей через ее центр (рис. 2.415).

В пространстве, как и на плоскости, много примеров фигур, имеющих оси симметрии. На рисунке 2.416 изображены такие фигуры: это прямоугольный параллелепипед, конус, правильная четырехугольная пирамида.

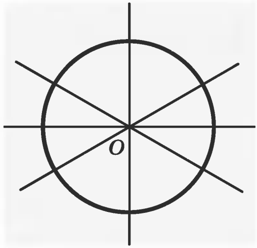


Рис. 2.415

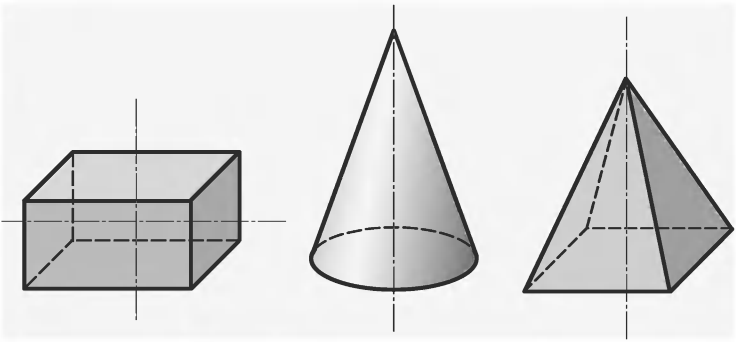


Рис. 2.416

92. Симметрия относительно плоскости (зеркальная симметрия).

Определение. Пусть α — произвольная фиксированная плоскость. Из точки X опускают перпендикуляр на плоскость α (O — точка пересечения его с плоскостью α) и на его продолжении за точку O откладывают отрезок OX_1, равный OX. Точки X и X_1 называют *симметричными относительно плоскости* α (рис. 2.417).

Определение. Преобразование фигуры F в F_1, при котором каждая точка X фигуры F переходит в точку X_1, симметричную X относительно плос-

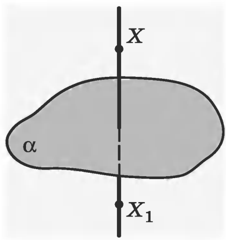


Рис. 2.417

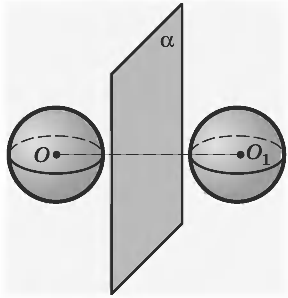


Рис. 2.418

кости α, называют *преобразованием симметрии относительно плоскости* α. При этом фигуры F и F_1 называют *симметричными относительно плоскости* α.

На рисунке 2.418 изображены две сферы, симметричные относительно плоскости α.

Можно доказать такую теорему.

Теорема 3. Симметрия относительно плоскости является изометрией.

Кроме фигур, симметричных относительно некоторой плоскости, имеются фигуры, имеющие плоскость или плоскости симметрии.

Определение. Если преобразование симметрии относительно плоскости переводит фигуру в себя, то фигуру называют *симметричной относительно плоскости* α, а плоскость α называют *плоскостью симметрии*.

На рисунке 2.419 изображены две плоскости симметрии сферы. Заметим, что у сферы таких плоскостей симметрии бесконечное множество. У куба также имеются плоскости симметрии. На рисунке 2.420 изображены две из них.

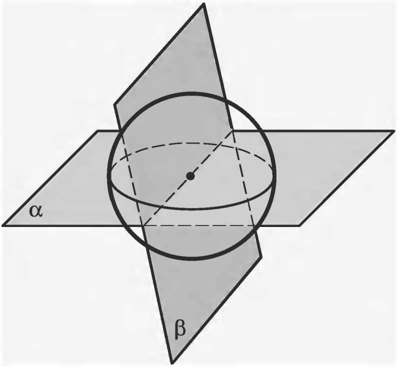


Рис. 2.419

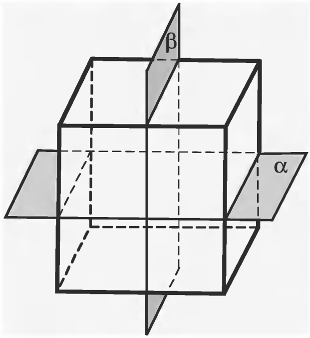


Рис. 2.420

93. Параллельный перенос. На рисунке 2.421 изображен *параллельный перенос* (сдвиг) некоторой произвольной фигуры F. Она перешла в фигуру F_1. При этом точка A перешла в точку A_1, точка B — в точку B_1, точка C — в точку C_1. Для удобства процесс перехода точек часто изображается отрезками со стрелками, которые называют *направленными отрезками*.

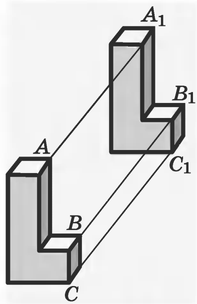


Рис. 2.421

Можно сформулировать точное определение параллельного переноса.

Определение. Если каждую точку фигуры Φ перевести (сместить) в одном направлении (по сонаправленным лучам) на одно и то же расстояние, то получим фигуру Φ_1. Полученное в результате преобразование называют *параллельным переносом*.

Параллельные переносы обозначают буквой T. Запись $T(A) = B$ читается: параллельный перенос T переводит точку A в точку B.

Рассматривая, например, различные призмы, можно увидеть, что основания призмы могут быть совмещены друг с другом параллельным переносом.

На рисунке 2.422 основание призмы $A_1A_2A_3A_4A_5$ перейдет в пятиугольник $A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'$, а произвольная точка X нижнего основания перейдет в точку X' верхнего основания при параллельном переносе в направлении луча XX'.

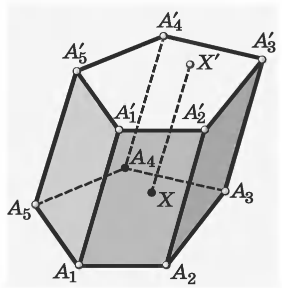


Рис. 2.422

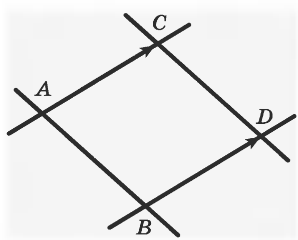


Рис. 2.423

Можно доказать теоремы 4 и 5.

Теорема 4. Параллельный перенос является изометрией.

Теорема 5. Отрезки двух параллельных прямых, заключенные между двумя другими параллельными прямыми, равны.

На рисунке 2.423 изображены две параллельные прямые a и b и два параллельных отрезка AB и CD. Согласно теореме 5, $AB = CD$.

94. Определение и свойства изометрии.

Определение. Преобразование фигуры F в фигуру F_1 называют изометрией, если оно сохраняет расстояние между соответствующими точками, т. е. переводит любые две точки A и B фигуры F в точки A_1 и B_1 фигуры F_1 так, что $AB = A_1B_1$.

Все рассмотренные выше примеры геометрических преобразований являются изометриями.

Можно сформулировать и доказать некоторые общие свойства изометрии.

Теорема 6. При изометрии точки, лежащие на прямой, переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения.

Из теоремы 6 следует, что при изометрии прямые переходят в прямые, полупрямые — в полупрямые, отрезки — в отрезки.

При изометрии сохраняются углы между полупрямыми. При изометрии плоскость переходит в плоскость.

Изометрии, выполненные последовательно, дают снова изометрию. Результат выполнения этих изометрий называют *композицией изометрий*.

На рисунке 2.424 изображено последовательное выполнение двух изометрий, фигура F_1 получена из фигуры F симметрией относительно оси p, а фигура F_2 получена из фигуры F_1 симметрией относительно точки O, в результате последовательного выполнения этих изометрий сохранились расстояния между соответствующими точками, а значит, фигура F_2 получена из фигуры F изометрией.

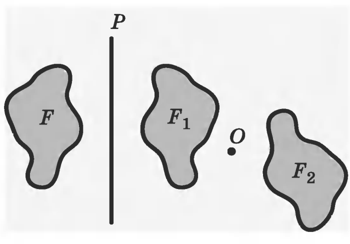


Рис. 2.424

Теорема 7. Композиция двух вращений с одной и той же осью есть вращение.

Пример 1. Даны две концентрические окружности. Постройте ромб, отличный от квадрата, так, чтобы: А) две вершины его принадлежали одной окружности, а две оставшиеся — другой; В) три вершины принадлежали одной окружности, а одна — другой.

Решение. А) 1. Построим любой диаметр AB одной окружности и перпендикулярный ему диаметр CD другой окружности (рис. 2.425).

2. Диагонали полученного четырехугольника $CBDA$ в точке пересечения делятся пополам, значит, $CBDA$ — параллелограмм.

3. Из симметрии отрезков AC и BC относительно оси CD следует равенство сторон параллелограмма, т. е. $CBDA$ — ромб.

В) 1. Диаметр AB ме́ньшей окружности продолжим до пересечения в точке C с бо́льшей окружностью.

2. Построим оси симметрии отрезков AC и BC (рис. 2.426).

3. Мы получим два ромба, удовлетворяющие условию задачи: $BMCM_1$ и $AKCK_1$.

Аналогично можно в первом случае построить еще один ромб, а во втором — еще два.

Пример 2. Даны плоскость α и две точки A и B вне ее. Найдите на плоскости α такую точку N,

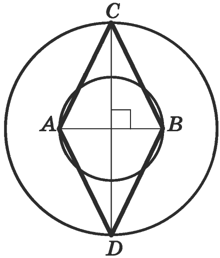


Рис. 2.425

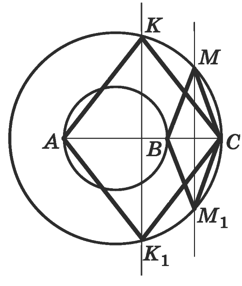


Рис. 2.426

чтобы сумма ее расстояний от A и B, т. е. $AN + NB$, была наименьшей.

Решение. Если точки A и B расположены по разные стороны от плоскости α, то очевидно, что искомая точка N — точка пересечения прямой AB с плоскостью α (рис. 2.427).

Если же точки A и B расположены по одну сторону от плоскости α (рис. 2.428), то искомая точка N получится при пересечении прямой A_1B с плос-

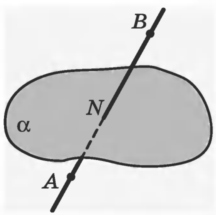


Рис. 2.427

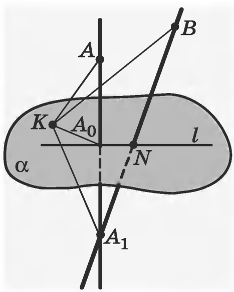


Рис. 2.428

костью α, где A_1 — точка, симметричная точке A относительно плоскости α.

1. Докажем, что точка N искомая.

2. N находится на прямой l, которая перпендикулярна отрезку AA_1 и проходит через его середину ($A_0N \perp AA_1$).

3. $AN = A_1N$, отсюда $AN + NB = A_1N + NB$.

4. Возьмем на плоскости α произвольную точку K, отличную от N.

5. Соединив точки A_0 и K, получим отрезок A_0K, перпендикулярный отрезку AA_1 и проходящий через его середину A_0.

6. $AK = A_1K$.

7. $AK + KB = A_1K + KB$.

8. Из $\triangle A_1KB$ имеем, что $A_1K + KB > A_1B$ (7, неравенство треугольника).

9. Так как $A_1B = AN + NB$, то ясно, что

$$A_1K + KB > AN + NB.$$

10. Таким образом, приходим к выводу, что сумма $AN + NB$ имеет наименьшее значение, и, следовательно, N — искомая точка.

95. Изометрия и равенство фигур. Используя понятия изометрии, можно дать еще одно определение равных фигур.

Определение. Фигуры F и F_1 называют *равными*, если они изометрией переводятся одна в другую.

Для обозначения равенства фигур употребляется знак равенства. Запись $F = F_1$ означает, что фигура F равна F_1.

На рисунке 2.429 шары симметричны относительно плоскости, а значит, они равны.

На рисунке 2.430 кубы симметричны относительно точки, а значит, они равны.

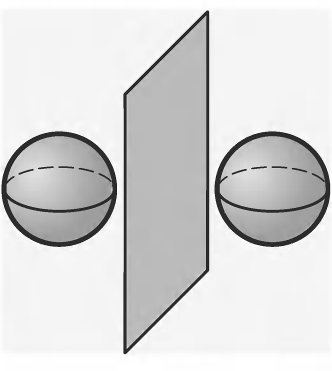


Рис. 2.429

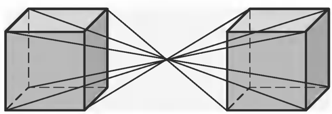


Рис. 2.430

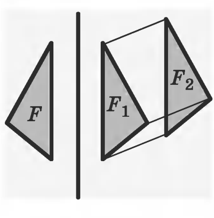


Рис. 2.431

На рисунке 2.431 треугольники F, F_1, F_2 равны, так как все они получены один из другого в результате изометрии.

П р и м е р. На рисунках 2.432 и 2.433 изображены два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что эти треугольники совмещаются изометрией (или композицией изометрий), причем вершина A переходит в вершину A_1, B — в B_1, C — в C_1.

Р е ш е н и е. Решение задачи зависит от расположения данных треугольников.

А) На рисунке 2.432 изображены два равных треугольника. Возможны такие построения:

1. $\triangle A_1B_2C_2$ получен из $\triangle ABC$ при симметрии относительно серединного перпендикуляра к отрезку AA_1.

2. $\triangle A_1B_1C_1$ получен из $\triangle A_1B_2C_2$ при симметрии относительно прямой, соединяющей точку A_1 с серединой отрезка B_2B_1.

3. Последовательное выполнение изометрией есть изометрия. Таким образом, $\triangle A_1B_1C_1$ получен из $\triangle ABC$ изометрией — композицией дух осевых симметрий.

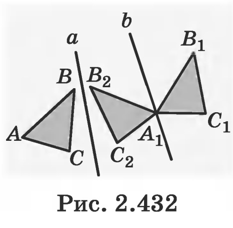


Рис. 2.432

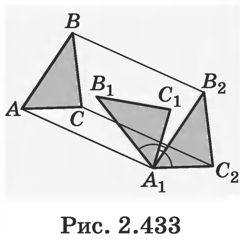


Рис. 2.433

В) На рисунке 4.433 изображен другой вариант. $\triangle A_1B_2C_2$ получен из $\triangle ABC$ параллельным переносом в направлении, заданном лучом AA_1, на расстояние AA_1. Далее, $\triangle A_1B_1C_1$ получен из $\triangle A_1B_2C_2$ поворотом на угол α против часовой стрелки. Вывод аналогичен первому случаю.

ПОДОБИЕ ФИГУР. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ

§ 21. Подобие фигур

96. Понятие подобия фигур. В окружающем мире часто встречаются предметы, одинаковые по форме, но различные по размерам: мыльный пузырь и футбольный мяч, небольшая модель ледокола и сам корабль, карты, фотоснимки различных размеров одного и того же здания. В геометрии такие фигуры называют *подобными*.

Существуют фигуры, которые всегда подобны друг другу, например, круги, квадраты, кубы.

Для обозначения подобия фигур употребляется знак $\sim$. На рисунке 2.434 изображены подобные фигуры Φ_1 и Φ_2. Запись «$\Phi_1 \sim \Phi_2$» читается: фигура Φ_2 подобна фигуре Φ_1.

Для подобных фигур вводится понятие — *коэффициент подобия*, он обозначается k; k всегда больше нуля. Коэффициент подобия показывает, в каком отношении находятся соответствующие расстояния между точками фигур. На рисунке 2.434 коэффициент подобия можно определить, найдя отношения сторон квадратиков изображенной сетки.

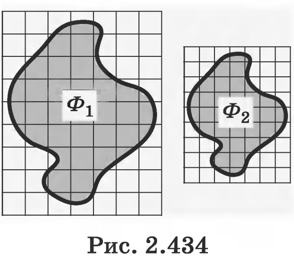


Рис. 2.434

Подобие фигур широко используется при разработке планов построек зданий или при изображении на картах городов или других участков земной поверхности. Всякий план или карта является подобным изображением реального объекта или участка земной поверхности, т. е. фигурой, подобной реальному объекту. При этом план или карта может изображать реальный объект в разном *масштабе*.

Определение. Масштаб — это коэффициент подобия соответствующих фигур.

97. Подобие треугольников. На рисунке 2.435 изображены два чертежных прямоугольных треугольника с острыми углами в 60° и 30°. Стороны второго треугольника по сравнению с первым уменьшены в два раза: $\frac{AB}{A'B'} = 2$; $\frac{AC}{A'C'} = 2$; $\frac{CB}{C'B'} = 2$.

У этих треугольников углы попарно равны. Стороны, лежащие против разных углов, пропорциональны: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CB}{C'B'} = 2$.

Такие треугольники называют *подобными*. Стороны, лежащие против равных углов, называют *сходственными*.

Определение. Подобными называют треугольники, у которых углы попарно равны, а сходственные стороны пропорциональны.

Подобие треугольников записывается так: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Отношение сходственных сторон подобных треугольников называется

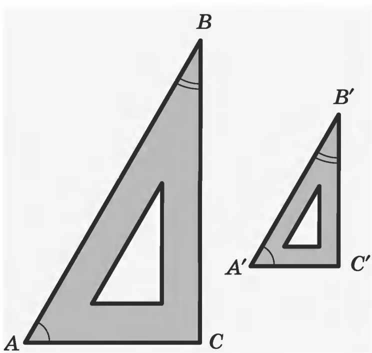


Рис. 2.435

коэффициентом подобия. В случае, изображенном на рисунке 2.435, коэффициентом подобия треугольников ABC и $A'B'C'$ будет число 2. Если же взять отношения $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$, коэффициент подобия будет равен $\frac{1}{2}$.

Подобные треугольники могут быть произвольно расположены как на плоскости, так и в пространстве.

Если фигуры равны, то они подобны с коэффициентом подобия, равным 1. Если фигуры подобны, то они не обязательно равны.

Теорема 1. (*Лемма о подобии треугольников*). Прямая, пересекающая две стороны треугольника и проведенная параллельно третьей стороне, отсекает треугольник, подобный данному.

Для выявления подобия треугольников существуют *признаки подобия треугольников.*

Теорема 2. (*Первый признак — по двум равным углам.*) Два треугольника подобны, если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого.

Следствия из этой теоремы.

1. Равносторонние треугольники подобны.

2. Равнобедренные треугольники подобны, если они имеют по равному углу при вершине или при основании.

3. Два прямоугольных треугольника подобны, если они имеют по равному острому углу.

4. Равнобедренные прямоугольные треугольники подобны.

Теорема 3. (*Второй признак — по пропорциональности двух сторон и равенству углов между ними.*) **Два треугольника подобны, если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, лежащие между ними, равны.**

Следствие. **Прямоугольные треугольники подобны, если катеты одного из них пропорциональны катетам другого.**

Теорема 4. (*Третий признак — по пропорциональности трех сторон.*) **Два треугольника подобны, если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника.**

Теорема 5. **Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.**

98. Подобие многоугольников.

Определение. **Если стороны одного многоугольника пропорциональны сторонам другого многоугольника и соответственные углы этих многоугольников равны, то такие многоугольники подобны.**

На рисунке 2.436 изображены два подобных пятиугольника $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$, у них $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle D = \angle D_1$, $\angle E = \angle E_1$, а также $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1} = k$, k — коэффициент подобия.

Для многоугольников с числом сторон больше трех признак подобия, аналогичный третьему

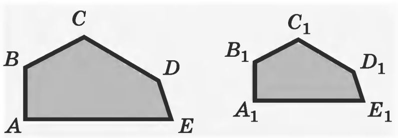


Рис. 2.436

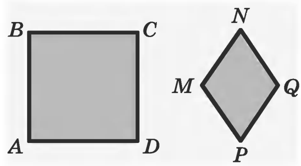


Рис. 2.437

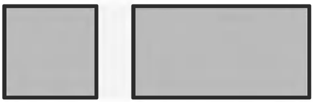


Рис. 2.438

признаку подобия треугольников, будет неверен. Например, квадрат и ромб, отличный от квадрата, не будут подобны, хотя их стороны пропорциональны (рис. 2.437). Недостаточно для подобия двух прямоугольников и равенства их соответствующих углов. Например, квадрат не подобен четырехугольнику, не все стороны которого равны (рис. 2.438).

Теорема 6. Отношение периметров подобных многоугольников равно отношению их сходственных сторон (коэффициенту подобия).

Теорема 7. Отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.

§ 22. Преобразование подобия

99. Гомотетия и ее свойства.

Пусть дан многоугольник $ABCD$ (рис. 2.439).

1. Возьмем произвольную точку O.

2. Построим векторы $\overline{OA_1} = 3\overline{OA}$, $\overline{OB_1} = 3\overline{OB}$ и т. д.

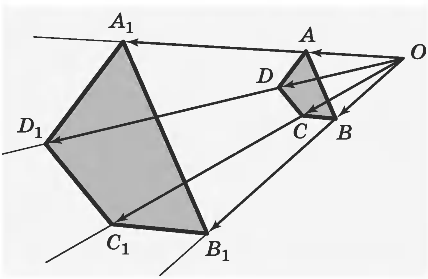


Рис. 2.439

3. Многоугольник $A_1B_1C_1D_1$ будет подобным многоугольнику $ABCD$ (рис. 2.439).

В этом построении использовалось требование, при котором точка X переходит в такую точку X_1, что $\overline{OX_1} = 3\overline{OX}$, а точка O переходит в себя.

Таким образом, задача построения фигуры, подобной данной фигуре, приводит к новому виду преобразований, которое называют *гомотетией*.

Определение. Гомотетией с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ называют преобразование, при котором каждая точка X переходит в точку X_1, такую, что $\overline{OX_1} = k\overline{OX}$.

Если при гомотетии фигура Φ_1 переходит в фигуру Φ_2, то эти фигуры Φ_1 и Φ_2 называют *гомотетичными*.

Если $k = 1$, то каждая точка X перейдет сама в себя.

Если $k > 0$, то гомотетичные фигуры располагаются по одну сторону от центра гомотетии (рис. 2.440, 2.441).

Если $k < 0$, то гомотетичные фигуры располагаются по разные стороны от центра гомотетии (рис. 2.442).

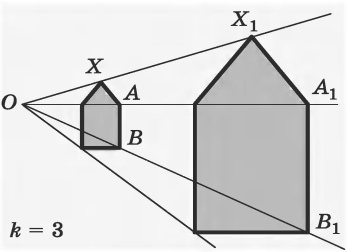


Рис. 2.440

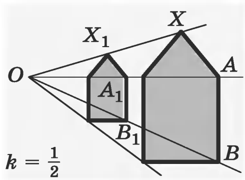


Рис. 2.441

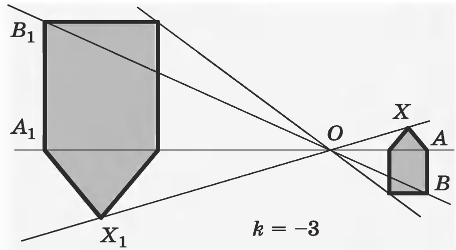


Рис. 2.442

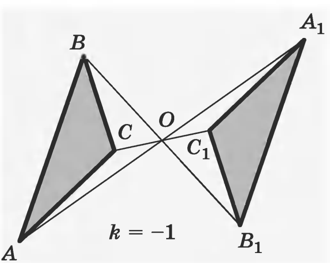


Рис. 2.443

Если $k = -1$, то каждая точка A перейдет в точку A_1, для которой $\overline{OA_1} = -\overline{OA}$ (рис. 2.443). Но такое преобразование — центральная симметрия. Значит, гомотетия с коэффициентом -1 является центральной симметрией.

Из определения гомотетии следует:

1) Центр гомотетии переходит сам в себя.

2) Если $k > 0$ (рис. 2.440), то точки X и X_1 лежат на прямой OX по одну сторону от центра гомотетии (так, векторы $\overline{OX}$ и $\overline{OX_1}$ сонаправлены).

3) Если $k < 0$ (рис. 2.442), то точки X и X_1 лежат на прямой OX по разные стороны от центра гомотетии (так, векторы $\overline{OX}$ и $\overline{OX_1}$ противоположно направлены).

Имеет место теорема 8.

Теорема 8. Если при гомотетии с коэффициентом k точки X и Y переходят в точки X_1 и Y_1, то $\overline{X_1Y_1} = k\overline{XY}$.

Из этой теоремы можно получить три следствия — свойства гомотетии:

Следствие 1. При гомотетии с коэффициентом k расстояние между точками умножается на $|k|$.

Следствие 2. При гомотетии всякая прямая переходит в параллельную ей прямую.

Следствие 3. Гомотетия всякую плоскость переводит в параллельную ей плоскость.

Теорема 9. Гомотетичные треугольники всегда подобны.

100. Понятие преобразования подобия. Гомотетия фигур является частным случаем другого соответствия между фигурами: соответствия подобия или, как его еще называют, *преобразования подобия*.

Рассмотрим определение и некоторые свойства преобразований подобия.

Определение. Преобразование фигуры F называют преобразованием подобия, если при этом преобразовании расстояния между соответствующими точками изменяются в одно и то же число раз, т. е. для любых двух точек X и Y фигуры F и точек X', Y' фигуры F', в которые они переходят, $X'Y' = k \cdot XY$.

Преобразование подобия переводит прямые в прямые, полупрямые в полупрямые, отрезки в отрезки и созраняет углы между полупрямыми. Преобразование подобия переводит плоскости в плоскости.

Если сравнить определения подобных фигур и преобразования подобия, то получим важный вывод: фигуры называют подобными, если они переводятся одна в другую *преобразованием подобия*.

Это значит, что если произвольные точки X, Y фигуры F при преобразовании подобия переходят в точки X', Y' фигуры F', то $X'Y' = k \cdot XY$, причем число k — одно и то же для всех точек X, Y. Число k является коэффициентом подобия.

При $k = 1$ преобразование подобия, очевидно, является изометрией.

Теорема 10. Всякое преобразование подобия сводится к последовательному выполнению гомотетии с коэффициентом k и некоторой изометрии.

Используя определение преобразования подобия, а также определение и свойства гомотетии, можно доказать следующую теорему.

Теорема 11. Гомотетия есть преобразование подобия.

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ

§ 22. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве

101. Декартовы координаты на прямой. В курсе алгебры постоянно приходится пользоваться прямоугольной системой координат. Рассмотрим прямоугольную систему координат на прямой. Хорошей иллюстрацией этой системы координат является термометр.

Пусть некоторой точке прямой ставится в соответствие число 0; положительные целые числа 1, 2, 3, ... располагаются на равных расстояниях друг от друга с одной стороны от 0, отрицательные целые числа −1, −2, −3... — с противоположной стороны, а дробные числа вставляются между ними естественным образом. Смещение точки x_1 относительно другой точки x есть положительное или отрицательное число $x_1 - x$. Если на прямой введена система координат, то каждой точке P соответствует некоторое число x, а каждому числу x соответствует некоторая точка (рис. 2.444). Стрелка показывает положительное направление отсчета координат. Прямую с установленной на ней системой координат называют *координатной прямой*. Точку O называют *началом координат*. Кроме этого, на координатной прямой вводится *единичный отрезок OE*, его иногда называют *масштабом*.

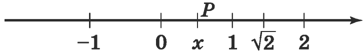


Рис. 2.444

102. Декартовы координаты на плоскости. Положение точки на плоскости может быть определено ее расстоянием до двух фиксированных взаимно перпендикулярных прямых — осей. В этом случае каждой точке плоскости будет соответствовать не одно число, а пара чисел. Соответствие между точками и парами чисел задается на плоскости: выбирают прямую, называемую осью Ox, вводят на ней систему координат. На оси Ox рисуют стрелку, чтобы указать ее положительное направление. Эта ось называется также *осью абсцисс*.

Проводят прямую Oy, перпендикулярную оси Ox и проходящую через точку O прямой Ox, имеющую координату 0, и вводят на прямой Oy систему координат так, чтобы точка с координатой 0 совпадала с точкой O. Прямая Oy называется *осью Oy* или *осью ординат*. Положительное направление на оси Oy также указывается стрелкой. Точка O пересечения прямых Ox и Oy (осей координат) называется *началом координат* (рис. 2.445).

На рисунке 2.446 изображена построенная прямоугольная система координат. Если дана точка P, то из нее опускают перпендикуляр на ось Ox. Пусть основанием перпендикуляра будет точка M и x — координата точки M на прямой Ox (рис. 2.446). Тогда число x называют *абсциссой* точки P. На рисунке 2.446 $x = 2\frac{1}{2}$.

Затем опускают из точки P перпендикуляр на ось Oy. Пусть основанием этого перпендикуляра будет точка N и y — координата точки N на прямой Oy. Тогда число y называют *ординатой* точки P. На рисунке 2.446 $y = 1\frac{1}{2}$. Для краткости указы-

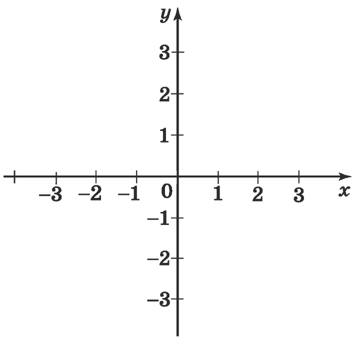


Рис. 2.445

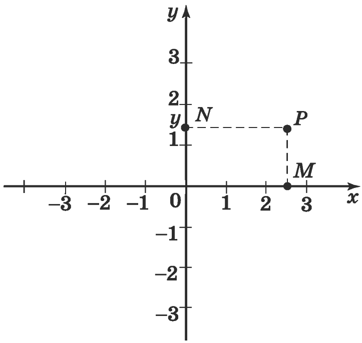


Рис. 2.446

ваем, что точка P имеет координаты x и y, так: $P(x,\ y)$. В нашем случае $P\left(2\frac{1}{2},\ 1\frac{1}{2}\right)$.

Порядок, в котором записываются координаты точки, очень существенен. Координаты (1, 3) имеет точка P_1, а координаты (3, 1) — отличная от нее точка P_2 (рис. 2.447). Нельзя сказать, где находится точка, если неизвестно, какое число в паре чисел $(x,\ y)$ стоит первым.

Ниже приводится определение координат точки на плоскости.

Определение. *Абсциссой точки P* называют координату основания перпендикуляра, опущенного из точки P на ось Ox; *ординатой точки P* называют координату основания перпендикуляра, опущенного из точки P на ось Oy.

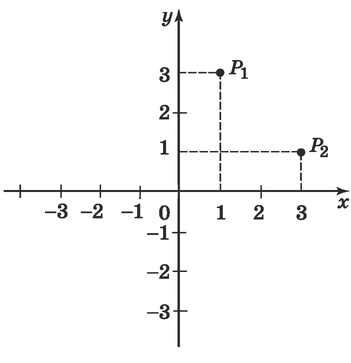


Рис. 2.447

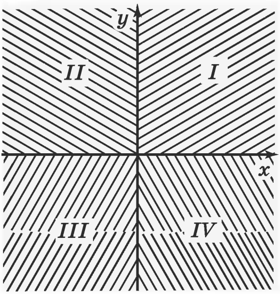


Рис. 2.448

Если прямая разбивает плоскость на две полуплоскости, то две оси координат разбивают плоскость на четыре части, называемые *четвертями*. Четыре четверти нумеруются в порядке, изображенном на рисунке 2.448.

Таким образом, между точками плоскости и упорядоченными парами действительных чисел имеется взаимооднозначное соответствие. Такое соответствие называют *прямоугольной системой координат*.

103. Декартовы координаты в пространстве. Построим горизонтальную плоскость и введем на ней декартову систему координат xOy (рис. 2.449).

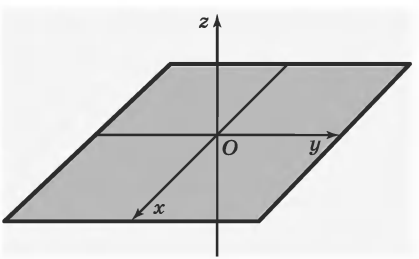


Рис. 2.449

Если ввести также координатную прямую Oz, перпендикулярную плоскости xOy в точке O, то тем самым будет введена система координат в пространстве. Точка O будет *началом* этой *системы координат*.

Стрелки осей Ox, Oy и Oz на рисунках указывают положительное направление каждой оси.

В декартовой системе координат в пространстве мы имеем три оси: *Ox — ось абсцисс*, *Oy — ось ординат*, *Oz — ось аппликат*. Плоскости, проходящие через оси Ox и Oy, Oy и Oz, Ox и Oz — координатные плоскости. Их обозначают соответственно: xy, yz, xz (рис. 2.450). Координатные плоскости разбивают все пространство на восемь частей — *октантов*.

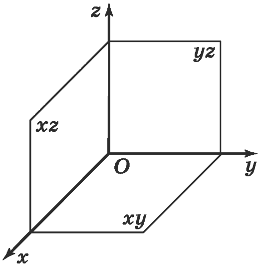


Рис. 2.450

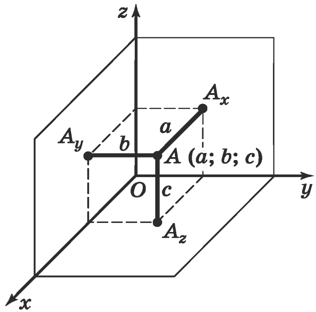


Рис. 2.451

Если задана такая система координат, то каждой точке пространства можно поставить в соответствие упорядоченную тройку действительных чисел, а каждой тройке чисел — единственную точку.

Пусть дана точка A, расположенная в первом октанте. Опустим из нее на плоскости yz, xz, xy перпендикуляры AA_x, AA_y, AA_z (рис. 2.451). Длины этих перпендикуляров называют *координатами точки A*. Записывают: $A(a, b, c)$. Если точка лежит в какой-нибудь из координатных плоскостей, ее соответствующая координата равна 0, а если на оси координат, то две координаты такой точки — нули. Например, точка B (0; 2; −3) лежит в плоскости yz, а точка C (5; 0; 0) — на оси Ox.

На рисунке 2.452: точка P лежит в плоскости xOy, так что ее проекция на ось Oz есть 0. Ее проекция на ось Ox совпадает с точкой, имеющей координату 2, а на ось Oy — с точкой, имеющей координату 3. Поэтому пишут $P(2, 3, 0)$.

Таким образом, нахождение координат точки в пространстве сводится к построению соответствующего прямоугольного параллелепипеда (иногда его воспроизводят частично, чтобы были видны координаты точки (рис. 2.453)).

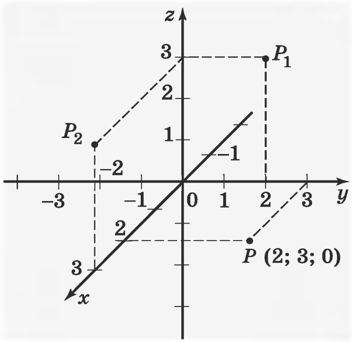


Рис. 2.452

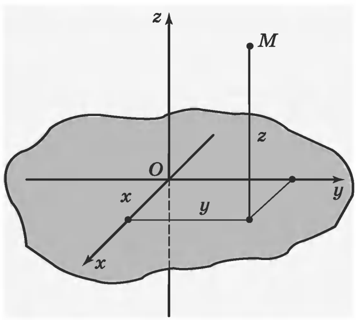


Рис. 2.453

Порядок записи этих трех чисел также существенен. На рисунке 2.452 изображены точки P, P_1, P_2, имеющие своими координатами числа 2, 3 и 0, записанные в разном порядке.

Можно иначе находить координаты точки пространства. Пусть дана точка M. Спроектируем точку M на оси Ox, Oy, Oz в точки M_x, M_y, M_z соответственно (рис. 2.454). Координаты точек M_x, M_y, M_z на осях сопоставляются точке M как ее координаты x, y, z. Таким образом, координатами точки в пространстве называют координаты ее проекций на оси координат.

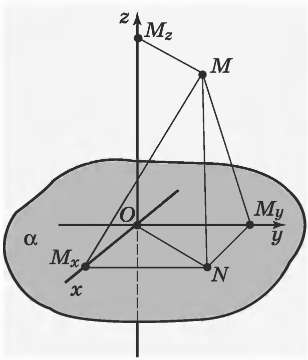


Рис. 2.454

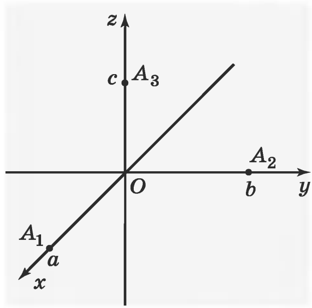


Рис. 2.455

Если есть три координаты — три числа a, b и c, то для них найдется соответствующая точка пространства. На рисунке 2.455 три числа на осях координат отмечены тремя точками A_1, A_2, A_3. Пусть отрезки OA_1, OA_2, OA_3 — ребра прямоугольного параллелепипеда с вершиной в точке O (рис. 2.456). Получили точку P с координатами a, b, c — $P(a, b, c)$.

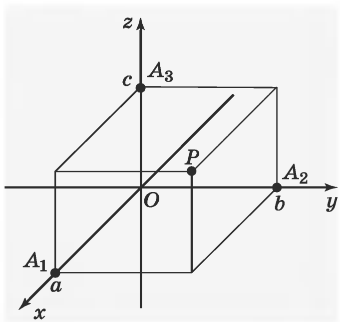


Рис. 2.456

Прямоугольная система координат носит имя Рене Декарта (1596—1650). В 1637 г. вышла книга с длинным по обычаю времен названием «Рассуждение о методе, позволяющем направлять разум и отыскивать истину в науках. Кроме того, Диоптрика, Метеоры и Геометрия, которые являются приложениями этого метода», с ней в науку вошел метод координат. Со времен Декарта алгебра и геометрия стали сотрудничать между собой к выгоде обеих дисциплин. Введенную систему координат с тех пор стали называть декартовой.

104. Координаты середины отрезка.

Рассмотрим отрезок P_1P_2, принадлежащий оси Ox. Пусть P — середина этого отрезка и пусть наши три точки имеют соответственно координаты x_1, x и x_2 ($x_1 < x_2$) (рис. 2.457). Выразим x через x_1 и x_2.

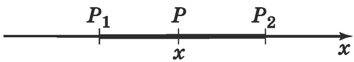


Рис. 2.457

Дано, что

1. $P_1P = PP_2$ (дано) (рис. 2.457).
2. $P_1P = |x - x_1| = x - x_1$; $PP_2 = |x_2 - x| = x_2 - x$ (запись отрезка в координатах на прямой).
3. $x - x_1 = x_2 - x$, или $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ (1, 2).

Эта формула годится и в случае, когда $x_2 < x_1$.

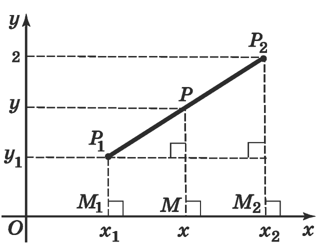


Рис. 2.458

Рассмотрим случай, когда отрезок P_1P_2 произвольно расположен на плоскости (рис. 2.458).

1. Точка P является серединой отрезка P_1P_2 (дано) (рис. 2.458).

2. Построим проекции точек P_1, P и P_2 на ось Ox, получим точки M, M_1, M_2 (построение).

3. Точка M является серединой отрезка M_1M_2.

4. $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ (3, формула середины отрезка на прямой).

Аналогично можно получить, что $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Все это можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 1. Даны точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$. Серединой отрезка P_1P_2 является точка $P = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

105. Формула расстояния между точками. Пусть мы знаем координаты двух точек $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ на плоскости (рис. 2.459). Имеет место следующая теорема.

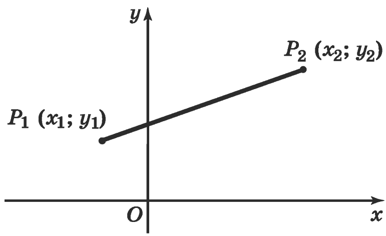


Рис. 2.459

Теорема 2. Расстояние между точками $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ находится по формуле

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Например, если $P_1(3, 4)$ и $P_2(-2, 1)$, то из полученной формулы следует, что

$$P_1P_2 = \sqrt{(-2-3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}.$$

Формула расстояния между точками верна и в пространстве. Пусть даны две точки $P(x_1, y_1, z_1)$ и

$Q(x_2, y_2, z_2)$. Расстояние между точками P и Q находится по формуле

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Пример. Докажите, что середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена от его вершин.

Решение. Из условия задачи имеем:

$\left.\begin{array}{l}\text{1. } \triangle ABC\text{, его стороны обозначим} \\ \text{через } a, b \text{ и } c. \\ \text{2. } CD = BD.\end{array}\right\}$ дано (рис. 2.460)

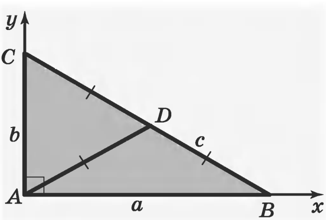


Рис. 2.460

3. $CD = AD$ (требуется доказать).

Мы хотим применить для решения задачи декартову систему координат, а значит, надо удачно выбрать расположение этой системы.

4. Для данной задачи удачный выбор системы координат показан на рисунке 2.460. Начало координат помещено в точку A, а оси проведены через точки B и C так, чтобы эти точки лежали на положительных лучах осей (построение).

5. Точка B имеет координаты $(a, 0)$, точка C — $(0, b)$ (1, 4).

6. Середина отрезка CB точка D имеет координаты $D = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ (1, формула середины отрезка).

7. $AD = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ (4, 6, формула расстояния между точками).

8. $CD = \sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2+\left(\frac{b}{2}-b\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (5, 6, формула расстояния между точками).

9. $CD = BD$ (7, 8).

§ 23. Уравнения фигур

106. Понятие уравнения фигур. Название этого раздела означает: геометрические фигуры можно задавать уравнениями (некоторые фигуры можно задавать неравенствами).

Известно, что точки плоскости и пространства задаются их координатами, геометрические фигуры могут задаваться уравнениями или неравенствами: $ax + by + c = 0$ — уравнение прямой; $x^2 + y^2 = a^2$ — уравнение окружности; $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ — уравнение сферы и т. д.

Говорят, что фигура F задается уравнением в прямоугольных координатах, если точка принадлежит фигуре F тогда и только тогда, когда координаты этой точки удовлетворяют данному уравнению. Это означает, что выполняются два условия:

1. Если точка принадлежит фигуре F, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению.

2. Если числа x, y, z удовлетворяют данному уравнению, то точка с такими координатами принадлежит фигуре F.

Второе условие можно выразить иначе: координаты любой точки, не принадлежащей фигуре F, не удовлетворяют данному уравнению.

Например, прямая, перпендикулярная оси Ox и проходящая через точку $M(2, 0)$, на оси Ox задается

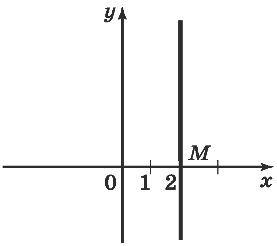


Рис. 2.461

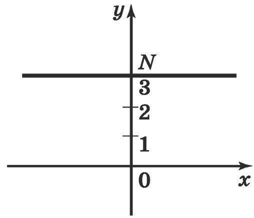


Рис. 2.462

уравнением $x = 2$ (рис. 2.461). Действительно, каждая точка, лежащая на этой прямой, имеет одну и ту же координату 2. А любая точка, не лежащая на этой прямой, имеет другое значение координаты x, нежели 2. Ось Oy задается уравнением $x = 0$.

Аналогично прямая, перпендикулярная оси Oy и проходящая через точку $N(0, 3)$, имеет уравнение $y = 3$ (рис. 2.462). Ось Ox имеет уравнение $y = 0$.

107. Уравнение прямой.

Можно доказать такую теорему.

Теорема 3. Любая прямая в декартовой системе координат xOy имеет уравнение вида $ax + by + c = 0$, где a, b, c — некоторые числа.

Выясним, как расположена прямая относительно осей координат, если ее уравнение $ax + by + c = 0$ имеет тот или иной частный вид.

1. $a = 0$, $b \neq 0$. В этом случае уравнение прямой можно переписать так: $y = -\frac{c}{b}$.

Таким образом, все точки прямой имеют одну и ту же ординату $-\frac{c}{b}$; следовательно, прямая параллельна оси x (рис. 2.463). В частности, если $c = 0$, то прямая совпадает с осью Ox.

2. $b = 0$, $a \neq 0$. Этот случай рассматривается аналогично. Прямая параллельна оси Oy (рис. 2.464) и совпадает с ней, если и $c = 0$.

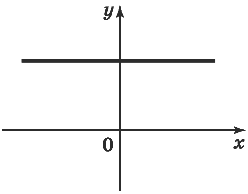


Рис. 2.463

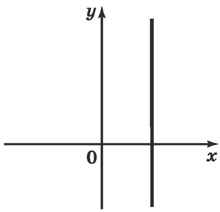


Рис. 2.464

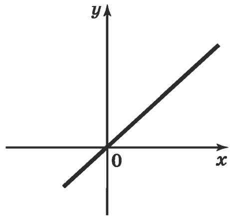


Рис. 2.465

3. $c = 0$. Прямая проходит через начало координат, так как его координаты (0; 0) удовлетворяют уравнению прямой (рис. 2.465).

Если в общем уравнении прямой $ax + by + c = 0$ коэффициент при y не равен нулю, то это уравнение можно разрешить относительно y. Получим: $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Или, обозначая $-\frac{a}{b} = k$, $-\frac{c}{b} = d$, получим: $y = kx + d$.

Коэффициент k в уравнении прямой с точностью до знака равен тангенсу острого угла, который образует прямая с осью Ox. В уравнении прямой, изображенной на рисунке 2.466, $k > 0$.

Коэффициент k в уравнении прямой называют *угловым коэффициентом прямой*.

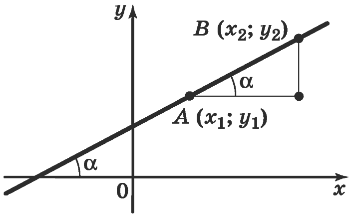


Рис. 2.466

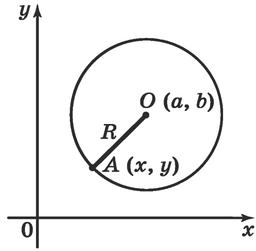


Рис. 2.467

108. Уравнения окружности и сферы. Составим уравнение окружности с центром в точке $O(a, b)$ и радиусом R (рис. 2.467).

1. Возьмем произвольную точку $A(x, y)$ на окружности. Расстояние от нее до центра O равно R.

2. Квадрат расстояния от точки A до точки O равен $(x - a)^2 + (y - b)^2$ (формула расстояния между точками).

3. Координаты x, y каждой точки A окружности удовлетворяют уравнению

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

(2, определение окружности).

Получили искомое уравнение. Обратно: любая точка A, координаты которой удовлетворяют уравнению окружности, принадлежит окружности, так как расстояние от нее до точки O равно R. Отсюда следует, что данное уравнение действительно является уравнением окружности с центром в точке O и радиусом R.

Заметим, что если центром окружности является начало координат, то уравнение окружности имеет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Выведем теперь *уравнение сферы*. Пусть в пространстве введена прямоугольная система координат и задана сфера S с центром $A(a,\ b,\ c)$ и радиусом R. Эта сфера есть множество точек M, для которых расстояние от A равно R, т. е. $AM = R$ (рис. 2.468).

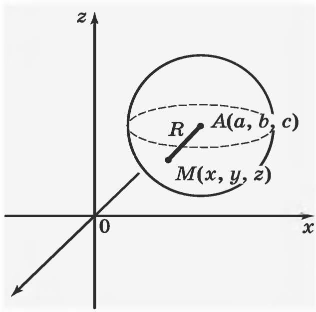


Рис. 2.468

Пусть x, y, z — координаты точки M. Согласно формуле расстояния между точками в пространстве, предыдущее равенство можно записывать в координатах так:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)} = R,$$

или

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2.$$

Это и есть уравнение сферы S с центром $A(a,\ b,\ c)$ и радиусом R, т. е. множество точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, представляет собой сферу S (рис. 2.468).

Если центр A находится в начале координат, т. е. $a = b = c = 0$, то уравнение получает простой вид:

$$x^2+y^2+z^2 = R^2.$$

Рассмотрим шар с центром $A(a,\ b,\ c)$ и радиусом R (рис. 2.469). По определению, это множество точек M, для которых $AM \leqslant R$, т. е. $AM^2 \leqslant R^2$. Выражая расстояние AM через координаты точки $M(x,\ y,\ z)$, получим:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \leqslant R^2.$$

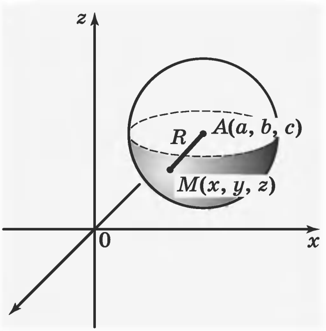


Рис. 2.469

Это неравенство задает шар S с центром $A(a, b, c)$ и радиусом R, так как оно равносильно неравенству $AM \leqslant R$, задающему такой шар по самому его определению.

Если центр шара находится в начале координат, то уравнение шара упрощается и имеет вид:

$$x^2 + y^2 + r^2 \leqslant R^2.$$

П р и м е р 1. Два предприятия A и B производят продукцию с одной и той же ценой m за одно изделие. Однако автопарк, обслуживающий предприятие A, оснащен более современными и более мощными грузовыми автомобилями. В результате транспортные расходы на перевозку одного изделия составляют для предприятия A 10 руб. на 1 км, а для предприятия B 20 руб. на 1 км. Расстояние между предприятиями 300 км. Как территориально должен быть разделен рынок сбыта между двумя предприятиями для того, чтобы расходы потребителей при покупке изделий были минимальными?

Р е ш е н и е.

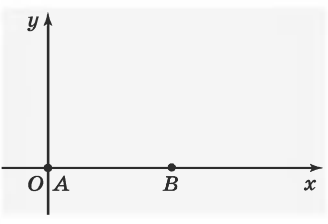


Рис. 2.470

1. Выберем систему координат так, чтобы ось Ox проходила через пункты A и B, а ось Oy — через точку A (построение) (рис. 2.470).

2. Пусть N — произвольная точка, s_1 и s_2 — расстояния от точки N до предприятий A и B (рис. 2.471).

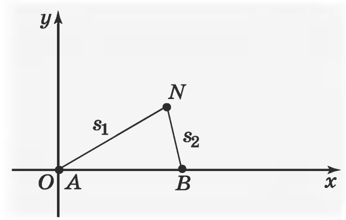


Рис. 2.471

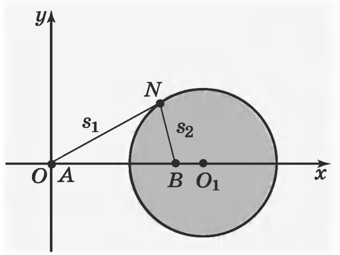


Рис. 2.472

3. При доставке груза из пункта A расходы равны $m + 10s_1$ (1,2).

4. При доставке груза из пункта B расходы равны $m + 20s_2$ (1,2).

5. Если для пункта N выгоднее доставлять груз с предприятия A, то $m + 10s_1 < m + 20s_2$, откуда $s_1 < 2s_2$, в обратном случае получим $s_1 > 2s_2$ (3,4).

6. Таким образом, границей этих двух областей для каждой точки, до которой расходы на перевозку груза из пунктов A и B равны, будет множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению $s_1 = 2s_2$. (5)

7. Выразим s_1 и s_2 через координаты:

$s_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$, $s_2 = \sqrt{(300 - x)^2 + y^2}$ (1,2, формула расстояния между точками).

8. Имея в виду равенство из п. 6, получим:

$$(x - 400)^2 + y^2 = 200^2 \text{ (6,7).}$$

9. Это есть уравнение окружности (рис. 2.472).

Следовательно, для всех пунктов, попадающих во внутреннюю область круга, выгоднее привозить груз из пункта B, а для всех пунктов, попадающих во внешнюю часть круга, — из пункта A.

Пример 2. Два наблюдаемых пункта находятся в точках $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Пункт наблюдения O находится на прямой AB и удален от точки A на расстояние a км, а от B на расстояние c км ($c > a$). Наблюдатель для безопасности должен идти по такому пути, чтобы расстояние от него до пункта A все время оставалось в два раза больше, чем расстояние от него до пункта B. По какой линии должен идти наблюдатель?

Решение.

Из условий задачи имеем:

1. Два наблюдаемых пункта находятся в точках $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.

2. Пункт наблюдения O находится на прямой AB и удален от A на расстоянии a км, а от B — c км ($c > a$).

3. Наблюдатель идет так, чтобы расстояние до пункта A было в два раза больше, чем до B.

4. По какой линии должен идти наблюдатель?

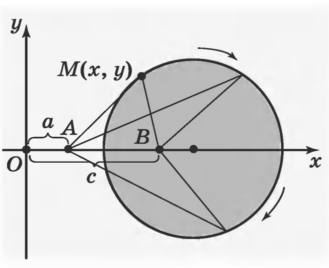


Рис. 2.473

5. Примем за начало координат наблюдательный пункт O и направление оси Ox будет проходить через пункты A и B (по условию задачи эти три точки находятся на одной прямой) (рис. 2.473).

6. Пусть наблюдатель находится в точке $M(x, y)$. Вычислим расстояние от наблюдателя до пунктов A и B (рис. 2.473):

$$MA = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}\,, \; MB = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}\,.$$

(1, 2, 3, 5, формула расстояния между точками).

7. По условию задачи имеем: $MA = 2MB$, т. е.

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2} = 2\sqrt{(c-x)^2+y^2} \text{ (3, 6).}$$

8. Решая это уравнение, получим:

$$(x-a)^2 + y^2 = 4((c-x)^2 + y^2) \text{ (7).}$$

9. Раскроем скобки и перегруппируем:

$$3y^2 + 3\left(x + \frac{a-4c}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}(a^2 - 2ac + c^2),$$

$$y^2 + \left(x + \frac{a-4c}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}(c-a)^2.$$

10. Наблюдатель должен идти по окружности с центром $\left(-\frac{a-4c}{3}, 0\right)$ и радиусом $\frac{2}{3}(c-a)$ (4, уравнение окружности).

ВЕКТОРЫ

§ 24. Векторы и операции с ними

109. Понятие вектора. Векторы — это очень важное понятие, которое широко используется математиками и физиками.

Прежде всего, понятие вектора тесно связано с *изучением векторных величин*.

Некоторые величины в математике и физике, такие, как расстояние, площадь, объем, температура, работа, масса, характеризуются в процессе их измерения только соответствующим числом, при этом такая характеристика полная. Такие величины в математике называют *скалярными*. Значения скалярных величин могут быть однозначно отмечены на координатной прямой или шкале.

Но есть и достаточно много других величин, таких, как перемещение, скорость, ускорение, сила, напряжение и др., для характеристики которых числа (числового значения) мало. Необходимо знать еще направление, в котором осуществляется действие этой величины. Поэтому все данные величины относятся к так называемым *векторным величинам*, которые характеризуются численным значением и направлением. Векторы придумали для того, чтобы изображать и применять векторные величины.

Рассмотрим пример.

Подъемный кран Φ за некоторый промежуток времени сместился вправо на расстояние 40 м (рис. 2.474). Это означает, что все его точки смес-

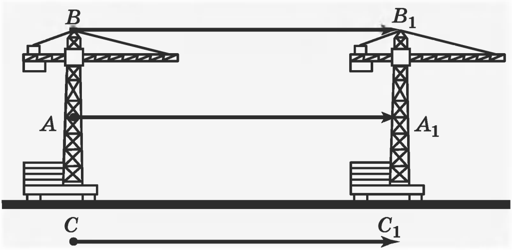


Рис. 2.474

тились вправо на 40 м. На рисунке это показано стрелками: двумя, выходящими из вершины крана B и из точки крана A, и одной общей стрелкой внизу рисунка. Таким образом, в данном примере фигура Φ при параллельном переносе в направлении луча AA_1 на расстояние AA_1 перешла в фигуру Φ_1, а точка A перешла в точку A_1, точка B перешла в точку B_1 и т. д.

Итак,

1) лучи AA_1, BB_1 и CC_1 сонаправленные;

2) расстояния AA_1, BB_1 и CC_1 равны, $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

В математике и физике такие отрезки принято называть *направленными*, это привело к появлению понятия вектора.

Определение. *Вектором* называют отрезок, на котором указано направление (одно из двух возможных).

Кратко говорят: *вектор* — это *направленный отрезок*. Первый по этому направлению конец отрезка называют *началом вектора* (или точкой приложения), второй — его *концом*. Вектор записывается обозначениями начала и конца слева направо (рис. 2.475), а сверху ставится черточка: $\overline{AB}$.

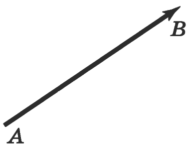


Рис. 2.475

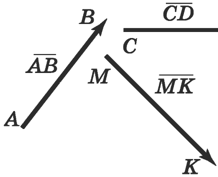


Рис. 2.476

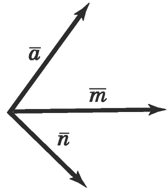


Рис. 2.477

На рисунке 2.476 изображено несколько векторов: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{MK}$. Направления этих векторов указаны стрелками. Иногда векторы обозначают просто малыми жирными буквами или над буквами тоже ставят черту (рис. 2.477).

Определение. Два вектора называют *коллинеарными*, если изображающие их направленные отрезки параллельны или лежат на одной прямой.

Коллинеарные векторы либо одинаково направлены, либо противоположно направлены.

На рисунке 2.478 векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ коллинеарные, а на рисунке 2.479 векторы $\bar{a}$ и $\bar{n}$ неколлинеарные.

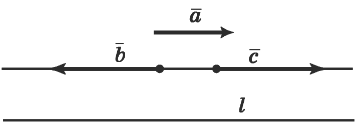


Рис. 2.478

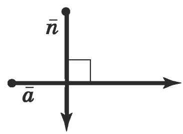


Рис. 2.479

Кроме понятия коллинеарности векторов, вводится понятие компланарности векторов.

Определение. Три вектора называют *компланарными*, если изображающие их направленные отрезки лежат в параллельных плоскостях или в одной плоскости.

На рисунке 2.480 векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны, так как точки O, A, B и C лежат в одной плоскости. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{d}$ не компланарны, так как точки A, B, D и O не лежат в одной плоскости.

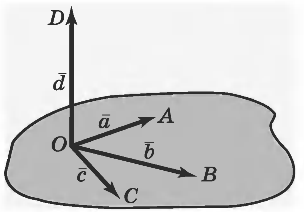


Рис. 2.480

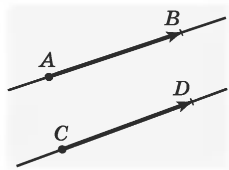


Рис. 2.481

110. Равенство векторов. Дадим определение *равных векторов*.

Определение. Вектор $\overline{AB}$ *равен* вектору $\overline{CD}$, если длины отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны и они одинаково направленные (сонаправленные).

Равенство векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ записывается так: $\overline{AB} = \overline{CD}$. Эта запись означает, что:

1) луч AB сонаправлен лучу CD;

2) длины отрезков AB и CD равны (рис. 2.481).

Определение. Длину направленного отрезка — вектора — называют *модулем* или *абсолютной величиной вектора*.

Для модуля векторов употребляется тот же знак, что и для модуля чисел. Запись $|\bar{a}| = 5$ читается: модуль (или длина) вектора $\bar{a}$ равен 5.

Процесс изображения векторов часто называют *откладыванием вектора от точки*.

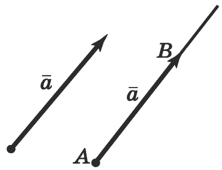


Рис. 2.482

Отложить от данной точки вектор, равный данному, значит построить направленный отрезок с началом в этой точке, изображающий данный вектор.

На рисунке 2.482 от точки A отложен вектор $\overline{AB}$, равный вектору $\bar{a}$.

Теорема 1 (*об откладывании вектора*). **От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.**

Определение. Если начало вектора совпадает с его концом, то такой вектор называют *нулевым*.

Нулевой вектор обозначается нулем с черточкой сверху: $\bar{0}$. Из определения следует, что модуль нулевого вектора равен нулю, а направления он не имеет. Нулевой вектор иногда называют также *нуль-вектором*. Изображается нулевой вектор любой точкой, которая рассматривается как начало и конец этого вектора.

111. Сложение векторов. Первой операцией над векторами является *сложение векторов*.

Если материальная точка переместилась из точки A в точку B, а потом из точки B в точку C, то в результате она перейдет из точки A в точку C. Поэтому, естественно, говорят, что направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, характеризующие эти перемещения, складываясь, дают направленный отрезок $\overline{AC}$ (рис. 2.483). Это записывается так:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

В этом случае мы видим, что *процесс сложения векторов* происходит так: конец первого вектора $\overline{AB}$ является началом второго $\overline{BC}$, а суммарный вектор $\overline{AC}$ соединяет начало первого вектора и конец второго.

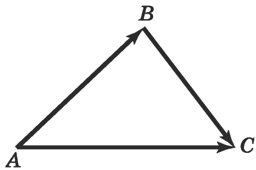


Рис. 2.483

Например, даны два вектора $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$, задающие некоторые векторные величины, например силы (рис. 2.484). Чтобы сложить эти векторы, нужно:

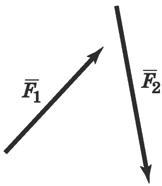


Рис. 2.484

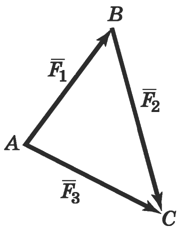


Рис. 2.485

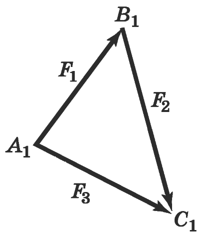


Рис. 2.486

1. Выбрать исходную точку A (возможно, ту точку, к которой приложена заданная сила).

2. От точки A отложить вектор $\overline{AB}$, равный $\overline{F_1}$, $\overline{AB} = \overline{F_1}$.

3. От точки B отложить вектор $\overline{BC}$, равный $\overline{F_2}$, $\overline{BC} = \overline{F_2}$.

4. Построить вектор $\overline{AC}$, равный $\overline{F_3}$ ($\overline{F_3}$ — сумма векторов $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$. $\overline{AC} = \overline{F_3} = \overline{F_1} + \overline{F_2} = \overline{AB} + \overline{BC}$ (рис. 2.485)).

Теперь отложим вектор $\overline{F_1}$ от точки A_1 (рис. 2.486). В этом случае в качестве суммы векторов $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ получим вектор $\overline{A_1C_1} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$. Можно доказать, что векторы $\overline{AC}$ и $\overline{A_1C_1}$ равны, т. е. $\overline{AC} = \overline{A_1C_1} = \overline{F_3}$.

Таким образом, мы получили *правило треугольника* для сложения векторов.

Можно рассмотреть такой пример. Пусть, двигаясь горизонтально со скоростью $|\overline{v}| = 3$ м/с, кран поднимает ящик со скоростью $|\overline{v_1}| = 1$ м/с. На рисунке 2.487 изображены в масштабе скорость ящика относительно крана $\overline{v_1}$, направленная вертикально вверх, и скорость движения крана $\overline{v}$, направление которой совпадает с направлением движения крана. Сумма векторов $\overline{v}$ и $\overline{v_1}$ — вектор $\overline{u}$, который изображает скорость ящика относительно неподвижной системы отсчета: $\overline{u} = \overline{v} + \overline{v_1}$.

Пусть нам даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, которые неколлинеарны, то есть не лежат на одной прямой (рис. 2.488). Отложим эти вектора от некоторой точки A, то есть $\overline{AB} = \overline{a}$ и $\overline{AD} = \overline{b}$ (рис. 2.489).

Тогда суммарный вектор изобразится диагональю параллелограмма $ABCD$, построенного на векторах $\overline{AB} = \overline{a}$ и $\overline{AD} = \overline{b}$, $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$.

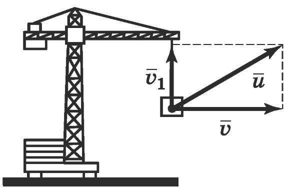


Рис. 2.487

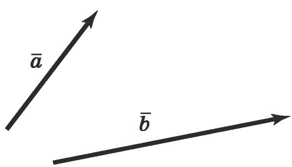


Рис. 2.488

Мы получили второе правило сложения векторов — *правило параллелограмма*: если векторы неколлинеарны, то их сумма представляется диагональю построенного на них параллелограмма.

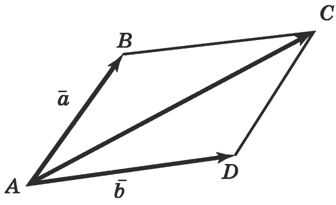


Рис. 2.489

Для операции сложения векторов выполняются следующие свойства.

Теорема 2 (*переместительный закон*, или *коммутативность сложения*). Для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}.$$

Теорема 3 (*сочетательный закон*, или *ассоциативность сложения*). Для любых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}).$$

Эти законы выполняются и для коллинеарных векторов.

Из сочетательного и переместительного законов следует, что, складывая любое число векторов, можно как угодно переставлять и группировать слагаемые. Чтобы сложить несколько векторов, например векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$, удобно построить векторную ломаную (рис. 2.490). Эта ломаная состоит из направленных отрезков $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{BC} = \bar{b}$, $\overline{CD} = \bar{c}$, $\overline{DE} = \bar{d}$. Вектор $\overline{AE}$, соединяющий начало ломаной $ABCDE$ и ее конец, и является суммой $\overline{AE} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}$.

Если ломаная получилась замкнутой, то сумма векторов равна нуль-вектору (рис. 2.491), т. е. $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d} = \bar{0}$.

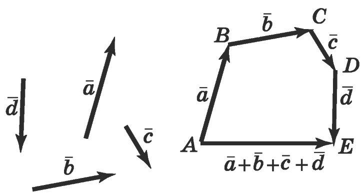


Рис. 2.490

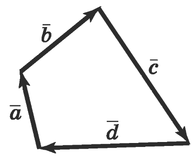


Рис. 2.491

Отметим важное свойство нуль-вектора: для любого вектора $\bar{a}$ выполняется равенство $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$.

112. Правило параллелепипеда сложения векторов. Пусть даны три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, не лежащие в одной плоскости (их называют некомпланарными) (рис. 2.492).

Выполним следующие построения.

1. Отложим от произвольной точки O векторы $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{OB} = \bar{b}$, $\overline{OC} = \bar{c}$ (построение) (рис. 2.493).

2. Построим параллелепипед так, чтобы отрезки OA, OB, OC были его ребрами (построение) (рис. 2.494).

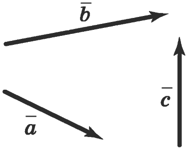


Рис. 2.492

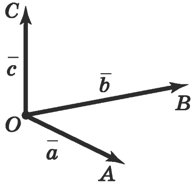


Рис. 2.493

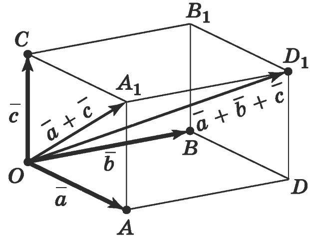


Рис. 2.494

3. $\bar{a} + \bar{c} = \overline{OA_1}$ (2, правило параллелограмма).

4. $\overline{A_1D_1} = \bar{b}$ (2, определение равенства векторов).

5. $(\bar{a} + \bar{c}) + \bar{b} = \overline{OD_1}$ (3, 4, правило параллелограмма).

Таким образом, сумма трех векторов, не параллельных одной плоскости, представляется диагональю параллелепипеда, построенного на данных векторах, отложенных от одной точки, как на ребрах (рис. 2.494).

Получили *правило параллелепипеда для сложения векторов в пространстве*.

113. Разность векторов. Введем операцию разности двух векторов. Эта операция вводится так же, как и для чисел.

Определение. Разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называют такой вектор $\bar{c}$, что $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$.

Разность векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначается, как и для чисел, $\bar{a} - \bar{b}$.

Построим разность двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 2.495).

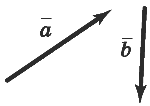


Рис. 2.495

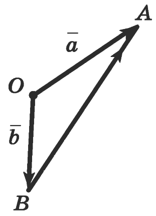


Рис. 2.496

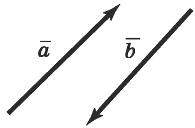


Рис. 2.497

Отложим от какой-нибудь точки O данные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\overline{OA} = \bar{a}$ и $\overline{OB} = \bar{b}$ (рис. 2.496). Рассмотрим вектор $\overline{BA}$, мы видим, что $\overline{OB} + \overline{BA} = \overline{OA}$ (правило треугольника). Вектор $\overline{BA}$ будет разностью векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, т. е. $\overline{BA} = \overline{OA} - \overline{OB} = \bar{a} - \bar{b}$. Если вектор $\overline{BA}$ обозначить через $\bar{c}$, то $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$.

Равенство $\overline{OA} - \overline{OB} = \overline{BA}$ можно назвать *правилом нахождения разности двух векторов*.

Определение. Два ненулевых вектора называют *противоположными*, если их длины равны и они направлены противоположно.

На рисунке 2.497 изображены два противоположных друг другу вектора.

Нуль-вектор считается противоположным самому себе.

Вектор, противоположный вектору $\bar{a}$, обозначается $-\bar{a}$ (читается: «минус a»).

Для вектора $\overline{AB}$ противоположным ему будет вектор $\overline{BA}$.

Теорема 4. Если сложить противоположные векторы (по правилу треугольника), то в сумме получится нуль-вектор, то есть $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$.

Верно и обратное утверждение: если сумма двух векторов равна нуль-вектору, то они *противоположны*.

114. Умножение вектора на число. В геометрии части возникает потребность в сложении двух, трех или более одинаковых векторов: $\bar{a} + \bar{a}$, $\bar{a} + \bar{a} + \bar{a}$, $\bar{a} + \bar{a} + \bar{a} + \bar{a}$ и т. д. Такие суммы, как и в алгебре, удобно записывать $2\bar{a}$, $3\bar{a}$, $4\bar{a}$ и т. д. Эта процедура подсказывает определение операции *умножения вектора на число*.

Определение. Пусть даны ненулевой вектор $\bar{a}$ и число $x \neq 0$. Произведением вектора $\bar{a}$ на число x называют такой вектор $x\bar{a}$, который, во-первых, имеет длину $|x| \cdot |\bar{a}|$ и, во-вторых, сонаправлен с вектором $\bar{a}$, если $x > 0$, и направлен противоположно вектору $\bar{a}$, если $x < 0$.

Итак, если $\bar{b} = x\bar{a}$, причем $\bar{a} \neq 0$ и $x \neq 0$, то:

1) $|\bar{b}| = |x| \cdot |\bar{a}|$.

2) $\bar{b} = x\bar{a}$, $\bar{b}$ сонаправлен с $\bar{a}$, если $x > 0$, и $\bar{b}$ противоположно направлен с $\bar{a}$, если $x < 0$ (рис. 2.498).

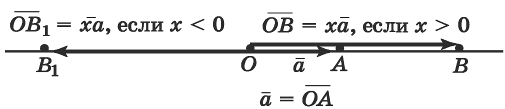


Рис. 2.498

3) Если $\bar{a} = 0$ или $x = 0$, то вектор $x\bar{a} = \bar{0}$.

Для операции умножения вектора на число выполняются следующие свойства:

1. $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$.
2. $x(y\bar{a}) = (xy)\bar{a}$.
3. Если $x\bar{a} = y\bar{a}$ и $\bar{a} \neq \bar{0}$, то $x = y$.
4. $0 \cdot \bar{a} = \bar{0}$.
5. $(-1)\bar{a} = -\bar{a}$.

Векторы часто помогают изучать геометрические факты; для этого нужно научиться переводить геометрические факты на векторный язык, и наоборот, уметь векторное выражение перевести на язык геометрии.

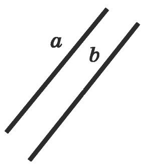


Рис. 2.499

Предположим, что нам нужно доказать, что прямые a и b параллельны (рис. 2.499). Рассмотрим векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, принадлежащие соответственно прямым a и b (рис. 2.500) (векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ могут иметь и противоположные направления).

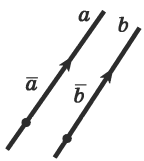


Рис. 2.500

Если мы докажем, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, то по определению коллинеарности векторов получим, что прямые a и b параллельны.

Можно доказать теорему о коллинеарных векторах.

Теорема 5. Вектор $\bar{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\bar{a}$ тогда и только тогда, когда $\bar{b} = x\bar{a}$.

Следствие (*о векторах на прямой*). **Два вектора, отложенные от одной и той же точки, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда один из них получается из другого умножением на число.**

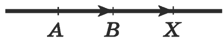


Рис. 2.501

Другими словами, точка X лежит на прямой AB тогда и только тогда, когда $\overline{AX} = k\overline{AB}$ (рис. 2.501).

Есть еще два более сложных свойства операций над векторами, которые относятся уже к двум операциям над векторами: сложением и умножением на число. Это два *распределительных (или дистрибутивных) закона*.

6. $(x + y) \cdot \bar{a} = x\bar{a} + y\bar{a}$.

7. $x(\bar{a} + \bar{b}) = x\bar{a} + x\bar{b}$.

Оба эти свойства относятся к плоскости, так как выполняющиеся в них действия производятся с векторами, параллельными одной плоскости (или лежащими в одной плоскости). Если отложить эти векторы от одной точки, то изображающие их направленные отрезки окажутся лежащими в одной плоскости. Более того, свойство 6 касается лишь векторов, параллельных одной прямой (или лежащих на одной прямой). Оно непосредственно вытекает из определений сложения векторов и умножения векторов на число.

115. Скалярное произведение векторов.

Если даны два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 2.502), то углом между этими векторами называют угол, образованный направленными отрезками $\bar{a}$ и $\bar{b}$, отложенными от некоторой точки O (рис. 2.503).

При этом рассматривают так называемый *выпуклый угол* (угол, имеющий меньшую величину). Иногда угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначают так: $\angle(\bar{a}$ и $\bar{b}) = 30°$ читают: угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 30°.

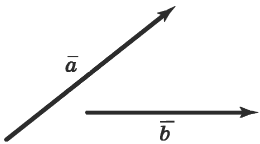


Рис. 2.502

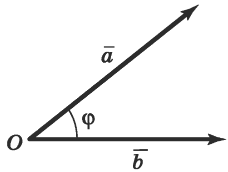


Рис. 2.503

Определение. *Углом между двумя ненулевыми векторами* называют угол между соответствующими им направленными отрезками, исходящими из одной точки. Угол между противоположно направленными векторами равен 180°, а между сонаправленными — 0°.

Определение. *Скалярным произведением* двух ненулевых векторов называют произведение длин этих векторов на косинус угла между ними. Если хотя бы один из двух векторов нулевой, то их скалярное произведение равно 0.

Если угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен φ, то их скалярное произведение $S = \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi$.

1. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны, т. е. $\bar{a} = \bar{b}$, то пишут $S = \bar{a}^2$ и говорят о *скалярном квадрате вектора*. В этом случае $\cos\varphi = 1$, т. е. $S = |\bar{a}|^2$. Итак, скалярный квадрат вектора совпадает с квадратом его длины: $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$.

2. Если $\bar{a} \perp \bar{b}$, то получаем $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$. Можно сформулировать такой *признак*: векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны в том и только в том случае, когда их скалярное произведение равно нулю.

3. $\bar{a} \cdot \bar{a} \geqslant 0$; при этом из $\bar{a} \cdot \bar{a} = 0$ следует $\bar{a} = 0$. Это свойство следует из первого свойства.

4. $(\lambda\bar{a} \cdot \bar{b}) = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b})$.

5. Скалярное умножение связано со сложением векторов *распределительным (дистрибутивным) законом*: $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$.

116. Разложение вектора на составляющие.

При изучении и использовании векторов часто приходится говорить о так называемом *разложении вектора на составляющие*.

Определение. *Составляющими данного вектора* называют такие векторы, сумма которых равна этому вектору.

Данный вектор «составляется» из составляющих как сумма слагаемых и разлагается на них как на слагаемые, поэтому говорят о разложении на составляющие.

Пусть в плоскости α даны две прямые a и b, пересекающиеся в точке O. Возьмем какой-нибудь вектор $\bar{v}$ и отложим его от точки O (рис. 2.504), $\overline{OV} = \bar{v}$. Если точка V не лежит ни на прямой a, ни на прямой b, то проведем через точку V прямые $VA \parallel b$ и $VB \parallel a$ и построим параллелограмм $OAVB$. Его диагональю будет отрезок

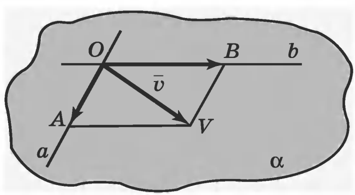


Рис. 2.504

OV, а его стороны OA и OB лежат соответственно на прямых a и b. По правилу параллелограмма для сложения векторов получим

$$\overline{OV} = \overline{OA} + \overline{OB}.$$

Векторы $\bar{a} = \overline{OA}$ и $\bar{b} = \overline{OB}$ являются составляющими вектора $\bar{v} = \overline{OV}$ по прямым a и b, $\overline{v_a} + \overline{v_b} = \bar{v}$, $\overline{v_a} \parallel a$, $\overline{v_b} \parallel b$.

Если $V \in a$, то $\bar{v} \parallel a$, $\overline{v_a} = \bar{v} = \overline{OV}$, а составляющая по b нулевая: $\overline{v_b} = 0$. Аналогично в случае, когда $V \in b$, $\bar{v} \parallel b$, $\overline{v_a} = \bar{0}$ и $\overline{v_b} = \bar{v} = \overline{OV}$.

Мы выполнили *разложение вектора по двум пересекающимся прямым.*

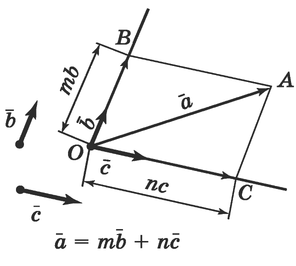


Рис. 2.505

Можно разложить вектор по двум неколлинеарным векторам.

Возьмем два неколлинеарных вектора $\bar{b}$ и $\bar{c}$ и отложим их от точки O (рис. 2.505). Пусть $\bar{a}$ — вектор, параллельный плоскости OBC; отложим его от точки O, $\overline{OA} = \bar{a}$. Через точку A проведем прямые, параллельные векторам $\bar{b}$ и $\bar{c}$, тогда $\bar{a} = \overline{OB} + \overline{OC}$.

Векторы $\overline{OB}$ и $\bar{b}$, $\overline{OC}$ и $\bar{c}$ коллинеарны, значит, $\overline{OB} = m\bar{b}$, $\overline{OC} = n\bar{c}$, и потому $\bar{a} = m\bar{b} + n\bar{c}$.

Такое представление вектора $\bar{a}$ через векторы $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называют *разложением вектора по неколлинеарным векторам*.

Можно доказать единственность такого разложения.

Если допустить, что есть другое разложение: $\bar{a} = m_1\bar{b} + n_1\bar{c}$, где $m \neq m_1$, $n \neq n_1$, то $m\bar{b} + n\bar{c} = m_1\bar{b} + n_1\bar{c}$, и тогда $m = m_1$, $n = n_1$, то есть разложение то же.

§ 25. Координаты вектора

117. Координаты вектора. Для введения понятия *координат вектора* следует рассмотреть возможность разложения вектора по осям координат. Мы хотим каждый вектор задать парой чисел — *проекциями этого вектора на оси координат*. При таком подходе действия над векторами можно свести к действиям с парами чисел.

Определим *проекции вектора на координатную ось*. Пусть задана координатная ось Ox. Единичный отрезок OE теперь будем считать *единичным вектором* $\bar{i} = \overline{OE}$, т. е. вектором, длина которого равна 1 (рис. 2.506).

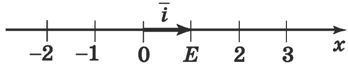


Рис. 2.506

Возьмем любой вектор $\bar{a}$ и отложим его от некоторой точки A: $\overline{AB} = \bar{a}$. Спроектируем точки A и B на ось Ox. Получим точки A_1, B_1 и состав-

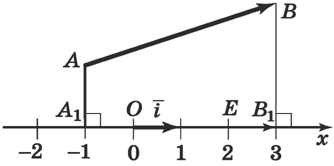


Рис. 2.507

ляющую A_1B_1 вектора $\overline{AB}$ по оси Ox (рис. 2.507). Ее длина со знаком «плюс» или «минус» и называют проекцией вектора $\bar{a}$ на ось Ox.

Определение. Проекцией a_x вектора $\bar{a} = \overline{AB}$ на ось Ox называют длину его составляющей $\overline{A_1B_1}$ по этой оси, взятую со знаком «плюс» или «минус». При этом берется знак «плюс», если направление вектора $\overline{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси Ox, и знак «минус», если эти направления противоположны. Если $A_1B_1 = 0$, т. е. $A_1 = B_1$, то $a_x = 0$.

Проекция точки — точка, проекция отрезка — отрезок (или точка), а проекция вектора — число.

Вектор $\overline{A_1B_1}$ получается из коллинеарного ему единичного вектора $\bar{i}$ умножением на $\pm|\overline{A_1B_1}|$. При этом если $\overline{A_1B_1}$ сонаправлен с $\bar{i}$, то $\overline{A_1B_1} = |\overline{A_1B_1}|\bar{i}$. Если же $\overline{A_1B_1}$ противоположно направлен $\bar{i}$, то $\overline{A_1B_1} = -|A_1B_1|\bar{i}$.

Следовательно, имеет место равенство $\overline{A_1B_1} = a_x\bar{i}$.

Можно доказать следующие *свойства проекций векторов на ось*.

1. Равные векторы имеют равные проекции на заданную ось.

2. При сложении векторов их проекции на ось складываются.

3. При умножении вектора на число его проекция умножается на это число.

Прежде чем ввести понятие координат вектора, докажем теорему.

Теорема 6. Пусть на плоскости введена прямоугольная система координат с единичными векторами $\bar{i}$ и $\bar{j}$ координатных осей Ox и Oy. Пусть $\bar{a}$ — некоторый вектор, а a_x и a_y — его проекции на оси координат. Тогда вектор $\bar{a}$ единственным образом представляется в виде $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j}$ (рис. 2.508).

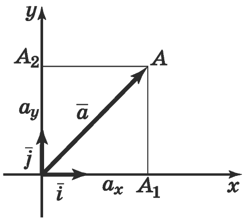


Рис. 2.508

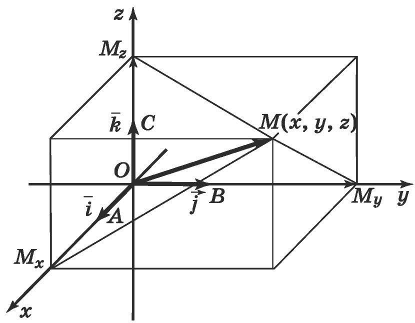


Рис. 2.509

Выше получена формула для разложения вектора $\bar{a}$ по векторам $\bar{i}$ и $\bar{j}$ (с учетом обозначения): $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j}$.

Пару чисел a_x и a_y называют *координатами вектора $\bar{a}$ в данной системе координат*.

Координаты вектора в пространстве определяются так же, как на плоскости. Справедлива следующая теорема.

Теорема 7. Пусть в пространстве введена прямоугольная система координат с единичными векторами $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ координатных осей Ox, Oy, Oz. Тогда вектор $\bar{a}$ единственным образом представляется в виде $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ (рис. 2.509).

Числа a_x, a_y, a_z называются *координатами вектора* $\bar{a}$ относительно векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, которые называются базисными векторами или, короче, *базисом.*

Введенные координаты вектора позволяют *получить формулу длины вектора.*

Рассмотрим рисунок 2.508.

1. Если точка A не лежит на координатных осях, то треугольник OAA_1 прямоугольный.

2. $OA^2 = OA_1^2 + A_1A^2$ (1, теорема Пифагора).

3. Так как $A_1A = OA_2$, то получаем, что $OA^2 = OA_1^2 + OA_2^2$ (2).

4. Но $OA = |\bar{a}|$, $OA_1 = |a_x|$, $OA_2 = |a_y|$, поэтому $|\bar{a}|^2 = |a_x|^2 + |a_y|^2$, т. е. $|\bar{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2$ (3, 4).

Формула справедлива и в тех случаях, когда точка A лежит на какой-то оси координат.

118. Свойства координат вектора. В курсе геометрии нам практически не приходится работать с векторами в координатах (это приходится делать в курсе физики). Можно доказать различные *свойства координат вектора*:

1. Координаты равных векторов соответственно равны. Обратно: векторы, имеющие соответственно равные координаты, равны.

2. При сложении векторов их соответствующие координаты складываются. А именно, если $\bar{a} = (a_x, a_y)$, $\bar{b} = (b_x, b_y)$ и $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, то $\bar{c} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$, т. е. $c_x = a_x + b_x$, $c_y = a_y + b_y$.

3. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число. А именно, если $\bar{a}$ = = (a_x, b_y), $\bar{b}$ = (b_x, b_y) и $\bar{b} = \alpha\bar{a}$, то $\bar{b} = (\alpha a_x, \alpha a_y)$, т. е. $b_x = \alpha a_x$, $b_y = \alpha a_y$.

Координаты вектора связаны с координатами точки по следующему правилу: чтобы найти координаты вектора, нужно от координат конца вектора отнять координаты начала вектора.

В частности, если вектор отложен от начала координат, то координаты вектора равны координатам его конца.

Возьмем в пространстве некую прямоугольную систему координат с началом в точке O и координатными осями x, y, z (рис. 2.510). Пусть A, B, C — точки с единичными координатами на этих осях, т. е. $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$. Тогда векторы $\bar{i} = \overline{OA}$, $\bar{j} = \overline{OB}$, $\bar{k} = \overline{OC}$ — это направляющие единичные векторы координатных осей x, y, z.

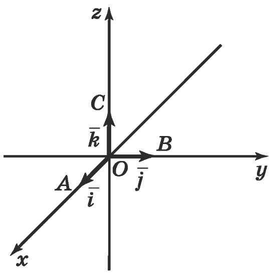


Рис. 2.510

Возьмем любую точку $M(x, y, z)$, и пусть $\overline{OM}$ — ее радиус-вектор.

Теорема 8. Координаты точки M соответственно равны координатам ее радиус-вектора $\overline{OM}$ относительно базиса $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$.

ОБЪЕМЫ И ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ФИГУР

§ 26. Объемы многогранников

119. Понятие объема фигур. *Объем* — это величина, удовлетворяющая следующим основным свойствам:

1. Каждая фигура имеет определенный объем, выраженный положительным числом.

2. Равные фигуры имеют равные объемы.

3. Если фигура разбита на несколько частей, то ее объем равен сумме объемов всех этих частей.

4. *Единицей измерения объема* является объем куба с длиной ребра e, где e — единица измерения длины. Этот объем обозначается e^3.

Если за единицу длины принимается 1 мм, то единицей объема является 1 мм^3 (кубический миллиметр); при единице длины 1 см единицей объема является 1 см^3 (кубический сантиметр). Если единицей измерения длины является 1 м, ему соответствует единица объема 1 м^3 (кубический метр).

5. Объем куба со стороной a равен a^3.

$$V_{\text{куба}} = a^3,$$

где a — ребро куба.

Мы будем говорить об *объемах многогранников*: кубе, прямоугольном параллелепипеде, призме, пирамиде и т. д.

Можно доказать теорему об объеме прямоугольного параллелепипеда:

Теорема 1. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

$$V_{\text{прям. парал.}} = a \cdot b \cdot c,$$

где a, b и c — его длина, ширина и высота.

Из доказанной теоремы можно вывести следующее следствие.

Следствие. Любую грань прямоугольного параллелепипеда можно принять за основание; тогда сторонами его основания будут соответствующие два измерения, а высотой — третье измерение. Следовательно, объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту.

$$V_{\text{прям. парал.}} = S \cdot h,$$

где S — площадь основания параллелепипеда, h — его высота.

120. Принцип Кавальери. Для вычисления объемов воспользуемся результатами, полученными итальянским математиком Бонавентура *Кавальери* (1598—1647), учеником Галилея, который сформулировал так называемый *«принцип Кавальери»* для вычисления объемов всех интересующих нас фигур. Поясним смысл этого принципа.

Представим себе физическую модель, очень похожую на четырехугольную пирамиду, сложенную из тонких (например, картонных) квадратиков последовательно убывающих размеров. На рисунке 2.511 изображена обычная пирамида, а на рис. 2.512 — приближенная ее модель из квадратных карточек.

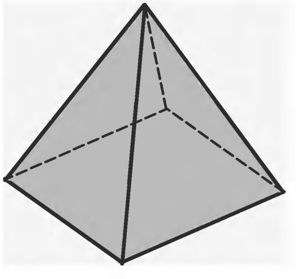


Рис. 2.511

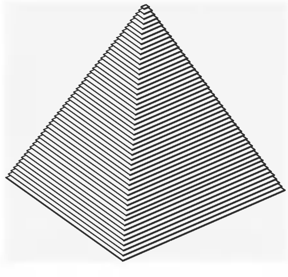


Рис. 2.512

Теперь допустим, что мы просверлили в предложенной модели узкое отверстие, ведущее от вершины к некоторой точке основания, и вставили в него стержень так, чтобы он пробивал каждую квадратную пластинку. Тогда можно, не меняя положения нижнего конца стержня на основании «пирамиды», наклонить стержень. Форма модели тогда изменится, но ее объем останется прежним. Дело в том, что объем нашей «пирамиды» — это просто общий объем всех квадратных пластинок, а этот общий объем не меняется, когда пластинки скользят одна по другой.

Сформулируем этот принцип в более общей ситуации.

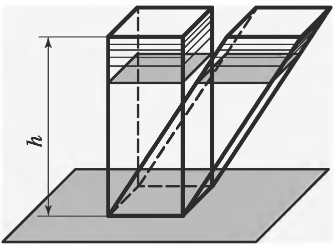


Рис. 2.513

Допустим, что мы имеем две фигуры, основания которых лежат в одной плоскости. Можно считать, что эта плоскость горизонтальна (рис. 2.513).

Если все горизонтальные поперечные сечения двух наших фигур, находящиеся на одном и том же уровне, имеют одну и ту же площадь, то две наши фигуры имеют один и тот же объем.

Принцип Кавальери мы принимаем как основное свойство измерения объемов (можно это свойство считать аксиомой геометрии).

Пусть нам даны две фигуры F_1 и F_2 и плоскость α. Если каждая плоскость, параллельная плоскости α, пересекая одну фигуру, пересекает также и другую, причем образованные при этом сечения данных фигур имеют равные площади, то данные фигуры имеют один и тот же объем.

121. Объем призмы.

Определение. Поперечным сечением призмы называют пересечение призмы с плоскостью, параллельной плоскости ее основания.

Можно доказать теорему о свойствах поперечных сечений для случая треугольной призмы.

Теорема 2. Все поперечные сечения треугольной призмы равны ее основанию.

Это свойство верно для любых видов призм.

Имеет место теорема о свойстве площадей поперечных сечений призмы.

Теорема 3. Все поперечные сечения призмы имеют одну и ту же площадь.

Все выше сказанное позволяет доказать теорему об объеме призмы.

Теорема 4. Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

Итак,

$$V_{\text{призмы}} = S \cdot h,$$

где S — площадь основания призмы, а h — высота призмы.

П р и м е р. Найдите объем четырехугольной прямой призмы, высота которой равна h, диагонали наклонены к плоскости основания под углами α и β, а острый угол между диагоналями основания равен γ.

Р е ш е н и е. Из условия задачи имеем:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1. Четырехугольная призма} \\ ABCDA_1B_1C_1D_1 \text{ с высотой } h. \\ \text{2. Диагональ наклонена к плоскости} \\ \text{основания под углом } \alpha \text{ и } \beta. \\ \text{3. Острый угол между диагоналями} \\ \text{основания равен } \gamma. \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{дано} \\ \text{(рис. 2.514)} \end{array}$$

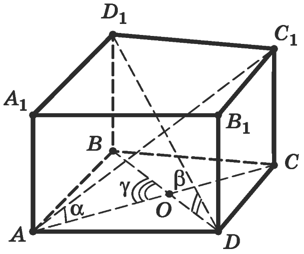


Рис. 2.514

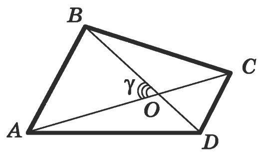


Рис. 2.515

4. Найдите объем призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Так как высота призмы дана, решение сводится к отысканию площади ее основания $ABCD$, которое является выпуклым четырехугольником.

Возникает самостоятельный вопрос: как найти площадь выпуклого четырехугольника? Известен такой факт:

площадь выпуклого четырехугольника выражается через его диагонали d_1, d_2 и угол между ними γ по формуле $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\gamma$ (эту формулу можно отдельно вывести).

Следует также разобраться с данными п. 2.

5. C_1C и D_1D перпендикулярны плоскости основания (1, определение прямой призмы).

6. $\angle C_1AC = \alpha$, $\angle D_1DB = \beta$ (1, 2, 5, определение угла между прямой и плоскостью) (рис. 2.514).

7. Из треугольников ACC_1 и BDD_1 находим диагонали основания: $d_1 = AC = h \cdot \operatorname{ctg}\alpha$, $d_2 = BD = h \cdot \operatorname{ctg}\beta$.

8. Найдем площадь четырехугольника $ABCD$ (рис. 2.515), диагонали которого AC и BD пересекаются в точке O.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}h^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\beta \cdot \sin\gamma.$$

9. Vпризмы $= S_{ABCD} \cdot h = \frac{1}{2}h^3 \mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\beta \cdot \sin\gamma$

(8, т. 4).

122. Объем пирамиды. Горизонтальные поперечные сечения определяются для пирамиды так же, как и для призмы.

Определение. Поперечным сечением пирамиды называют ее пересечение с плоскостью, параллельной основанию.

На рисунке 2.516 $\triangle A_1B_1C_1$ является поперечным сечением пирамиды S_{ABC}, так как плоскость α, которой принадлежит $\triangle A_1B_1C_1$, параллельна плоскости основания пирамиды.

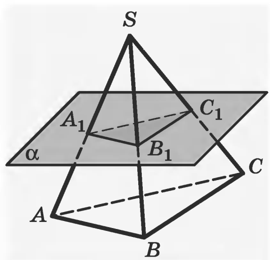


Рис. 2.516

По мере того как горизонтальная плоскость движется от основания пирамиды к ее вершине, площадь поперечного сечения все время убывает, до тех пор, пока она не станет равной нулю.

В следующей теореме мы выведем формулу, показывающую, как изменяется площадь поперечного сечения для треугольной пирамиды:

Теорема 5. Каждое поперечное сечение треугольной пирамиды, заключенное между основанием и вершиной, является треугольником, подобным основанию. Если h — высота пирамиды и k — расстояние от вершины до плоскости поперечного сечения, то площадь поперечного сечения равна площади основания, умноженной на число $\frac{k^2}{h^2}$.

Площади поперечных сечений ведут себя так: независимо от того, какую форму имеет основание пирамиды, отношение площадей всегда равно $\frac{k^2}{h^2}$.

Теорема 6. Отношение площади поперечного сечения к площади основания пирамиды равно $\frac{k^2}{h^2}$, где h — высота пирамиды, а k — расстояние от вершины пирамиды до плоскости поперечного сечения.

Приведенные выше теоремы позволяют нам доказать еще одну теорему.

Теорема 7. Если две пирамиды имеют одну и ту же площадь основания и одну и ту же высоту, то их поперечные сечения, равноудаленные от вершин, имеют одну и ту же площадь.

Имеет место одно из важнейших свойств пирамиды.

Теорема 8. Если две пирамиды имеют одну и ту же площадь основания и одну и ту же высоту, то они имеют один и тот же объем.

Можно также доказать теорему о нахождении объема треугольной пирамиды.

Теорема 9. Объем треугольной пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.

Тот же результат сохраняется и для любых пирамид.

Теорема 10. Объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.

Итак,

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3}S \cdot h,$$

где S — площадь основания пирамиды, а h — высота пирамиды.

Теорема 11. Объем усеченной пирамиды с площадями оснований S_1 и S_2 ($S_1 > S_2$) и высотой h равен

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 - S_2 + \sqrt{S_1S_2}).$$

П р и м е р. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник со сторонами 6 см, 6 см и 8 см. Все боковые ребра равны 9 см. Найдите объем пирамиды.

Р е ш е н и е. Из условия задачи имеем:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1. } PABC \text{ — треугольная пирамида.} \\ \text{2. } \triangle ABC \text{ — равнобедренный,} \\ AB = 6 \text{ см,} \\ AC = 6 \text{ см, } BC = 8 \text{ см.} \\ \text{3. } PA = PB = PC = 9 \text{ см.} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{дано} \\ \text{(рис. 2.517)} \end{array}$$

4. $V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot H$, где H — высота пирамиды PO (формула объема пирамиды).

5. Итак, нахождение объема пирамиды сводится к нахождению площади основания — $S_{\triangle ABC}$ и высоты пирамиды H.

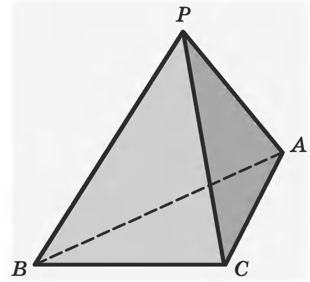


Рис. 2.517

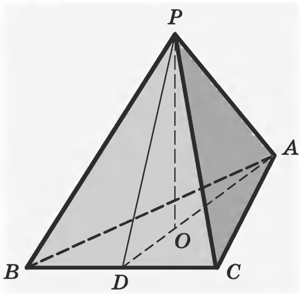


Рис. 2.518

6. Проведем высоту пирамиды — $PO = H$ (построение) (рис. 2.518).

7. Так как боковые ребра пирамиды равны, основание O высоты пирамиды PO есть центр описанной около основания окружности (1, 3, свойство пирамиды).

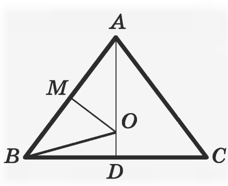


Рис. 2.519

8. Основание высоты — точка O — принадлежит высоте равнобедренного треугольника ABC, проведенной к основанию AB (6, 7, свойства пирамиды).

Нам будет удобно отдельно рассмотреть основание пирамиды — $\triangle ABC$ (рис. 2.519).

Возникает задача на плоскости: в равнобедренном треугольнике ABC $AB = 6$ см, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см. Найти OB — центр описанной около $\triangle ABC$ окружности.

9. Соединим точку O с точкой B и с точкой M — серединой стороны AB (построение) (рис. 2.519).

10. PO отыскивается по формуле $H = \sqrt{PB^2 - R^2}$ (6, 7, 8, 9, теорема Пифагора).

Нам осталось найти радиус R.

Радиус R описанной около треугольника ABC окружности можно найти из треугольника AMO, где MO — серединный перпендикуляр к отрезку AB. Это тоже отдельная задача на плоскости.

11. Обозначим угол MAO через α, тогда из $\triangle ABD$ получим $\sin\alpha = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$, а $\cos\alpha = \sqrt{1-\dfrac{4}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ (9, определения синуса и косинуса).

12. $R = OA = \dfrac{AM}{\cos\alpha} = \dfrac{AB}{2\cos\alpha} = \dfrac{6}{2\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}} = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$ см (9, 11).

13. $H = \sqrt{9^2 - \dfrac{9^2}{5}} = \sqrt{9^2\left(1-\dfrac{1}{5}\right)} = 9\cdot 2\cdot\sqrt{\dfrac{1}{5}} = \dfrac{18}{\sqrt{5}}$ см (10, 12).

14. Если D — середина BC, то AD — высота основания. $BD = CD = \dfrac{BC}{2} = 4$ см, $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ см (2, 9, теорема Пифагора).

15. Площадь основания $S = \dfrac{1}{2}\cdot BC\cdot AD = \dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$ см^2 (14, формула площади треугольника).

16. Объем пирамиды $V = \dfrac{1}{3}S\cdot H = \dfrac{1}{3}8\sqrt{5}\cdot\dfrac{18}{\sqrt{5}} = 48$ см^2.

§ 27. Объемы фигур вращения

123. Объем цилиндра.

Определение поперечного сечения цилиндра такое же, как и поперечных сечений призмы или пирамиды.

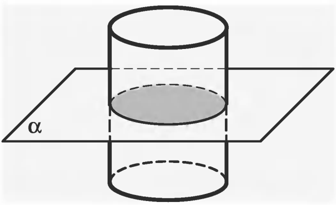


Рис. 2.520

Теорема 12. Каждое поперечное сечение кругового цилиндра есть круг, равный основанию.

На рисунке 2.520 плоскость α, параллельная плоскостям оснований цилиндра, является его поперечным сечением. Теорема 12 доказывает, что в сечении получается круг.

Из теоремы 12 можно получить следствие: каждое поперечное сечение кругового цилиндра имеет ту же площадь, что и основание.

Теперь можно вывести формулу для нахождения объема цилиндра.

Теорема 13. Объем кругового цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

Итак,

$$V_{\text{цилиндра}} = S \cdot h,$$

где S — площадь основания цилиндра, а h — его высота.

П р и м е р. Дана правильная треугольная пирамида объема V. В эту пирамиду вписан цилиндр так, что одно из его оснований принадлежит основанию пирамиды, а другое основание вписано в сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию. Найдите наибольший возможный объем такого цилиндра.

Р е ш е н и е. Из условия задачи имеем:

1. Правильная треугольная пирамида $SABC$, объем ее равен V.

2. В пирамиду вписан цилиндр, нижнее основание цилиндра принадлежит основанию пирамиды, а второе — плоскости сечения, параллельного основанию (рис. 2.521).

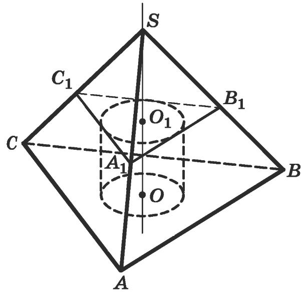


Рис. 2.521

3. Найдите наибольший возможный объем цилиндра.

4. Высоту пирамиды обозначим H, длину стороны основания — a, высоту цилиндра — h, радиус цилиндра — r.

Нужно найти наибольший возможный объем цилиндра. Как это сделать? Можно выразить объем цилиндра как функцию, например, высоты цилиндра h и найти максимум этой функции.

5. Рассмотрим сечение $A_1B_1C_1$ пирамиды плоскостью верхнего основания цилиндра. Это правильный треугольник, гомотетичный основанию ABC с коэффициентом гомотетии, равным $\dfrac{H-h}{H}$ (рис. 2.521) (1, 2, свойства гомотетии).

6. Сторона сечения имеет длину $\dfrac{a(H-h)}{H}$, а радиус вписанной окружности равен $\dfrac{\sqrt{3}a(H-h)}{6H}$. Это и есть радиус цилиндра, т. е. $r = \dfrac{\sqrt{3}a(H-h)}{6H}$ (1, 2, 5).

7. Находим объем цилиндра как функцию h:

$V_ц = \dfrac{\pi a^2}{12H^2}(H-h)^2h$, $h \in [0, H]$ (1, 2, 6, формула объема цилиндра).

8. Найдем критическую точку найденной функции: $V'_ц = \frac{\pi a^2}{12H^2}(H - h)(H - 3h)$, $h_0 = \frac{H}{3}$. При $h = h_0$ функция $V_ц$ имеет наибольшее значение, равное $\frac{\pi}{81}a^2H$ (7, свойства экстремума функции).

9. По условию $\frac{\sqrt{3}}{12}a^2H = V$.

10. Наибольший возможный объем рассматриваемых цилиндров равен $\frac{4\sqrt{3}\pi}{81}V$ (7, 8, 9).

124. Объем конуса. Рассмотрим свойства поперечных сечений конуса.

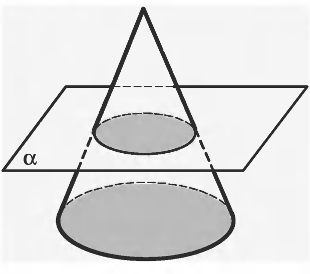


Рис. 2.522

На рисунке 2.522 изображено поперечное сечение конуса. Плоскость α параллельна плоскости основания конуса.

Имеет место важное свойство поперечного сечения конуса.

Теорема 14. Даны конус высоты h и его поперечное сечение, высекаемое плоскостью, удаленной от его вершины на расстояние d. Тогда площадь поперечного сечения конуса равна площади его основания, умноженной на $\frac{k^2}{h^2}$.

Пользуясь принципом Кавальери, получаем формулу вычисления объема кругового конуса.

Теорема 15. **Объем кругового конуса равен одной трети произведения площади его основания на высоту.**

Итак,

$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}S \cdot h,$$

где S — площадь основания конуса, а h — его высота.

П р и м е р. Найдите объем конуса, образующая которого l видна из середины высоты конуса под углом α.

Р е ш е н и е. Из условия задачи имеем:

1. Конус с образующей l.
2. PO — высота конуса, M — середина высоты.
3. PA видна из точки M под углом α.

дано (рис. 2.523)

4. Найдите объем конуса.

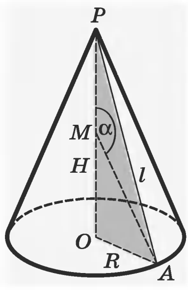


Рис. 2.523

5. $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot OP$ (1, 2, формула объема конуса).

6. Введем обозначения: вместо OA — H, радиус основания конуса OA — R (обозначения).

Итак, решение задачи сводится к нахождению площади основания конуса и его высоты.

7. $S_{\text{осн}} = \pi\, OA^2$ (1, 2, формула площади круга).

Воспользуемся данным в п. 3 углом.

8. $\triangle AMO$ — прямоугольный. $MO = R \cdot \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -R \cdot \operatorname{ctg}\alpha$ (1, 2, 3, 6, определение котангенса острого угла). $\angle OMA = \pi - \alpha$.

9. $H = 2MO = -2R \cdot \operatorname{ctg}\alpha$ (2, 7).

10. Из $\triangle PAO$ по теореме Пифагора имеем $R^2 + (-2R \cdot \operatorname{ctg}\alpha)^2 = l^2$, $R = \dfrac{l}{\sqrt{1+4\operatorname{ctg}^2\alpha}}$ (2, 8, 9, теорема Пифагора).

Мы нашли радиус основания конуса, найдем его высоту H.

11. $H = -2R \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{-2l \cdot \operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+4\operatorname{ctg}^2\alpha}}$ (1, 2, 10, определение котангенса острого угла).

12. $V_{\text{конуса}} = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{l}{\sqrt{1+4\operatorname{ctg}^2\alpha}}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{-2l \cdot \operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+4\operatorname{ctg}^2\alpha}}\right) = -\dfrac{2\pi l^3 \operatorname{ctg}\alpha}{3\left(\sqrt{1+4\operatorname{ctg}^2\alpha}\right)^3}$ (10, 11).

125. Объем шара. Для вычисления объема шара используется принцип Кавальери.

Теорема 16. Объем шара равен четырем третьим $\pi \cdot R^3$, где R — радиус шара.

Итак,

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

где R — радиус шара.

Пример. Найдите объем шара, вписанного в тетраэдр с ребром a и двугранным углом при ребре основания α.

Решение. Из условия задачи имеем:

1. Тетраэдр с ребром a.
2. Двугранный угол при ребре основания α.
3. Шар, вписанный в тетраэдр.

} дано (рис. 2.524)

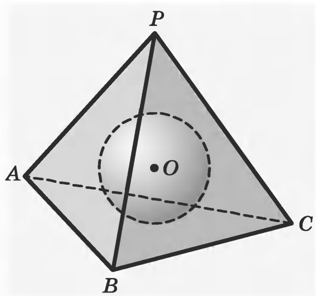


Рис. 2.524

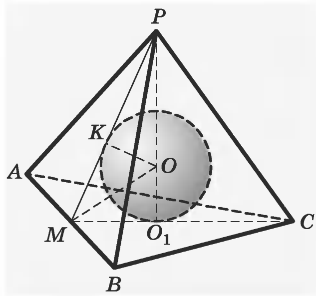


Рис. 2.525

4. Найдите объем шара.

5. $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$ (3, формула объема шара).

Решение задачи сводится к нахождению радиуса шара.

6. Центр шара, точка O, лежит на высоте пирамиды (1, 3, свойства шара, вписанного в тетраэдр).

7. Проведем высоту пирамиды PO_1, O_1 — центр окружности, описанной около основания пирамиды (построение) (рис. 2.525). (1, 3, 6, свойство тетраэдра).

8. Шар касается боковой грани тетраэдра — $\triangle PAB$ — в некоторой точке K, лежащей на апофеме PM (1, 3, свойство шара, вписанного в тетраэдр) (рис. 2.525).

9. $O_1M = \frac{1}{2}O_1C = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ (2, 7, формула для нахождения радиуса окружности, вписанной в тетраэдр).

Теперь мы можем использовать данные п. 2. Прежде всего следует понять, где на рисунке 2.525 изображен $\angle\alpha$?

10. $\angle PMO_1 = \alpha$ (1, 2, 3, 7, 8, определение линейного угла двугранного угла).

Нужно найти радиус шара OO_1. Обозначим его R. Как его можно найти? R можно найти из треугольника OO_1M.

11. $\triangle O_1OM = \triangle OKM$ (по двум катетам), поэтому $\angle O_1MO = \frac{1}{2}\angle PMO_1 = \frac{\alpha}{2}$.

12. Из $\triangle O_1OM$ находим: $R = O_1M \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}a \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

13. Объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{54}\pi a^3 \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}$.

126. Объемы частей шара.

Объем шарового сегмента. Объем шарового сегмента находится по формуле:

$$V_{\text{шар. сегм}} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right),$$

где R — радиус шара, а h — высота сегмента (рис. 2.526).

Объем шарового сектора. Объем шарового сектора вычисляется по формуле:

$$V_{\text{шар. сект}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h,$$

где R — радиус шара, а h — высота шарового сектора (рис. 2.527).

Пример. В шаре, диаметр которого равен 50 мм, должно быть просверлено цилиндрическое отверстие вдоль диаметра шара. Вычислить объем остающегося кольцеобразного тела (с точностью до

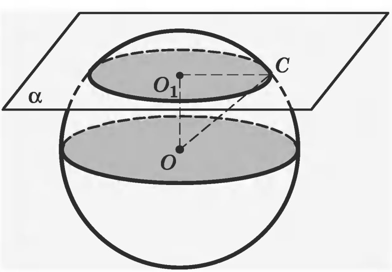


Рис. 2.526

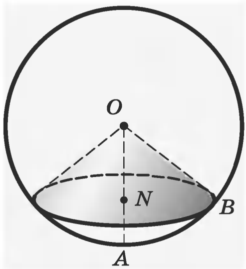


Рис. 2.527

0,5 см^3), если диаметр цилиндрического отверстия равен 30 мм.

Р е ш е н и е. Из условия задачи имеем:

$$\left.\begin{array}{l}\text{1. Шар с диаметром 50 мм и центром } O.\\ \text{2. В шаре просверлили цилиндрическое}\\ \text{отверстие, параллельное диаметру шара,}\\ \text{диаметр цилиндрического отверстия}\\ \text{равен 30 мм.}\end{array}\right\}\ \text{дано}$$

3. Найдите объем оставшейся части шара.

Для решения этой задачи полезно рассмотреть осевое сечение полученной конструкции.

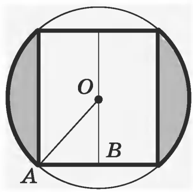


Рис. 2.528

4. Построим осевое сечение получившегося кольцеобразного тела (рис. 2.528) (построение).

5. Высверленная часть шара состоит из цилиндра и двух сегментов, следовательно, искомый объем равен объему шара без объема цилиндра и суммы объемов двух сегментов (1, 2, свойство объемов).

6. Высота цилиндра $H = 2 \cdot OB$. Из прямоугольного треугольника AOB находим $OB = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ мм, следовательно, $H = 40$ мм (1, 2, 4, теорема Пифагора).

7. Высота h каждого сегмента равна $\frac{50-40}{2} =$ $= 5$ мм (1, 2, 4).

8. Обозначим искомый объем буквой V, тогда

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \pi r^2 H - 2\pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right);$$

после подстановки в правую часть равенства вместо R, r, H и h их значений получим:

$$V = \pi\left(\frac{4}{3}\cdot 25^3 - 15^2\cdot 40 - 2\cdot 25\cdot 5^2 + \frac{2}{3}\cdot 5^3\right).$$

После окончательного подсчета, приняв $\pi = 3{,}14$, имеем: $V = 34$ см^3.

Примечание. Значение π взято равным 3,14, так как искомый объем требовалось найти с точностью до 500 мм^3, а объем всего шара при такой точности выражался бы в кубических сантиметрах двузначным числом.

§ 28. Площади поверхностей круглых фигур

127. Площадь поверхности шара и его частей. Пусть дана полуокружность AF с центром в точке O (рис. 2.529). При вращении этой полуокружности вокруг диаметра AF мы получим поверхность шара (сферу с центром в точке O и диаметром AF).

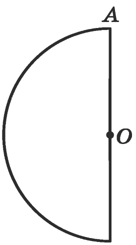


Рис. 2.529

Дадим следующее определение *площади поверхности шара*.

Определение. За площадь поверхности шара, полученного вращением полукруга вокруг диаметра, принимается предел, к которому стремится поверхность, получаемая вращением около того же диаметра правильной вписанной в полуокружность ломаной линии при неограниченном увеличении числа ее звеньев.

Формула поверхности шара такова:

$$S_{\text{пов. шара}} = 4\pi R^2,$$

где R — радиус шара.

Формула для нахождения *площади поверхности шарового сегмента*, получаемого при вращении дуги AC вокруг оси AF:

$$S_{\text{пов. шар. сегмента}} = 2\pi Rh,$$

где R — радиус шара, h — высота шарового сегмента.

П р и м е р. Определите вес котла, поверхность которого состоит из цилиндрической поверхности и сферической поверхности двух шаровых сегментов (рис. 2.530).

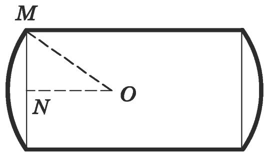


Рис. 2.530

Известно, что радиус цилиндрической поверхности $r = 60$ см, длина образующей этой поверхности $h = 2$ м, высота сегмента $h_1 = 20$ см и котел сделан из листового железа, вес 1 м^2 которого равен 12 кг.

Р е ш е н и е. Для нахождения площади поверхности котла нужно найти площади поверхностей двух сферических сегментов, так как площадь поверхности цилиндрической части находится без труда.

1. Определим радиус сферы, частями которой служат поверхности сегментов, для чего построим центр сферы — точку O (рис. 2.530).

2. Из прямоугольного треугольника MON имеем: $R^2 = r^2 + (R - h_1)^2$, или $R^2 = r^2 + R^2 - 2Rh_1 + h_1^2$, откуда $R = \frac{r^2 + h_1^2}{2h_1}$ (1, теорема Пифагора).

3. Подставив в равенство п. 2 вместо r и h_1 данные значения, получим $R = \frac{0{,}6^2 + 0{,}2^2}{0{,}4} = 1$ (2).

4. Площадь поверхности S всего котла будет: $S = 2\pi rh + 4\pi Rh_1 = 2\pi(rh + 2Rh_1)$ (данные задачи, формулы площади поверхности цилиндра и сегмента).

5. Заменив в последнем равенстве r, h и h_1 их данными значениями и R, получим:

$$S = 6{,}28(0{,}6 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 0{,}2) \approx 10{,}05;$$

$$S \approx 10{,}05 \text{ м}^2 \text{ (с точностью до 1 дм}^2\text{) (4).}$$

6. Умножив вес 1 м^2 листового железа на число квадратных метров поверхности котла, получаем его вес:

$$P = 12 \cdot 10{,}05 = 120{,}6 \approx 121;$$

$$P \approx 121 \text{ кг (с точностью до 0,4 кг) (5).}$$

128. Площадь поверхности цилиндра.

Если радиус цилиндра R, а высота H, то его боковая поверхность развертывается в прямоугольник со сторонами $2\pi R$ и H (рис. 2.531). Площадь этой развертки $2\pi RH$ принимают за *площадь боковой поверхности цилиндра*.

Теорема 17. Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра.

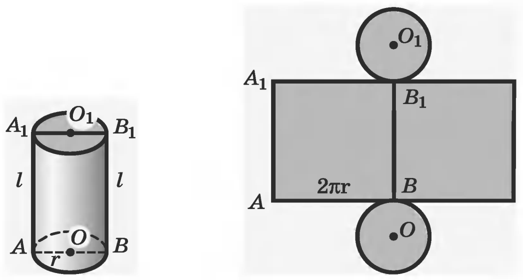


Рис. 2.531

За площадь поверхности цилиндра, или за *полную поверхность цилиндра*, принимается площадь ее боковой поверхности, сложенной с удвоенной площадью основания. Она вычисляется по формуле

$$S_{\text{полн}} = 2\pi RH + 2\pi R^2, \text{ или } S_{\text{полн}} = 2\pi R(H + R),$$

где R — радиус основания цилиндра, а H — его высота.

129. Площадь поверхности конуса. Пусть нам дан конус с радиусом основания R и образующей l.

Если посмотреть на рис. 2.531, то можно заметить, что площадь боковой поверхности конуса равна площади кругового сектора с радиусом l и длиной дуги $2\pi R$.

Теорема 18. Площадь боковой поверхности конуса равна половине произведения длины окружности основания на образующую.

За *площадь поверхности конуса*, или за *площадь полной поверхности конуса*, принимается площадь его развертки $S_{\text{полн}}$. Она состоит из площади боковой поверхности и площади круга основания (рис. 2.532):

$$S_{\text{полн}} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R\,(l + R).$$

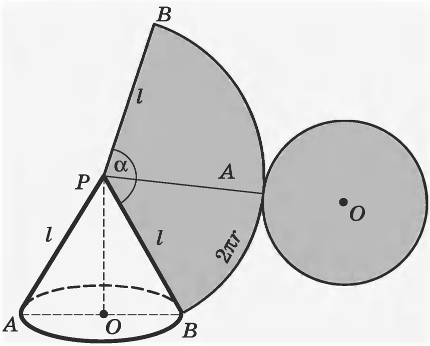


Рис. 2.532

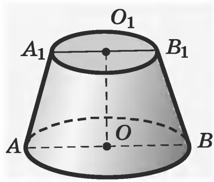


Рис. 2.533

Формула для вычисления площади боковой поверхности усеченного конуса такова:

$$S_{\text{бок. ус. кон}} = \pi l(R + r). \text{ (рис. 2.533)}$$

Выразим боковую поверхность усеченного конуса через длины окружностей оснований C и C_1:

$$S_{\text{бок. ус. кон}} = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} l = \frac{C + C_1}{2} l.$$

Итак, мы доказали теорему:

Теорема 19. Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую.

За площадь поверхности усеченного конуса, или за *полную поверхность усеченного конуса*, принимается площадь его развертки. Она состоит из площади его боковой поверхности и площади кругов оснований.

$$S_{\text{полн. ус. кон}} = \pi l(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2.$$

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

§29. Тригонометрические функции углов прямоугольного треугольника

130. Синус и косинус в прямоугольном треугольнике. Синус и косинус определяются через координаты точек единичной окружности (см. с. 144). Но в геометрии и в приложениях очень важно находить синусы и косинусы острых углов в прямоугольном треугольнике.

Воспользуемся понятием координат вектора. Пусть вектор $\bar{a}$ отложен от точки O — начала координат. Координатами вектора $\bar{a}$ будут числа a_x и a_y, являющиеся координатами конца вектора — точки A (рис. 2.534).

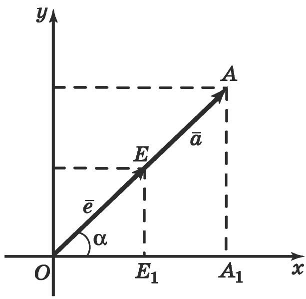


Рис. 2.534

Вектор, длина которого равна 1, называется единичным вектором. Отложим единичный вектор $\bar{e}$ от начала системы координат — точки O. Координатами единичного вектора $\bar{e}$ являются числа e_x и e_y. Вспомним определение синуса и косинуса. Отрезок, изображающий единичный вектор $\bar{e}$, можно считать радиусом единичной окружности, и тогда координаты конца этого радиуса будут соответственно $e_x = \cos\alpha$, и $e_y = \sin\alpha$, где α — угол, образованный вектором $\bar{e}$ с положительным направлением оси абсцисс.

Возьмем единичный вектор $\bar{e}$ того же направления, что и вектор $\bar{a}$ (рис. 2.534). На этом рисунке имеется два прямоугольных треугольника OEE_1 и OAA_1. Эти треугольники подобны.

Из подобия этих треугольников мы имеем: $\frac{a_y}{|\bar{a}|} = \frac{e_y}{|\bar{e}|}$ и $\frac{a_x}{|\bar{a}|} = \frac{e_x}{|\bar{e}|}$.

Эти равенства верны для любого угла α, который векторы $\bar{a}$ и $\bar{e}$ образуют с положительным направлением оси Ox.

Но $e_y = \sin\alpha$, а $|\bar{e}| = 1$, а тогда $\sin\alpha = \frac{a_y}{|\bar{a}|}$, откуда $a_y = |\bar{a}|\sin\alpha$.

Аналогично получаем $a_x = |\bar{a}|\cos\alpha$.

Итак, вектор $\bar{a}$, образующий с положительным направлением оси абсцисс угол α, имеет координаты $a_x = |\bar{a}|\cos\alpha$, $a_y = |\bar{a}|\sin\alpha$.

Полученные нами соотношения дают возможность получить очень важные соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами a и b и гипотенузой c (рис. 2.535). Поместим этот треугольник в прямоугольной системе координат xOy так, как это показано на рисунке 2.536. В этом случае a и b являются координатами вектора $\overline{OB}$ (a — ордината, b — абсцисса точки B), c — длиной вектора $\overline{OB}$.

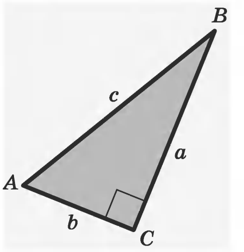


Рис. 2.535

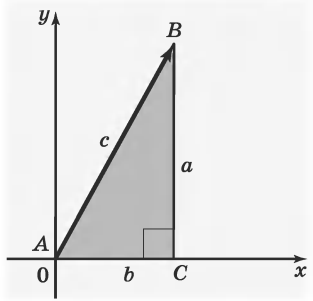


Рис. 2.536

Поэтому:

1. $b = c \cos \angle A$,
2. $a = c \sin \angle A$,

3. $\sin \angle A = \dfrac{a}{c}$, 5. $c = \dfrac{a}{\sin \angle A}$,

4. $\cos \angle A = \dfrac{b}{c}$, 6. $c = \dfrac{b}{\cos \angle A}$.

Эти свойства сторон и углов прямоугольного треугольника формулируются следующим образом.

1. Катет прямоугольного треугольника равен гипотенузе, умноженной на косинус прилежащего к этому катету угла.

2. Катет прямоугольного треугольника равен гипотенузе, умноженной на синус противолежащего этому катету угла.

3. *Синус острого угла* прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к гипотенузе.

4. *Косинус острого угла* прямоугольного треугольника равен отношению прилежащего катета к гипотенузе.

5. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна катету, деленному на синус угла, противолежащего этому катету.

6. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна катету, деленному на косинус угла, прилежащего к этому катету.

131. Тангенс и котангенс.

Определение. *Тангенс острого угла* α прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к прилежащему (рис. 2.537),

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}.$$

Определение. *Котангенс острого угла* α прямоугольного треугольника равен отношению прилежащего катета к противолежащему (рис. 2.537),

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{a}.$$

§ 30. Решение треугольников

132. Решение прямоугольных треугольников. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (рис. 2.538). В нем

1. $\angle A + \angle B = 90°$;
2. $a^2 + b^2 = c^2$;
3. $\sin\angle A = \frac{a}{c}$, $\sin\angle B = \frac{b}{c}$;
4. $\cos\angle A = \frac{b}{c}$, $\cos\angle B = \frac{a}{c}$;
5. $\operatorname{tg}\angle A = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg}\angle B = \frac{b}{a}$;
6. $\operatorname{ctg}\angle A = \frac{b}{a}$, $\operatorname{ctg}\angle B = \frac{a}{b}$.

П р и м е р 1. Дано: катеты a и b. Требуется найти: $\angle A$, $\angle B$, c.

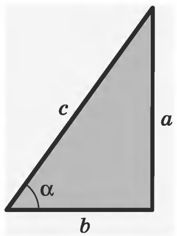


Рис. 2.537

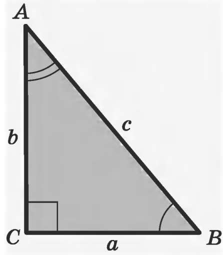


Рис. 2.538

1. $\operatorname{tg} \angle A = \frac{a}{b}$ (формула 5); величину угла A находят из таблиц.

2. $\angle B = 90° - \angle A$ (формула 1).

3. $c = \frac{b}{\cos \angle A}$ (формула 4).

П р и м е р 2. Дано: катет a и гипотенуза c. Требуется найти: $\angle A$, $\angle B$, b.

1. $\sin \angle A = \frac{a}{c}$ (формула 3); величину угла A находят из таблиц.

2. $\angle B = 90° - \angle A$ (формула 1).

3. $b = c \sin \angle B$ (формула 3).

П р и м е р 3. Дано: катет a и угол A. Требуется найти: $\angle B$, b, c.

1. $\angle B = 90° - \angle A$ (формула 1).

2. $b = a \operatorname{tg} \angle B$ (формула 5).

3. $c = \frac{b}{\cos \angle A}$ (формула 4).

П р и м е р 4. Дано: катет a и угол B. Требуется найти: $\angle A$, b, c.

1. $\angle A = 90° — \angle B$ (формула 1).
2. $b = a \operatorname{tg} \angle B$ (формула 5).
3. $c = \dfrac{b}{\cos \angle A}$ (формула 4).

Пример 5. Дано: гипотенуза c и угол A. Требуется найти: $\angle B$, a, b.

1. $\angle B = 90° — \angle A$ (формула 1).
2. $a = c \sin \angle A$ (формула 3).
3. $b = c \cos \angle A$ (формула 4).

133. Теорема косинусов. Для решения произвольного треугольника существует теорема косинусов.

Теорема 1. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A.$$

Теорема косинуса может быть записана и для двух других сторон треугольника:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C.$$

Формула $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A$ позволяет вычислить длину одной из сторон треугольника по данным длинам двух других сторон и величине угла, лежащего против неизвестной стороны.

Теорема косинусов позволяет также по данным величинам сторон треугольника вычислить величины его углов. Из основного равенства следует: $\cos \angle A = \dfrac{b^2 + c^2 + a^2}{2bc}$.

Аналогично можно получить формулы для $\cos \angle B$ и $\cos \angle C$.

134. Теорема синусов. Еще одна теорема, позволяющая находить элементы произвольного треугольника — теорема синусов.

Теорема 2. Стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных углов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

где a, b, c — стороны треугольника, α, β, γ обозначают соответственно $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$.

Теорема синусов позволяет по двум сторонам и углу, лежащему против одной из них (или по стороне и двум углам) вычислить остальные элементы треугольника.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Учебное издание

Справочник школьника

Гусев Валерий Александрович
Мордкович Александр Григорьевич

МАТЕМАТИКА

Редакция «Образовательные проекты»

Ответственный редактор *А. А. Лаврентьев*
Художественный редактор *Т. Н. Войткевич*
Технический редактор *А. Л. Шелудченко*
Корректор *И. Н. Мокина*

Оригинал-макет подготовлен *ООО «БЕТА-Фрейм»*

Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953005 — литература учебная

Сертификат соответствия
№ РОСС RU.AE51.H16407 от 03.10.2012 г.

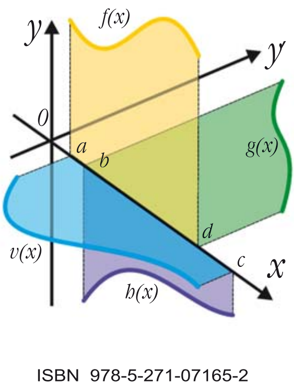
ООО «Издательство Астрель»
129085, г. Москва, пр-д Ольминского, д. 3а

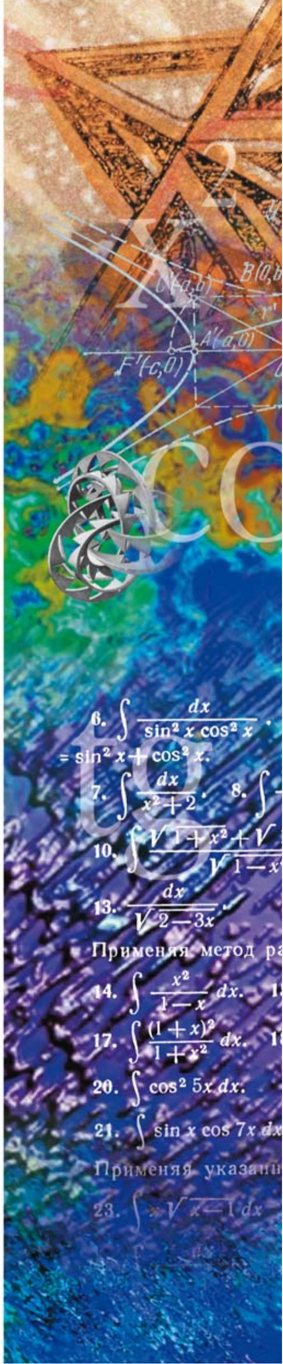
Издаётся при техническом участии
ООО «Издательство АСТ»

По вопросам приобретения книг обращаться по адресу:
129085, Москва, Звёздный бульвар, дом 21, 7 этаж
Отдел реализации учебной литературы
ООО «Издательство Астрель»
Справки по телефонам: (495)615-53-10, (495)775-74-45 доб. 1-17-04

Справочник школьника

по математике включает все темы школьного курса и соответствует современным образовательным стандартам и программам.
Книга состоит из двух частей: «Алгебра и начала анализа» и «Геометрия».
Основной материал школьного курса математики изложен авторами сжато и системно: математические понятия, аксиомы, теоремы, свойства и т.д.
В книге приведено большое количество подробно разобранных задач и примеров, рассмотрены алгоритмы их решений.
В.А. Гусев и А.Г. Мордкович - авторы многих известных учебников, учебных и учебно-методических пособий по математике.
Справочник окажет неоценимую помощь при повторении изученного ранее материала, подготовке к выпускным экзаменам в школе и вступительным экзаменам в вуз.





ISBN 978-5-271-07165-2