Геометрия

7–9 КЛАССЫ

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

Учебник

Допущено
Министерством просвещения
Российской Федерации

14-е издание, переработанное

Москва
«Просвещение»
2023

Глава VI

Четырёхугольники

8 класс

До сих пор в центре нашего внимания был самый простой из многоугольников — треугольник. В этой главе будем изучать более сложные многоугольники, в основном различные виды четырёхугольников: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат. Кроме того, в этой главе речь пойдёт о центральной симметрии геометрических фигур, в том числе указанных четырёхугольников.

§ 1 Многоугольники

46. Выпуклый многоугольник

Напомним, что многоугольник с n вершинами называется **n-угольником**; он имеет n сторон. Треугольник имеет три вершины и три стороны, четырёхугольник имеет четыре вершины и четыре стороны.

Две вершины многоугольника, принадлежащие одной стороне, называются соседними. Отрезок, соединяющий любые две несоседние вершины, называется **диагональю** многоугольника. У любого многоугольника, имеющего более трёх вершин, есть хотя бы одна диагональ.

Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.

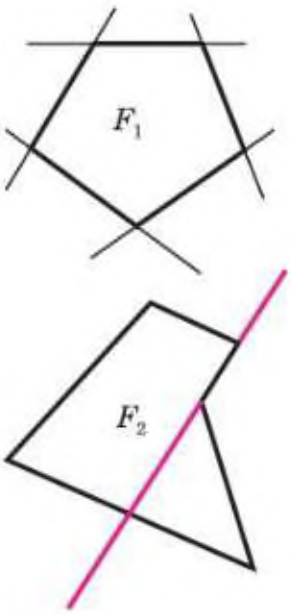

Рис. 185

На рисунке 185 многоугольник F_1 является выпуклым, а многоугольник F_2 — невыпуклым.

Рассмотрим выпуклый n-угольник, изображённый на рисунке 186, *а*. Углы $A_nA_1A_2$, $A_1A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_nA_1$ называются **углами** этого многоугольника. Найдём их сумму.

Для этого соединим диагоналями вершину A_1 с другими вершинами. В результате полу-

чим $n-2$ треугольника (рис. 186, *б*), сумма углов которых равна сумме углов n-угольника. Сумма углов каждого треугольника равна 180°, поэтому сумма углов многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ равна $(n-2)\cdot 180°$.

Итак, **сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$.**

Внешним углом выпуклого многоугольника называется угол, смежный с углом многоугольника.

Если при каждой вершине выпуклого многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ взять по одному внешнему углу, то сумма этих внешних углов окажется равной

$$180° - A_1 + 180° - A_2 + \ldots + 180° - A_n = \\ = n\cdot 180° - (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \\ = n\cdot 180° - (n-2)\cdot 180° = 360°.$$

Таким образом, **сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°.**

Количество диагоналей выпуклого n-угольника находится по формуле $\frac{n(n-3)}{2}$.

Действительно, из каждой вершины выпуклого n-угольника можно провести $n-3$ диагонали. Из всех n вершин можно провести $n(n-3)$ диагоналей, однако при таком подсчёте каждая диагональ учитывается дважды (объясните почему), т. е. мы нашли удвоенное число диагоналей n-угольника. Следовательно, число диагоналей выпуклого n-угольника равно $\frac{n(n-3)}{2}$.

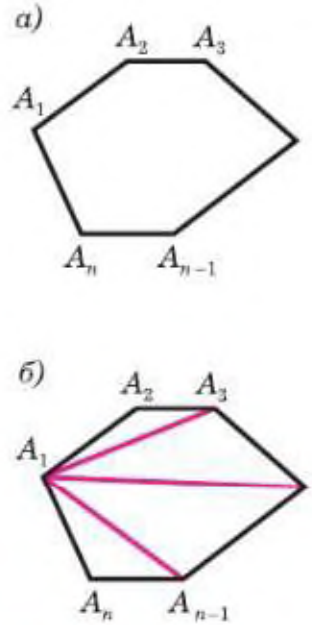

Рис. 186

47. Четырёхугольник

Каждый четырёхугольник имеет четыре вершины, четыре стороны и две диагонали (рис. 187). Две несмежные стороны четырёхугольника называются **противоположными.** Две вершины, не являющиеся соседними, называются **противоположными**.

Четырёхугольники бывают выпуклые и невыпуклые. На рисунке 187, *а* изображён выпуклый четырёхугольник, а на рисунке 187, *б* — невыпуклый.

Каждая диагональ выпуклого четырёхугольника разделяет его на два треугольника. Одна из диагоналей невыпуклого четырёхугольника также разделяет его на два треугольника (рис. 187, *б*).

Так как сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$, то **сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360°.**

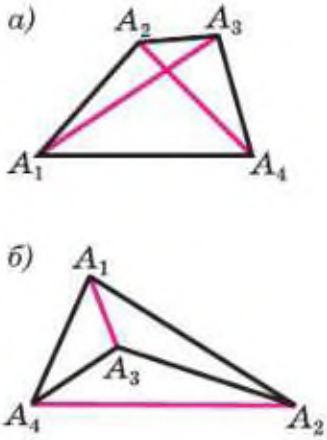

Рис. 187

Задачи

462 Начертите выпуклые пятиугольник и шестиугольник. В каждом многоугольнике из какой-нибудь вершины проведите все диагонали. На сколько треугольников разделяют проведённые диагонали каждый многоугольник?

463 Найдите сумму углов выпуклого: а) пятиугольника; б) шестиугольника; в) десятиугольника.

464 Найдите количество диагоналей а) выпуклого пятиугольника, б) выпуклого двенадцатиугольника, в) выпуклого двадцатипятиугольника.

53. Центральная симметрия

С осевой симметрией и её свойствами вы познакомились в 7 классе. Рассмотрим ещё один вид симметрии — центральную симметрию.

Две точки A и A_1 называются **симметричными относительно точки** O, если O — середи-

на отрезка AA_1 (рис. 202, *а*). Точка O считается симметричной самой себе. На рисунке 202, *б* точки M и M_1, N и N_1 симметричны относительно точки O, а точки P и Q не симметричны относительно этой точки (так как отрезки OQ и OP не равны).

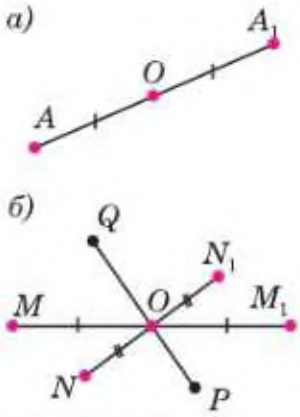

Рис. 202

Фигура называется симметричной относительно точки *O*, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно точки *O* также принадлежит этой фигуре. Точка O называется **центром симметрии фигуры.** Говорят также, что фигура обладает центральной симметрией.

Примерами фигур, обладающих центральной симметрией, являются окружность и параллелограмм (рис. 203). Центром симметрии окружности является центр окружности, а центром симметрии параллелограмма — точка пересечения его диагоналей. Прямая также обладает центральной симметрией, однако в отличие от окружности и параллелограмма, которые имеют только один центр симметрии (точка O на рисунке 203), у прямой их бесконечно много — любая точка прямой является её центром симметрии. Примером фигуры, не имеющей центра симметрии, является произвольный треугольник.

Скачано с vk.com

Фигуры, обладающие центральной симметрией

Рис. 203

Вопросы для повторения к главе VI

1 Какой многоугольник называется выпуклым? Объясните, какие углы называются углами выпуклого многоугольника.

2 Выведите формулу для вычисления суммы углов выпуклого n-угольника.

3 Докажите, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.

20 Какие две точки называются симметричными относительно данной точки?

21 Какая фигура называется симметричной относительно данной точки?

22 Приведите примеры фигур, обладающих:
а) осевой симметрией;
б) центральной симметрией;
в) и осевой, и центральной симметрией.

8 класс

Глава VI

463. а) 540°; б) 720°; в) 1440°. **464.** а) 5; б) 54; в) 275. **465.** а) четыре; б) три; в) шесть; г) пять. **466.** 23 мм, 20 мм, 19 мм, 18 мм. **467.** 15 см, 7 см, 23 см, 21 см. **468.** 90°. **469.** 75°. **470.** 30°, 60°, 120°, 150°. **472.** а) 10,5 см, 13,5 см; б) 8,5 см, 15,5 см; в) 8 см, 16 см. **474.** 78 см. **475.** 56 см или 70 см. **476.** а) $\angle B = \angle D = 96°$, $\angle C = 84°$; б) $\angle A = \angle C = 117°30'$, $\angle B = \angle D = 62°30'$; в) $\angle A = \angle C = 71°$, $\angle B = \angle D = 109°$; г) $\angle A = \angle C = 120°$, $\angle B = \angle D = 60°$; д) $\angle A = \angle C = 53°$, $\angle B = \angle D = 127°$. **477.** $MN = PQ = 6$ см, $NP = QM = 8$ см, $\angle M = \angle P = 60°$, $\angle N = \angle Q = 120°$. **479.** Указание. Сначала доказать, что $BK = DM$. **480.** Указание. Воспользоваться признаком 2°, п. 49. **482.** Указание. Воспользоваться признаком 3°, п. 49. **483.** Указание. Воспользоваться признаком 2°, п. 49. **484.** Указание. Рассмотреть $\triangle ABC$ с основанием AB и средней линией MN (M — середина AC, N — середина BC). На прямой MN за точку N отложить отрезок ND, равный отрезку MN, доказать равенство треугольников MNC и DNB. **487.** $2a$. Указание. Воспользоваться задачей 486. **489.** Указание. Через середину боковой стороны провести прямую, параллельную основаниям, и воспользоваться задачей 488. **490.** $\angle B = 144°$, $\angle D = 63°$. **491.** Указание. а) Через один из концов меньшего основания провести прямую, параллельную боковой стороне. **492.** Указание. а) Воспользоваться указанием к задаче 491, а; б) через один из концов меньшего основания провести прямую, параллельную диагонали. **493.** 68°, 112°, 112°. Указание. Воспользоваться задачей 491, а. **494.** Указание. Приложить плитки друг к другу так, чтобы боковые стороны совпали, меньшее основание плитки лежало на одной прямой с бо́льшим основанием другой плитки. **495.** а) 6 см; б) 5 см; **497.** Три. **498.** Указание. Воспользоваться задачей 292. **504.** а) 198,1 см или 122,6 см; б) 23,4 дм или 19,8 дм. **506.** 18 см. **507.** а) 60° и 120°; б) 30° и 60°. **508.** 42 см. **509.** 22°30′ и 67°30′. **512.** а) Нет; б) нет; в) да. **514.** 24 см. **521.** Пересекает сторону CD; 9 см и 5 см. **522.** 3 см, 4 см, 3 см. **524.** Указание. Воспользоваться задачей 503. **526.** Указание. Воспользоваться теоремой о сумме углов выпуклого четырёхугольника и задачей 525. **527.** Указание. Через точку M провести прямую, параллельную BK,

Оглавление

Дорогие семиклассники! 3

7 КЛАСС

Глава I. Начальные геометрические сведения 5

§ 1. Прямая и отрезок . . . . . —
1. Точки, прямые, отрезки . . . . . —
2. Провешивание прямой на местности 7
Практические задания 8

§ 2. Луч и угол 9
3. Луч . . . . . —
4. Угол 10
Практические задания . . . . . —

§ 3. Сравнение отрезков и углов 11
5. Равенство геометрических фигур . . . . . —
6. Сравнение отрезков и углов 12
Задачи 13

§ 4. Измерение отрезков 14
7. Длина отрезка . . . . . —
8. Единицы измерения. Измерительные инструменты 16
Практические задания 17
Задачи 18

§ 5. Измерение углов 19
9. Градусная мера угла . . . . . —
10. Измерение углов на местности 21
Практические задания . . . . . —
Задачи 22

§ 6. Перпендикулярные прямые . . . . . —
11. Смежные и вертикальные углы . . . . . —
12. Перпендикулярные прямые 23
13. Построение прямых углов на местности 24
Практические задания 25
Задачи . . . . . —
Вопросы для повторения к главе I 26
Дополнительные задачи 27

Глава II. Треугольники 29

§ 1. Первый признак равенства треугольников . . . . . —
14. Треугольник . . . . . —
15. Первый признак равенства треугольников 30
Практические задания 31
Задачи 32

§ 2. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника 33
16. Перпендикуляр к прямой . . . . . —
17. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника 34
18. Свойства равнобедренного треугольника 35
Практические задания 37
Задачи . . . . . —

§ 3. Второй и третий признаки равенства треугольников 38
19. Второй признак равенства треугольников ..... —
20. Третий признак равенства треугольников 39
Задачи 41
§ 4. Задачи на построение 43
21. Окружность ..... —
22. Построения циркулем и линейкой 44
23. Примеры задач на построение 45
Задачи 48
Вопросы для повторения к главе II 49
Дополнительные задачи 50

Глава III. Параллельные прямые 53
§ 1. Признаки параллельности двух прямых ..... —
24. Определение параллельных прямых ..... —
25. Признаки параллельности двух прямых 54
26. Практические способы построения параллельных прямых ... 56
Задачи 57
§ 2. Аксиома параллельных прямых 58
27. Об аксиомах геометрии ..... —
28. Аксиома параллельных прямых 59
29. Теоремы об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей 61
30. Углы с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами 64
Задачи 65
Вопросы для повторения к главе III 67
Дополнительные задачи 68

Глава IV. Соотношения между сторонами и углами треугольника 69
§ 1. Сумма углов треугольника ..... —
31. Теорема о сумме углов треугольника ..... —
32. Остроугольный, прямоугольный и тупоугольный треугольники.. 70
Задачи 71
§ 2. Соотношения между сторонами и углами треугольника 72
33. Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника ..... —
34. Неравенство треугольника 73
Задачи 74
§ 3. Прямоугольные треугольники 75
35. Некоторые свойства и признаки прямоугольных треугольников ..... —
36. Признаки равенства прямоугольных треугольников 77
Задачи 79
§ 4. Построение треугольника по трём элементам 80
37. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми ..... —
38. Построение треугольника по трём элементам 83
Задачи 85
Вопросы для повторения к главе IV 87
Дополнительные задачи 89

Скачан с vk.co

Глава V. Геометрические места точек. Симметричные фигуры 91
§ 1. Геометрические места точек ..... —
39. Свойства биссектрисы угла ..... —
40. Свойства серединного перпендикуляра к отрезку 93
Задачи 95
§ 2. Окружность. Касательная к окружности ..... —
41. Свойства диаметров и хорд окружности ..... —
42. Взаимное расположение окружности и прямой. Касательная к окружности 97
43. Вписанная и описанная окружности треугольника 100
Задачи 103
§ 3. Симметричные фигуры 106
44. Фигуры, симметричные относительно прямой ..... —
45. Осевая симметрия и её свойства 108
Практические задания 110
Задачи ..... —
Вопросы для повторения к главе V 112
Дополнительные задачи 114
Задачи повышенной трудности 115

8 КЛАСС

Глава VI. Четырёхугольники 121
§ 1. Многоугольники ..... —
46. Выпуклый многоугольник ..... —
47. Четырёхугольник 122
Задачи 123
§ 2. Параллелограмм и трапеция 124
48. Параллелограмм ..... —
49. Признаки параллелограмма 125
50. Трапеция 126
Задачи ..... —
§ 3. Прямоугольник, ромб, квадрат 131
51. Прямоугольник ..... —
52. Ромб и квадрат 132
53. Центральная симметрия 133
Задачи 134
Вопросы для повторения к главе VI 135
Дополнительные задачи 137

Глава VII. Площадь 139
§ 1. Площадь многоугольника ..... —
54. Понятие площади многоугольника ..... —
55*. Площадь квадрата 142
56. Площадь прямоугольника 144
Задачи ..... —
§ 2. Площади параллелограмма, треугольника и трапеции 146
57. Площадь параллелограмма ..... —
58. Площадь треугольника 147