А. Г. Мордкович
Н. П. Николаев

Алгебра

8

часть 1

УЧЕБНИК

для общеобразовательных организаций

Углублённый уровень

Рекомендовано Министерством просвещения Российской Федерации

19-е издание, стереотипное

Москва 2022

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721+22.14я721.6
М79

На учебник получены положительные заключения по результатам трёх экспертиз: научной (Российская академия наук, № 004947 от 19.12.2016), педагогической (Российская академия наук, № 005054 от 19.12.2016) и общественной (РШБА, № ОЭ/16-0382 от 26.12.2016)

Мордкович А. Г.

М79 Алгебра. 8 класс. Учебник для общеобразовательных организаций : углублённый уровень. В 2 ч. Ч. 1 / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. — 19-е изд., стер. М. : Мнемозина, 2022. — 288 с. : ил.

ISBN 978-5-346-04779-7

Учебник написан в соответствии с ФГОС, реализует авторскую концепцию, в которой приоритетной содержательно-методической основой является функционально-графическая линия, а идейным стержнем курса — математический язык и математическая модель, с помощью которых строится описание реальных ситуаций окружающей действительности. В учебнике реализованы принципы проблемного, развивающего и опережающего обучения.

Подбор и последовательность учебного материала позволяют изучать предмет как на базовом, так и на углублённом уровне в соответствии с Примерной основной общеобразовательной программой ООО.

Первая часть учебника содержит теоретический материал, написанный понятным языком, доступным для всех учащихся.

Электронная форма учебника содержит соответствующий мультимедийный материал и тесты для самопроверки.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721+22.14я721.6

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич, **Николаев** Николай Петрович

АЛГЕБРА
8 класс

УЧЕБНИК
для общеобразовательных организаций
Углублённый уровень
В двух частях
Часть 1

Формат 70×90 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 21,06.
Тираж 10 000 экз. (1-й завод — 1—5000 экз.). Заказ № 912.

Издательство «Мнемозина».
111033, Москва, ул. Волочаевская, 40г. Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 6781.
E-mail: ioc@mnemozina.ru www.mnemozina.ru

ИНТЕРНЕТ-магазин.
Тел.: 8 (495) 783 8284. www.shop.mnemozina.ru

Отпечатано в филиале «Тверской полиграфический комбинат детской литературы» АО «Издательство «Высшая школа»
Российская Федерация, 170040, г. Тверь, проспект Николая Корыткова, д. 46
Тел.: +7 (4822) 44-85-98, e-mail: sales@tpkdl.ru

© «Мнемозина», 2002
© «Мнемозина», 2017, с изменениями
© «Мнемозина», 2022
© Оформление. «Мнемозина», 2022
Все права защищены

ISBN 978-5-346-04778-0 (общ.)
ISBN 978-5-346-04779-7 (ч. 1)

7 ГЛАВА ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДЕЛИМОСТИ

§ 46. *Делимость чисел*
§ 47. *Простые и составные числа*
§ 48. *Деление с остатком*
§ 49. *Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное*
§ 50. *Основная теорема арифметики натуральных чисел*
§ 51. *Комбинаторные и вероятностные задачи. Теорема о выборе двух элементов*

§ 46 ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

1 Свойства делимости

Целые числа, как известно, можно складывать, вычитать, перемножать и возводить в натуральную степень — в результате получится целое число. Иначе обстоит дело с делением. Эта операция на множестве целых чисел, с одной стороны, выполнима далеко не всегда, а с другой стороны, очень важна для приложений. Без деления мы не смогли бы сокращать дроби, находить наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное целых чисел, приводить дроби к общему знаменателю, выполнять различные упрощения алгебраических выражений. Именно поэтому вопросами делимости математики занимаются очень давно и очень активно. Теория делимости составляет существенную часть теории чисел — важной и интересной математической науки.

Определение

Пусть даны натуральные числа a и b. Если существует натуральное число q такое, что выполняется равенство $a = bq$, то говорят, что **число a делится на число b**. При этом число a называют *делимым*, b — *делителем*, q — *частным*. Число a называют также *кратным числа b*.

Из записи $a = bq$ следует, что b — делитель a и что a кратно b. Впрочем, из той же записи следует, что q — делитель a и что a кратно q. Например, из записи $35 = 5 \cdot 7$ следует, что 35 делится на 5 и 35 делится на 7, что 35 кратно 5 и 35 кратно 7, что 5 — делитель числа 35 (и тогда 7 — частное) и что 7 — делитель числа 35 (и тогда 5 — частное).

Вместо фразы «a делится на b» часто используют запись $a \vdots b$. Например, вместо очевидных утверждений «a делится на a» или «a делится на 1» можно писать $a \vdots a$ или соответственно $a \vdots 1$. Ясно, что если $a \vdots b$, то $a \geqslant b$.

Обратите внимание, что запись $8 : 2$ означает требование выполнить деление числа 8 на число 2 (в результате этой операции получится число 4), в то время как запись $8 \vdots 2$ означает, что число 8 делится на 2 (делится *нацело*, делится *без остатка*); речь идёт лишь о принципиальной возможности выполнить деление, а само деление не требуется выполнять. Примерно так же обстоит дело со знаком $>$. Если написано $8 > 2$, то это лишь констатация факта: число 8 больше числа 2; при этом не требуется отвечать на вопрос, *на сколько больше*.

Отметим ряд свойств отношения делимости на множестве натуральных чисел.

СВОЙСТВО 1

Если $a \vdots c$ и $c \vdots b$, то $a \vdots b$.

Например, из того, что $48 \vdots 6$ и $6 \vdots 3$, можно сделать вывод, что $48 \vdots 3$.

СВОЙСТВО 2

Если $a \vdots b$ и $c \vdots b$, то $(a + c) \vdots b$.

Например, из того, что $12 \vdots 3$ и $21 \vdots 3$, можно сделать вывод, что $(12 + 21) \vdots 3$.

СВОЙСТВО 3

Если $a \vdots b$ и c не делится на b, то $(a + c)$ не делится на b.

Например, из того, что $12 \vdots 3$ и 22 не делится на 3, можно сделать вывод, что $(12 + 22)$ не делится на 3. В то же время из того, что *каждое слагаемое* не делится на b, нельзя сделать вывод, что и сумма не делится на b. Например, 14 не делится на 3 и 22 не делится на 3, но $(14 + 22) \vdots 3$.

Свойства 2 и 3 распространяются на сумму любого конечного числа слагаемых следующим образом: *если каждое слагаемое делится на число b, то и сумма делится на b; если каждое слагаемое, кроме одного, делится на b, то сумма не делится на b.*

СВОЙСТВО 4

Если $a \vdots b$ и $(a + c) \vdots b$, то $c \vdots b$.

Например, из того, что $12 \vdots 3$ и $(12 + 21) \vdots 3$, можно сделать вывод, что $21 \vdots 3$.

СВОЙСТВО 5

Если $a \vdots b_1$ и $c \vdots b_2$, то $ac \vdots b_1b_2$.

Например, из того, что $12 \vdots 3$ и $28 \vdots 7$, можно сделать вывод, что $(12 \cdot 28) \vdots (3 \cdot 7)$.

СВОЙСТВО 6

Если $a \vdots b$ и c — любое натуральное число, то $ac \vdots bc$; обратно, из $ac \vdots bc$ следует, что $a \vdots b$.

Например, из того, что $12 \vdots 3$, можно сделать вывод, что $(12 \cdot 5) \vdots (3 \cdot 5)$ и обратно.

СВОЙСТВО 7

Если $a \vdots b$ и c — любое натуральное число, то $ac \vdots b$.

Например, из того, что $12 \vdots 3$, можно сделать вывод, что $(12 \cdot 5) \vdots 3$.

Следует заметить, что свойство, обратное свойству 7, не имеет места: из того, что $ac \vdots b$, нельзя сделать вывод, что или a, или c делится на b. Например, $45 \vdots 15$ и $45 = 9 \cdot 5$, но ни 9, ни 5 не делятся на 15.

СВОЙСТВО 8

Если $a \vdots b$ и $c \vdots b$, то для любых натуральных чисел n и k справедливо соотношение $(an + ck) \vdots b$.

Например, из того, что $12 \vdots 3$ и $21 \vdots 3$, можно сделать вывод, что $(25 \cdot 12 + 271 \cdot 21) \vdots 3$.

Доказательство **1.** Отношение $a \vdots c$ означает, что существует число q_1 такое, что выполняется равенство $a = cq_1$. Далее, $c \vdots b$ означает, что существует число q_2 такое, что выполняется равенство $c = bq_2$. Следовательно, $a = cq_1 = (bq_2)q_1 = b(q_2q_1)$. Обозначим число q_2q_1 буквой q. Тогда получим, что $a = bq$, а это и означает, что $a \vdots b$.

2. Так как $a \vdots b$, то существует число q_1 такое, что выполняется равенство $a = bq_1$. Так как $c \vdots b$, то существует число q_2

такое, что выполняется равенство $c = bq_2$. Тогда $a + c = bq_1 + bq_2 = b(q_1 + q_2)$. Обозначим число $q_1 + q_2$ буквой q. Тогда получим, что

$$a + c = bq,$$

а это и означает, что $(a + c) \vdots b$.

3. Предположим противное, что $(a + c) \vdots b$. Тогда из $a \vdots b$ следует, что $a = bq_1$, а из $(a + c) \vdots b$ следует, что $a + c = bq_2$. Значит, $c = bq_2 - a = bq_2 - bq_1 = b(q_2 - q_1)$. Это означает, что $c \vdots b$. Но по условию c не делится на b. Получили противоречие, следовательно, наше предположение неверно и $a + c$ не делится на b.

4. Предположим, что c не делится на b. Тогда по свойству 3 число $a + c$ не делится на b, что противоречит условию. Значит, наше предположение неверно и, следовательно, $c \vdots b$.

Свойства 5, 6 и 7 докажите самостоятельно.

8. Если $a \vdots b$ и $c \vdots b$, то из свойства 7 вытекает, что $an \vdots b$ и $ck \vdots b$. Тогда по свойству 2

$$(an + ck) \vdots b.$$

Отметим ещё одно свойство, связанное с делимостью натуральных чисел.

СВОЙСТВО 9

Среди n последовательных натуральных чисел одно и только одно делится на n.

Если мы возьмём любые три подряд идущих натуральных числа, например 8, 9, 10 или 106, 107, 108, то одно число из тройки делится на 3 (для первой тройки это число 9, для второй — число 108). Если мы возьмём любые 10 подряд идущих натуральных чисел, то одно обязательно делится на 10. Если же мы возьмём два подряд идущих чётных числа, то одно обязательно делится на 4.

Доказательство свойства 9 будет дано в § 48.

ПРИМЕР 1

Доказать, что для любого натурального числа n число $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 2, 3, 4, 5, 8.

Решение Разложим многочлен $n^5 - 5n^3 + 4n$ на множители:

$$n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^4 - n^2 - 4n^2 + 4) =$$
$$= n(n^2(n^2 - 1) - 4(n^2 - 1)) = n(n^2 - 1)(n^2 - 4) =$$
$$= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2).$$

Рассмотрим полученное произведение. При $n = 1$, $n = 2$ оно обращается в 0, значит, делится на 2, 3, 4, 5, 8. При $n > 2$ имеем

произведение пяти последовательных натуральных чисел $n - 2$, $n - 1$, n, $n + 1$, $n + 2$. Из этих пяти чисел по свойству 9 одно обязательно делится на 5, хотя бы одно — на 3, хотя бы одно — на 4 и, кроме того, есть ещё хотя бы одно чётное число, т. е. число, делящееся на 2. Тогда по свойствам 5 и 7 произведение этих пяти чисел делится на произведение чисел 2 и 4, т. е. делится на 8.

2. Основные признаки делимости

Теперь поговорим о конкретных признаках делимости — на 2, 3, 4, 5 и т. д. В формулировках признаков мы впервые используем словесную конструкцию *необходимо и достаточно*. Обычно если из условия A следует условие B (прямая теорема), то математики говорят так: B является *необходимым условием* для A. Если же из условия B следует условие A (обратная теорема), то математики говорят так: B является *достаточным условием* для A. Если же и из A следует B, и из B следует A, математики используют словесную конструкцию *необходимо и достаточно* (или *тогда и только тогда*).

ПРИЗНАК ДЕЛИМОСТИ НА 2

Для того чтобы натуральное число делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра числа делилась на 2.

Доказательство Пусть c — цифра единиц натурального числа p. Тогда число p можно представить в виде $10a + c$. Так как $10 \vdots 2$, то по свойству 7 получаем, что $10a \vdots 2$. Если $c \vdots 2$, то $(10a + c) \vdots 2$. Обратно, если $(10a + c) \vdots 2$, то по свойству 4 $c \vdots 2$.

Аналогичные рассуждения позволяют получить признаки делимости на 5 и 10.

ПРИЗНАК ДЕЛИМОСТИ НА 5

Для того чтобы натуральное число делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра числа делилась на 5 (т. е. цифра единиц была либо 0, либо 5).

ПРИЗНАК ДЕЛИМОСТИ НА 10

Для того чтобы натуральное число делилось на 10, необходимо и достаточно, чтобы цифра единиц была 0.

Прежде чем формулировать и доказывать признак делимости на 4, заметим, что любое число p, содержащее не менее трёх цифр, можно представить в виде $100a + c$, где c — число, образованное последними двумя цифрами числа p. Например, $275 = 100 \cdot 2 + 75$, $14508 = 100 \cdot 145 + 8$ и т. д.

ПРИЗНАК ДЕЛИМОСТИ НА 4

Для того чтобы натуральное число p, содержащее не менее трёх цифр, делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 4 число, образованное двумя последними цифрами числа p.

Доказательство Пусть c — число, образованное двумя последними цифрами числа p. Тогда число p можно представить в виде $100a + c$. Так как $100a \vdots 4$, то по свойствам 3 и 4 $(100a + c) \vdots 4$ тогда и только тогда, когда $c \vdots 4$.

Например, 12456 делится на 4, поскольку делится на 4 число 56. А число 7906 не делится на 4, поскольку не делится на 4 число 06, т. е. число 6.

Подобные рассуждения позволяют получить признаки делимости на 25, 8 и 125.

ПРИЗНАК ДЕЛИМОСТИ НА 25

Для того чтобы натуральное число p, содержащее не менее трёх цифр, делилось на 25, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 25 число, образованное двумя последними цифрами числа p.

ПРИЗНАК ДЕЛИМОСТИ НА 8

Для того чтобы натуральное число p, содержащее не менее четырёх цифр, делилось на 8, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 8 число, образованное тремя последними цифрами числа p.

ПРИЗНАК ДЕЛИМОСТИ НА 125

Для того чтобы натуральное число p, содержащее не менее четырёх цифр, делилось на 125, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 125 число, образованное тремя последними цифрами числа p.

ПРИЗНАК ДЕЛИМОСТИ НА 3

Для того чтобы натуральное число делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 3.

Доказательство Количество цифр в числе p, как мы увидим, значения не имеет, поэтому будем считать, что в числе p, например, пять цифр: $p = \overline{abcde}$ (черта наверху — условное обозначение того, что $\overline{abcde}$ рассматривается не как произведение чисел a, b, c, d, e, а как число с соответствующими цифрами).

Имеем:

$$p = \overline{abcde} = 10\,000a + 1000b + 100c + 10d + e =$$
$$= (9999 + 1)a + (999 + 1)b + (99 + 1)c + (9 + 1)d + e =$$
$$= (9999a + 999b + 99c + 9d) + (a + b + c + d + e).$$

Сумма четырёх слагаемых в первых скобках делится на 3 по свойству 8 (поскольку 9, 99, 999, 9999 делятся на 3). Значит, по свойствам 2 и 3 для делимости числа p на 3 необходимо и достаточно, чтобы делилась на 3 сумма пяти слагаемых во вторых скобках — а это как раз сумма цифр числа p.

Аналогично доказывается признак делимости на 9.

ПРИЗНАК ДЕЛИМОСТИ НА 9

Для того чтобы натуральное число делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 9.

Рассмотрим, например, число 2742. Сумма его цифр равна 15. Число 15 делится на 3 и не делится на 9. Следовательно, число 2742 делится на 3 и не делится на 9.

ПРИМЕР 2

Найти пятизначное число, кратное 45, если известно, что каждая из трёх его средних цифр на 1 больше предыдущей.

Решение Пусть $\overline{abcde}$ — искомое число. По условию каждая из цифр b, c, d на 1 больше предыдущей. Это означает, что $b = a + 1$, $c = a + 2$, $d = a + 3$. Далее, по условию искомое число делится на 45. Это значит (по свойству 1), что оно делится на 5 и на 9. Поскольку число делится на 5, для его последней цифры есть лишь две возможности: либо $e = 0$, либо $e = 5$. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

1) Пусть $e = 0$. Тогда сумма цифр искомого числа, т. е. $a + b + c + d + e$, будет иметь вид $a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + 0$, т. е. $4a + 6$. По условию искомое число делится на 9. Согласно признаку делимости на 9 это означает, что сумма цифр искомого числа делится на 9.

Итак, $(4a + 6) \vdots 9$. При каких значениях a это возможно? Будем рассуждать так. Поскольку $(4a + 6) \vdots 9$, то по свойству 1 $(4a + 6) \vdots 3$ или, что то же самое, $((3a + 6) + a) \vdots 3$. Но $(3a + 6) \vdots 3$, значит, и $a \vdots 3$.

Итак, для первой цифры искомого числа есть следующие возможности: $a = 3$, $a = 6$, $a = 9$. Впрочем, сразу заметим, что $a = 9$ нас не устраивает, так как в этом случае $b = a + 1 = 10$ — не цифра.

Если $a = 3$, то $4a + 6 = 18$, а 18 делится на 9. Значение $a = 3$ нас устраивает.

Если $a = 6$, то $4a + 6 = 30$, а 30 не делится на 9. Значение $a = 6$ нас не устраивает.

Итак, осталась единственная возможность: $a = 3$. Тогда следующие три цифры искомого числа — 4, 5, 6, а само искомое число — 34 560.

2) Пусть $e = 5$. Тогда сумма цифр искомого числа, т. е. $a + b + c + d + e$, будет иметь вид $a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + 5$, т. е. $4a + 11$. По условию искомое число делится на 9. Следовательно, $(4a + 11) \vdots 9$. Придавая переменной a последовательные значения 1, 2, 3, 4, 5, 6 ($a = 7$ нас уже не устраивает, поскольку в этом случае $d = a + 3 = 10$ — не цифра; тем более нас не устраивают значения $a = 8$, $a = 9$), убеждаемся, что указанное соотношение выполняется лишь при $a = 4$; в этом случае выражение $4a + 11$ принимает значение 27, т. е. делится на 9.

Если $a = 4$, то следующие три цифры искомого числа — 5, 6, 7, а само искомое число — 45 675.

Ответ 34 560 или 45 675.

3 Признаки делимости на 11, 7 и 13

Завершая разговор о делимости натуральных чисел, рассмотрим более сложные признаки делимости на 11, на 7 и на 13.

Проведём вспомогательные рассуждения, которые позволят получить признак делимости на 11.

Рассмотрим числа 99, 9999, 999 999, 99 999 999 и т. д.; в каждом из этих чисел — чётное число девяток. Все эти числа, во-первых, делятся на 11, а во-вторых, представимы в виде соответственно $10^2 - 1$, $10^4 - 1$, $10^6 - 1$, $10^8 - 1$ и т. д.

Рассмотрим теперь числа 11, 1001, 100 001, 10 000 001 и т. д.; в каждом из этих чисел — чётное число нулей между единицами. Все эти числа, во-первых, делятся на 11, поскольку

$$1001 = 990 + 11,\ 100\,001 = 99\,990 + 11,\ 10\,000\,001 = 9\,999\,990 + 11,$$

(в записанных суммах первые слагаемые делятся на 11); а во-вторых, представимы в виде соответственно $10^1 + 1$, $10^3 + 1$, $10^5 + 1$, $10^7 + 1$ и т. д.

ПРИЗНАК ДЕЛИМОСТИ НА 11

Для того чтобы натуральное число делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма его цифр, взятых со знаком «плюс», если цифры находятся на нечётных местах (начиная с цифры единиц), и взятых со знаком «минус», если цифры находятся на чётных местах, делилась на 11.

Например, для числа 24 569 алгебраическая сумма, о которой идёт речь в формулировке признака, имеет вид $9 - 6 + 5 - 4 + 2$, она равна 6; поскольку число 6 не делится на 11, то и число 24 569 не делится на 11.

Для иллюстрации идеи доказательства признака возьмём 8-значное число $\overline{abcdefkm}$.

Имеем:

$$\overline{abcdefkm} = a \cdot 10^7 + b \cdot 10^6 + c \cdot 10^5 + d \cdot 10^4 + e \cdot 10^3 + f \cdot 10^2 + k \cdot 10 + m = (a \cdot (10^7 + 1) - a) + (b \cdot (10^6 - 1) + b) + (c \cdot (10^5 + 1) - c) + (d \cdot (10^4 - 1) + d) + (e \cdot (10^3 + 1) - e) + (f \cdot (10^2 - 1) + f) + (k \cdot (10^1 + 1) - k) + m =$$
$$= a \cdot (10^7 + 1) + b \cdot (10^6 - 1) + c \cdot (10^5 + 1) + d \cdot (10^4 - 1) + e \cdot (10^3 + 1) + f \cdot (10^2 - 1) + k \cdot (10 + 1) + (m - k + f - e + d - c + b - a).$$

Поскольку, как мы уже ранее установили, числа $10^7 + 1$, $10^6 - 1$, $10^5 + 1$, $10^4 - 1$, $10^3 + 1$, $10^2 - 1$, $10^1 + 1$ делятся на 11, делимость числа $\overline{abcdefkm}$ на 11 целиком и полностью зависит от делимости на 11 алгебраической суммы цифр $m - k + f - e + d - c + b - a$.

ПРИМЕР 3

Не выполняя деления, доказать, что число 86 849 796 делится на 11.

Решение Составим алгебраическую сумму цифр данного числа, начиная с цифры единиц и чередуя знаки «+» и «–»: $6 - 9 + 7 - 9 + 4 - 8 + 6 - 8 = -11$. Число -11 делится на 11, значит, и заданное число делится на 11.

Проведём вспомогательные рассуждения, которые позволят получить признаки делимости на 7 и на 13.

Рассмотрим число $10^3 + 1$, т. е. 1001. Имеем $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Следовательно, $(10^3 + 1) \vdots 7$ и $(10^3 + 1) \vdots 13$.

Рассмотрим число $10^6 - 1$. Имеем $10^6 - 1 = (10^3 + 1)(10^3 - 1)$. Значит, $(10^6 - 1) \vdots 7$ и $(10^6 - 1) \vdots 13$.

Аналогично можно установить, что $10^9 + 1$, $10^{12} - 1$ и т. д. кратны 1001, а поэтому делятся на 7 и на 13. Например,

$$10^9 + 1 = (10^3 + 1)(10^6 - 10^3 + 1),$$
$$10^{12} - 1 = (10^6 - 1)(10^6 + 1) = (10^3 + 1)(10^3 - 1)(10^6 + 1).$$

Покажем, как используются проведённые рассуждения для получения признака делимости на 7 (на 13). Возьмём, например, 8-значное число $\overline{abcdefkm}$ и разобьём его на грани, по 3 цифры в каждой грани, начиная с цифры единиц: $\overline{ab\,cde\,fkm}$. Введём обозначения: $\overline{ab} = x$, $\overline{cde} = y$, $\overline{fkm} = p$. Тогда заданное число $\overline{abcdefkm}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}\overline{abcdefkm} &= x \cdot 10^6 + y \cdot 10^3 + p = \\ &= (x \cdot (10^6 - 1) + x) + (y \cdot (10^3 + 1) - y) + p = \\ &= x \cdot (10^6 - 1) + y \cdot (10^3 + 1) + (p - y + x).\end{aligned}$$

Поскольку, как мы установили выше, числа $10^6 - 1$ и $10^3 + 1$ делятся на 7 (на 13), делимость числа $\overline{abcdefkm}$ на 7 (на 13) целиком и полностью зависит от делимости на 7 (на 13) алгебраической суммы чисел $(p - y + x)$.

Теперь сформулируем признак делимости натурального числа на 7 и на 13.

ПРИЗНАК ДЕЛИМОСТИ НА 7 (НА 13)

Для того чтобы натуральное число делилось на 7 (на 13), необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма чисел, образующих грани по три цифры в грани (начиная с цифры единиц), взятых со знаком «плюс» для нечётных граней и со знаком «минус» для чётных граней, делилась на 7 (на 13).

ПРИМЕР 4

Не выполняя деления, доказать, что число 254 390 815 делится на 7 и не делится на 13.

Решение Разобьём число на грани 254, 390, 815. Составим алгебраическую сумму граней, начиная с последней грани и чередуя знаки «+» и «–»: 815 – 390 + 254 = 679. Число 679 делится на 7 и не делится на 13, значит, и заданное число делится на 7 и не делится на 13.

Вопросы для самопроверки

1. Что означает запись $a \vdots b$, где a, b — натуральные числа? Чем она отличается от записи $a : b$?
2. Какие вы знаете свойства отношения делимости на множестве натуральных чисел?
3. Докажите, что если $a \vdots b_1$ и $c \vdots b_2$, то $ac \vdots b_1b_2$.
4. Докажите, что если $a \vdots b$ и $c \in N$, то $ac \vdots bc$. Сформулируйте и докажите обратную теорему.

5. Докажите, что если $a \vdots b$ и $c \in N$, то $ac \vdots b$.
6. Объясните, почему среди 2015 подряд идущих натуральных чисел одно и только одно делится на 2015.
7. Сформулируйте признак делимости на 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 12; 18; 36; 45.
8. Дано число 123 456. Делится ли оно: на 2; 3; 4; 5; 6; 9; 11; 12; 18? Обоснуйте свои выводы.

ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

Определение

Если натуральное число имеет только два натуральных делителя — само себя и 1, — то его называют **простым числом**; если оно имеет более двух делителей, то его называют **составным числом**.

Число 1, имеющее лишь один делитель 1, не относят ни к простым, ни к составным. Например, числа 2, 3, 5, 7, 19, 101 — простые, а числа 4, 6, 8, 35, 121 — составные.

простое число

составное число

Простые числа играют в математике особую роль, поскольку, как вы узнаете из § 50, любое натуральное число, начиная с 2, либо является простым, либо его можно представить в виде произведения простых множителей.

ТЕОРЕМА 1

Любое натуральное число $a > 1$ имеет хотя бы один простой делитель.

Доказательство Если a — простое число, то $a = a \cdot 1$, откуда следует, что у заданного числа есть простой делитель a. Пусть теперь a — составное число. Тогда его можно представить в виде $a = a_1c_1$, где оба множителя отличны от 1 и меньше a. Если хотя бы один из множителей — простое число, то свойство доказано. Если оба множителя — составные числа, то рассмотрим число a_1 и представим его в виде $a_1 = a_2c_2$, где оба множителя отличны от 1 и меньше a_1. Если хотя бы один из множителей — простое число, то свойство доказано, если нет, то представим a_2 в виде произведения чисел, меньших, чем a_2, и т. д. Тогда либо на каком-то шаге обнаружится простой множитель, либо придётся предположить, что процесс составления чисел a_1, a_2, a_3, a_4 и т. д. бесконечен. Но бесконечным он быть не может, так как все указанные числа разные и меньше a, поэтому их — конечное множество. Следовательно, на каком-то шаге обнаружится простой делитель числа a.

Простые числа обладают многими интересными свойствами. Остановимся на двух из них.

ТЕОРЕМА 2

Множество простых чисел бесконечно.

Доказательство Предположим противное, что множество простых чисел конечно. Тогда можно выписать все простые числа: p_1, p_2, p_3, ..., p_k. Составим теперь число a следующим образом: $a = p_1p_2p_3 \times \times \ldots \cdot p_k + 1$. По теореме 1 у числа a есть хотя бы один простой делитель, т. е. число a делится на одно из чисел p_1, p_2, p_3, ..., p_k (ведь мы предположили, что других простых чисел нет). Но 1 не делится ни на одно из этих чисел, значит, по свойству 3 из § 46 число a не делится ни на одно из этих чисел. Получили противоречие, поэтому сделанное предположение неверно, т. е. на самом деле множество простых чисел бесконечно.

Исследователей всегда интересовал вопрос о распределении простых чисел среди натуральных чисел. Выпишем подряд простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37. Назовём *расстоянием* между соседними простыми числами их разность. Обратите внимание, что в выписанной последовательности эти расстояния равны соответственно 1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6. А между соседними простыми числами 119 и 127 расстояние равно 8. Вообще имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3

Расстояние между двумя соседними простыми числами может быть больше любого наперёд заданного натурального числа.

Доказательство Возьмём произвольное натуральное число a и докажем, что найдутся два соседних простых числа, расстояние между которыми больше a. Составим натуральное число $c = 1 \cdot 2 \times \times 3 \cdot \ldots \cdot a \cdot (a + 1)$. Оно делится на 2, 3, 4, 5, ..., a, $a + 1$. Тогда число $c + 2$ делится на 2, число $c + 3$ делится на 3, число $c + 4$ — на 4 и т. д., число $c + a$ — на a, число $c + a + 1$ — на $a + 1$ (см. свойство 2 в § 46). Это значит, что a подряд идущих чисел $c + 2$, $c + 3$, $c + 4$, ..., $c + a$, $c + a + 1$ — составные, т. е. расстояние между ближайшим к $c + 2$ простым числом (слева) и ближайшим к $c + a + 1$ простым числом (справа) больше a.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое простое число? Что такое составное число?
2. Может ли расстояние между двумя соседними простыми числами быть равным 2, 4, 6? Приведите примеры. Может ли это расстояние быть больше 2017?

3. Конечно или бесконечно множество простых чисел? Конечно или бесконечно множество составных чисел?

§ 48 ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

Если натуральное число a не делится на натуральное число b, то рассматривают *деление с остатком*. Например, при делении числа 37 на число 15 в частном получается 2 (*неполное частное*) и в остатке 7. При этом имеет место соотношение $37 = 15 \cdot 2 + 7$. Вообще справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА

Если натуральное число a больше натурального числа b и a не делится на b, то существует одна и только одна пара натуральных чисел q и r, причём $r < b$, такая, что выполняется равенство

$$a = bq + r. \qquad (1)$$

Например, для $a = 37$, $b = 15$ такая пара чисел найдена выше: $q = 2$, $r = 7$ — при этом остаток r меньше делителя b.

Доказательство По условию $b < a$. Рассмотрим числа b, $2b$, $3b$, $4b$, ... Начиная с некоторого места все они будут больше числа a. Первое из чисел такого вида, которое станет больше числа a, обозначим $(q + 1)b$, т. е. $qb + b$. Следовательно,

$$qb < a < qb + b.$$

Но тогда $a = bq + r$, где $r < b$.

Итак, *существование* интересующей нас пары чисел q, r доказано. Докажем теперь, что такая пара *единственна*.

Предположим, что существуют две различные пары натуральных чисел $(q_1; r_1)$ и $(q_2; r_2)$ такие, что

$$a = bq_1 + r_1, \quad r_1 < b;$$
$$a = bq_2 + r_2, \quad r_2 < b.$$

Сразу заметим, что если $r_1 = r_2 = r$, то из равенства $bq_1 + r = bq_2 + r$ получим $q_1 = q_2$, т. е. пары $(q_1; r_1)$ и $(q_2; r_2)$ одинаковы; если $q_1 = q_2 = q$, то из равенства $bq + r_1 = bq + r_2$ получим $r_1 = r_2$, значит, опять пары одинаковы. Таким образом, если пары различны, то $r_1 \neq r_2$ и $q_1 \neq q_2$.

Будем считать для определённости, что $r_1 > r_2$. Так как $bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$, то $r_1 - r_2 = b(q_2 - q_1)$. Это значит, что $r_1 - r_2$ делится на b. Но это невозможно, поскольку натуральное число $r_1 - r_2$ меньше b. Следовательно, сделанное предположение о существовании двух пар натуральных чисел неверно и единственность доказана.

Замечание Если $a \vdots b$, то также можно считать, что для чисел a и b выполняется равенство (1), где $r = 0$.

Иногда удобнее формулу деления с остатком записывать несколько в ином виде. Имеем:

$$a = bq + r = b(q + 1) - (b - r).$$

Поэтому можно записать так:

$$a = bq_1 - r_1, \qquad (2)$$

где $0 < r_1 < b$.

ПРИМЕР 1

Составить формулу:

а) чётного числа;

б) нечётного числа;

в) натурального числа, которое при делении на 3 даёт в остатке 2.

Решение а) Чётное число n — это число, которое делится на 2. Значит, $n = 2k$ — это хорошо известная вам формула чётного числа.

б) Нечётное число n — это число, которое при делении на 2 даёт в остатке 1. Воспользовавшись соотношениями (1) или (2), получим формулу нечётного числа $n = 2k + 1$ или $n = 2k - 1$.

в) Согласно соотношению (1), формула натурального числа n, которое при делении на 3 даёт в остатке 2, имеет вид $n = 3k + 2$. То же самое по формуле (2) можно записать так: $n = 3k - 1$.

ПРИМЕР 2

Доказать, что если натуральное число при делении на 3 даёт в остатке 2, то оно не может быть точным квадратом.

Решение Пусть $n = 3m + 2$. Предположим, что это число является точным квадратом, т. е. существует такое натуральное число a, что $n = a^2$. Для самого числа a есть три возможности: a делится на 3, т. е. имеет вид $a = 3k$; a при делении на 3 даёт в остатке 1, т. е. имеет вид $a = 3k + 1$; a при делении на 3 даёт в остатке 2, т. е. имеет вид $a = 3k + 2$.

Если $a = 3k$, то $n = a^2 = (3k)^2 = 9k^2$. Это число делится на 3, что противоречит условию. Если $a = 3k + 1$, то $n = a^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$. Это число при делении на 3 даёт в остатке 1, что противоречит условию. Если, наконец, $a = 3k + 2$, то $n = a^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$. Это число при делении на 3 даёт в остатке 1, что противоречит условию.

Итак, в любом возможном случае приходим к противоречию; таким образом, наше предположение неверно, т. е. заданное число не является точным квадратом.

Завершая параграф, докажем свойство 9 из § 46.

Даны n подряд идущих натуральных чисел: k, $k + 1$, $k + 2$, ..., $k + (n - 1)$. Требуется доказать, что среди них имеется число, которое делится на n, причём такое число единственно.

Доказательство Если $k \vdots n$, то утверждение доказано: само число k уже делится на n, тогда как числа $k + 1$, $k + 2$, ..., $k + (n - 1)$ на n не делятся (см. свойство 3 из § 46).

Если k не делится на n и $k < n$, то среди чисел k, $k + 1$, $k + 2$, ..., $k + (n - 1)$ встретится само число n: это будет $k + (n - k)$; только оно и делится на n.

Если k не делится на n и $k > n$, то по теореме существует одна и только одна пара натуральных чисел q и r, причём $r < n$, такая, что выполняется равенство $k = nq + r$. Тогда среди чисел k, $k + 1$, $k + 2$, ..., $k + (n - 1)$ опять-таки встретится только одно число, делящееся на n, им будет число $nq + r + (n - r)$. В самом деле,

$$nq + r + (n - r) = nq + n = n(q + 1),$$

а это число делится на n.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте теорему о делении с остатком.
2. Запишите общий вид натуральных чисел, которые при делении на 15 дают в остатке 11.

§ 49 НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ И НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ

Рассмотрим два числа 72 и 96. Выпишем все делители числа 72:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.

Выпишем теперь все делители числа 96:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96.

Среди выписанных чисел есть одинаковые:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 —

их называют *общими делителями чисел* 72 *и* 96, *а наибольшее из них называют наибольшим общим делителем* (*НОД*) *чисел* 72 *и* 96. Итак, НОД(72, 96) = 24.

Для любых заданных натуральных чисел можно найти НОД. Например, НОД(45, 75, 120) = 15, НОД(27, 81) = 27.

Определение

Два натуральных числа a и c называют **взаимно простыми числами**, если у них нет общих делителей, отличных от 1; иными словами, если НОД(a, c) = 1.

Например, взаимно простыми являются числа 35 и 36, хотя каждое из них — составное число. В самом деле, у числа 35 четыре делителя: 1, 5, 7, 35, а у числа 36 девять делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Общих делителей, отличных от 1, у чисел 35 и 36 нет.

взаимно простые числа

Вполне очевидно следующее утверждение: *если даны натуральные числа* a и p, *причём* p — *простое число, то либо* a *делится на* p, *либо* a *и* p — *взаимно простые числа.*

Рассмотрим два числа: 12 и 18. Выпишем числа, кратные 12:

12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, 156, ...

Выпишем теперь числа, кратные 18:

18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, 162, 180, ...

Среди выписанных чисел есть одинаковые:

36, 72, 108, 144, ... —

их называют *общими кратными чисел* 12 *и* 18, а наименьшее из них называют *наименьшим общим кратным* (*НОК*) *чисел* 12 *и* 18. Итак, НОК(12, 18) = 36.

Для любых заданных натуральных чисел можно найти НОК. Например, НОК(20, 30, 40) = 120, НОК(27, 81) = 81.

Обычные приёмы отыскания НОД и НОК мы напомним в следующем параграфе.

ТЕОРЕМА 1

Если K — общее кратное чисел a и c, то $K \vdots$ НОК(a, c).

Доказательство По условию $K \vdots a$, $K \vdots c$. Предположим противное, что K не делится на НОК(a, c). Обозначим НОК(a, c) буквой m. Заметим, что $m \vdots a$, $m \vdots c$.

По теореме о делении с остатком число K можно представить в виде $K = mq + r$, где $0 < r < m$. Так как $K \vdots a$, $m \vdots a$, то и $r \vdots a$. Далее, так как $K \vdots c$, $m \vdots c$, то и $r \vdots c$. Итак, $r \vdots a$, $r \vdots c$, следовательно, r — общее кратное чисел a и c, поэтому $r \geqslant m$ вопреки условию $0 < r < m$. Полученное противоречие означает, что сделанное предположение неверно. Значит, $K \vdots$ НОК(a, c).

СЛЕДСТВИЕ 1

Если $a \vdots b_1$ и $a \vdots b_2$, то $a \vdots$ НОК(b_1, b_2).

СЛЕДСТВИЕ 2

Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $\frac{ab}{c}$ — общее кратное чисел a и b.

Доказательство Так как $a \vdots c$, то $a = cm$, $ab = bcm$, $\frac{ab}{c} = bm$, т. е. $\frac{ab}{c} \vdots b$. Аналогично доказывается, что $\frac{ab}{c} \vdots a$.

ПРИМЕР 1

Доказать, что для любого натурального числа n справедливо соотношение $(n^5 - 5n^3 + 4n) \vdots 120$.

Решение В § 46 в примере 1 было доказано, что при любом натуральном значении n число $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 2, 3, 4, 5, 8. Тогда по следствию 1 оно делится и на НОК чисел 2, 3, 4, 5, 8, т. е. на 120.

ТЕОРЕМА 2

Для любых натуральных чисел a и b справедливо равенство

$$\text{НОК}(a, b) \cdot \text{НОД}(a, b) = ab. \qquad (1)$$

Доказательство Введём обозначения:

$$\text{НОК}(a, b) = k, \quad \text{НОД}(a, b) = d.$$

Так как ab — общее кратное чисел a и b, то по теореме 1 $ab \vdots k$, поэтому $ab = kc$. Поскольку $k \vdots a$, то $k = am$. Подставив выражение am вместо k в равенство $ab = kc$, получим $ab = amc$, т. е. $b = mc$. Это значит, что $b \vdots c$. Аналогично можно доказать, что $a \vdots c$. Таким образом, c — общий делитель чисел a и b, поэтому c не больше их НОД: $c \leqslant d$. Но тогда $k = \frac{ab}{c} \geqslant \frac{ab}{d}$. Итак, $\frac{ab}{d} \leqslant k$.

С другой стороны, по следствию 2 из теоремы 1 число $\frac{ab}{d}$ — общее кратное чисел a и b, поэтому оно не меньше их НОК: $\frac{ab}{d} \geqslant k$.

Итак, $\frac{ab}{d} \geqslant k$ и в то же время $\frac{ab}{d} \leqslant k$. Следовательно, $\frac{ab}{d} = k$, т. е. $ab = dk$, что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 1

Если числа a и b — взаимно простые, то НОК$(a, b) = ab$.

СЛЕДСТВИЕ 2

Если $a \vdots b_1$, $a \vdots b_2$ и числа b_1 и b_2 — взаимно простые, то $a \vdots b_1b_2$.

Равенство (1) иногда используют для отыскания наименьшего общего кратного двух чисел.

ПРИМЕР 2

Найти НОК(276, 282).

Решение Оба заданных числа чётные и делятся на 3, значит, делятся и на 6. Поскольку 282 − 276 = 6, у заданных чисел не может быть общего делителя, большего чем 6. Итак, НОД(276, 282) = 6. По формуле (1) получаем

$$\text{НОК}(276, 282) = \frac{276 \cdot 282}{\text{НОД}(276, 282)} = \frac{276 \cdot 282}{6} =$$

$$= (276 : 6) \cdot 282 = 12\,972.$$

Отметим ещё два свойства делимости, из которых второе является следствием первого.

ТЕОРЕМА 3

Если числа a и p взаимно простые и $ac \vdots p$, то $c \vdots p$.

Доказательство Так как a и p — взаимно простые числа, то НОК$(a, p) = ap$. По условию $ac \vdots p$; кроме того, $ac \vdots a$. Следовательно, ac — общее кратное чисел a и p и по теореме 1 оно делится на НОК(a, p). Таким образом, $ac \vdots ap$, откуда следует, что $c \vdots p$ (см. свойство 6 из § 46).

СЛЕДСТВИЕ

Если p — простое число и $ac \vdots p$, то хотя бы одно из чисел a, c делится на p.

ПРИМЕР 3

Доказать, что $\sqrt[3]{6}$ — иррациональное число.

Решение Предположим, что $\sqrt[3]{6}$ — рациональное число. Ясно, что это не натуральное число, а потому $\sqrt[3]{6} = \frac{m}{n}$, где $n > 1$ и $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, т. е. m и n — взаимно простые числа. Тогда $\left(\frac{m}{n}\right)^3 = 6$, $m^3 = 6n^3$, поэтому $m^3 \vdots n^3$. Значит, $m^3 \vdots n$, т. е. $(m \cdot m^2) \vdots n$. По предположению числа m и n — взаимно простые, значит, по теореме 3 $m^2 \vdots n$, т. е. $(m \cdot m) \vdots n$. Но тогда по той же теореме $m \vdots n$, т. е. $\frac{m}{n}$ — сократимая дробь вопреки сделанному предположению.

Таким образом, наше предположение неверно, поэтому $\sqrt[3]{6}$ — иррациональное число.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое наибольший общий делитель двух натуральных чисел? Найдите НОД(72; 108).
2. Что такое наименьшее общее кратное двух натуральных чисел? Найдите НОК(72; 15).
3. Каким соотношением связаны между собой числа a, b, НОД(a; b) и НОК(a; b)?
4. Что такое взаимно простые числа?
5. Известно, что числа a и b — взаимно простые. Найдите НОД(a; b) и НОК(a; b).

§5.5 ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Основной теоремой арифметики называют обычно совокупность двух утверждений, одно из которых (теорему 1) мы докажем, а другое (теорему 2) приведём без доказательства.

ТЕОРЕМА 1

Любое натуральное число (кроме 1) либо является простым, либо его можно разложить на простые множители.

Например, $35 = 5 \cdot 7$, $54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, $169 = 13 \cdot 13$, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ и т. д.

Доказательство Пусть a — составное число. По теореме 1 из § 47 оно имеет простой делитель, т. е. число a можно представить в виде $a = a_1p_1$, где p_1 — простое число. Если при этом и a_1 — простое число, то теорема доказана. Если a_1 — составное число, то его можно представить в виде $a_1 = a_2p_2$, где p_2 — простое число. Если при этом и a_2 — простое число, то теорема доказана. Если a_2 — составное число, то продолжим указанный процесс. Тогда либо на каком-то шаге получится разложение на простые множители, либо придётся предположить, что процесс составления чисел a_1, a_2, a_3, a_4 и т. д. бесконечен. Но бесконечным он быть не может, так как все указанные числа меньше a, поэтому их — конечное множество. Следовательно, на каком-то конечном шаге получится окончательное разложение числа a на простые множители.

ТЕОРЕМА 2

Если натуральное число разложено на простые множители, то такое разложение единственно; иными словами, любые два разложения числа на простые множители отличаются друг от друга лишь порядком множителей.

При разложении числа на простые множители используют признаки делимости и применяют запись столбиком, при которой делитель располагают справа от вертикальной черты, а частное записывают под делимым.

ПРИМЕР 1

Разложить на простые множители число:

а) 3780; б) 7056.

Решение

а)

3780	2
1890	2
945	3
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

Итак, $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

б)

7056	2
3528	2
1764	2
882	2
441	3
147	3
49	7
7	7
1	

Итак, $7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$.

каноническое разложение на множители

В обоих случаях мы использовали так называемые *канонические разложения*, когда простые множители располагаются в порядке возрастания.

Знание канонических разложений позволяет без особого труда находить наибольший общий делитель или наименьшее общее кратное заданных чисел.

ПРИМЕР 2

Вычислить

НОД(3780, 7056) и НОК(3780, 7056).

Решение Имеем

$$3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7,$$
$$7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2.$$

Значит,

$$\text{НОД}(3780, 7056) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252;$$
$$\text{НОК}(3780, 7056) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 105\,840.$$

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте основную теорему арифметики натуральных чисел.
2. Разложите на простые множители число 630.

Основные результаты

- В этой главе мы познакомились со свойствами делимости натуральных чисел.

- Мы изучили конкретные признаки делимости:
  на 2: число делится на 2 тогда и только тогда, когда последняя цифра числа чётная;
  на 5: число делится на 5 тогда и только тогда, когда оно заканчивается на 0 или 5;
  на 10: число делится на 10 тогда и только тогда, когда оно заканчивается на 0;
  на 4: число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры образуют число, делящееся на 4;
  на 25: число делится на 25 тогда и только тогда, когда две его последние цифры образуют число, делящееся на 25;
  на 8: число делится на 8 тогда и только тогда, когда три его последние цифры образуют число, делящееся на 8;
  на 125: число делится на 125 тогда и только тогда, когда три его последние цифры образуют число, делящееся на 125;
  на 3: число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3;
  на 9: число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9;
  а также признаки делимости на 7, 11 и 13.
- Мы изучили некоторые свойства множества простых чисел и познакомились с основной теоремой арифметики.
- Мы выяснили, как связаны между собой наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух натуральных чисел:
  НОК(a, b) · НОД$(a, b) = ab$.
- Мы познакомились с комбинаторной теоремой о выборе двух элементов.

Тема исследовательской работы

Признаки делимости.

Предметный указатель

Алгебраическая дробь 4
— — знаменатель 4, 6, 8, 21
— — область определения 6
— — основное свойство 6
— — сокращение 6, 8
— — числитель 4, 6, 8
Асимптота 109

Бесконечная десятичная периодическая дробь 34
Биквадратное уравнение 225

Взаимно однозначное соответствие 51
— простые числа 272
Возвратное уравнение 226
Возрастающая функция 62
Выпуклость функции вверх (вниз) 64, 65, 99, 100

Гипербола 107
— ветви 108

Деление многочленов 214
Дерево вариантов 27
Дискриминант 155, 158
Допустимые значения переменных 6, 15
Дробно-линейная функция 140

Знак включения 33
— принадлежности 33

Извлечение квадратного корня 43
Иррациональное уравнение 176, 236
— число 47

Каноническое разложение на множители 277
Квадратное неравенство 189
— — решение 191, 192
— уравнение 150
— — неполное 151, 152
— — неприведённое 151
— — полное 151
— — приведённое 151
— — решение 156, 157, 159, 160, 162
Квадратный корень 42
— трёхчлен 151, 169
— — корень 151, 170
Корень многочлена 216
Кубический корень 46

Линейное неравенство 186

Метод возведения в квадрат 237
— доказательства от противного 41
— интервалов 194
Многочлен неприведённый 213
— приведённый 213, 222
— стандартного вида 213
Множество действительных чисел 50
— рациональных чисел 33, 37
— целых чисел 33
Модуль действительного числа 79, 86
Монотонность функции 63
— — возрастание 62, 87, 98, 100, 113
— — убывание 62, 65, 87, 98, 100, 112

Наибольший общий делитель (НОД) 271
Наименьшее общее кратное (НОК) 272
Наименьший общий знаменатель 13
Непрерывная функция 63

Неравенства с переменной 185
— — — решение 185
Неравносильные преобразования уравнения 241

О бласть значений функции 64
Общее кратное нескольких многочленов 220
Общий делитель многочленов 219
— знаменатель нескольких алгебраических дробей 9
Ограниченность функции снизу (сверху) 98, 99
Окрестность точки 115
Округление числа 201, 202
Освобождение от иррациональности в знаменателе 76

П арабола 95, 132
— вершина 95, 133
— ось 96, 133
— фокус 96
Период дроби 34
Погрешность абсолютная 202
— относительная 203
Подкоренное число 42
Подмножество 33
Порядок числа 207
Правило нахождения вероятности 30
— умножения 90, 209
Приближение числа по избытку 201
— — — недостатку 201
Признак делимости 261, 262, 263, 265, 266
Простое число 267

Р авносильное преобразование уравнения 241
Равносильные неравенства 187
— преобразования неравенств 187
— уравнения 241
Рациональное выражение 18
— уравнение 172, 228

С войство транзитивности 55
Смешанно периодическая дробь 37
Составное число 267
Среднее арифметическое 197
— геометрическое 197
Стандартный вид числа 207
Степень многочлена 213

Т еорема Безу 216
— Виета 164, 166
— о выборе двух элементов 278
Точка максимума 115
— минимума 115
— экстремума 115

У бывающая функция 62
Уравнение с параметром 246

Ч исловая прямая 51
Чисто периодическая дробь 37

Оглавление

Предисловие 3

ГЛАВА 1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

§ 1. Основные понятия 4
§ 2. Сложение и вычитание алгебраических дробей . . . 10
§ 3. Умножение и деление алгебраических дробей. Возведение алгебраической дроби в степень 16
§ 4. Преобразование рациональных выражений 18
§ 5. Первые представления о решении рациональных уравнений 20
§ 6. Степень с отрицательным целым показателем . . . 23
§ 7. Комбинаторные и вероятностные задачи. Дерево вариантов и правило нахождения вероятности 26

ГЛАВА 2. ФУНКЦИЯ $y = \sqrt{x}$. СВОЙСТВА КВАДРАТНОГО КОРНЯ

§ 8. Рациональные числа 32
§ 9. Понятие квадратного корня из неотрицательного числа 39
§ 10. Иррациональные числа 47
§ 11. Множество действительных чисел 50
§ 12. Числовые неравенства 54
§ 13. Функция $y = \sqrt{x}$, её свойства и график 60
§ 14. Свойства квадратного корня 68
§ 15. Преобразование выражений, содержащих операцию извлечения квадратного корня 72
§ 16. Алгоритм извлечения квадратного корня 77
§ 17. Модуль действительного числа. Функция $y = |x|$ . . . 79
§ 18. Комбинаторные и вероятностные задачи. Правило умножения 89

ГЛАВА 3. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ. ФУНКЦИЯ $y = \frac{k}{x}$

§ 19. Функция $y = kx^2$, её свойства и график 94
§ 20. Функция $y = \frac{k}{x}$, её свойства и график 106
§ 21. Как построить график функции $y = f(x + l) + m$, если известен график функции $y = f(x)$ 119

§ 22. Функция $y = ax^2 + bx + c$, её свойства и график . . . 131
§ 23. Графическое решение квадратных уравнений 136
§ 24. Дробно-линейная функция 140
§ 25. Как построить графики функций $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$, если известен график функции $y = f(x)$ 142
§ 26. Комбинаторные и вероятностные задачи к главе 3 146

ГЛАВА 4. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 27. Основные понятия 150
§ 28. Формулы корней квадратного уравнения 155
§ 29. Теорема Виета. 164
§ 30. Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители 169
§ 31. Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций. 172
§ 32. Комбинаторные и вероятностные задачи к главе 4 180

ГЛАВА 5. НЕРАВЕНСТВА

§ 33. Линейные неравенства 185
§ 34. Квадратные неравенства 189
§ 35. Доказательство неравенств 195
§ 36. Приближённые вычисления 200
§ 37. Стандартный вид числа 207
§ 38. Комбинаторные и вероятностные задачи к главе 5 209

ГЛАВА 6. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 39. Многочлены от одной переменной 213
§ 40. Уравнения высших степеней 221
§ 41. Рациональные уравнения 228
§ 42. Уравнения с модулем 231
§ 43. Иррациональные уравнения 236
§ 44. Задачи с параметрами 246
§ 45. Комбинаторные и вероятностные задачи к главе 6 252

ГЛАВА 7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДЕЛИМОСТИ

§ 46. Делимость чисел 257
§ 47. Простые и составные числа 267

§ 48. Деление с остатком 269
§ 49. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное 271
§ 50. Основная теорема арифметики натуральных чисел 275
§ 51. Комбинаторные и вероятностные задачи. Теорема о выборе двух элементов 277
Предметный указатель 282
Исторические сведения 284

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДЕЛИМОСТИ

§46 ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

257 Прочитайте пп. 1 и 2 в § 46 учебника.

46.1 Из чисел 124, 345, 570, 288, 441 и 729 укажите числа, кратные:
а) 2; б) 3; в) 5; г) 10.

46.2 Назовите делители числа:
а) 24; б) 54; в) 75; г) 90.

46.3 а) Число n кратно 3. Докажите, что число $4n$ кратно 12.
б) Число m кратно 7. Докажите, что число $2m$ кратно 14.

46.4 а) Число a кратно 6. Докажите, что $a^2 + 12a$ кратно 36.
б) Число a кратно 4. Докажите, что $a^2 + 2a$ кратно 8.

46.5 а) Число a кратно 2, а число b кратно 3. Докажите, что $3a + 2b$ кратно 6.
б) Число a кратно 2, а число b кратно 5. Докажите, что $2b + 5a$ кратно 10.

Докажите, что:

46.6 а) $23^6 + 23^7$ кратно 24;
б) $8^5 - 32^2$ кратно 31;
в) $37^8 - 37^7$ кратно 18;
г) $3^{16} + 9^6$ кратно 41.

46.7 а) $21^4 - 7^5$ делится на 37;
б) $10^5 + 5^7$ делится на 19;
в) $15^4 - 9^3$ делится на 11;
г) $72^2 + 6^5$ делится на 30.

46.8 а) $2137^2 - 953^2$ делится на 20;
б) $3378^2 + 1284^2$ делится на 6;
в) $8973^2 - 1737^2$ делится на 90;
г) $546\ 768^2 + 11\ 112^2$ делится на 12.

46.9 а) $778^3 - 153^3$ делится на 5^4;
б) $78^3 + 84^3$ делится на 3^4;
в) $973^3 - 757^3$ делится на 6^3;
г) $772^3 + 228^3$ делится на 10^3.

46.10 а) $3\ 456\ 728\ 496 \vdots 4$;
б) $473\ 928\ 375 \vdots 125$;
в) $26\ 354\ 981\ 175 \vdots 25$;
г) $1\ 736\ 907\ 064 \vdots 8$.

Прочитайте п. 3 в § 46 учебника. 264

46.11 Докажите, что:
а) $103\ 211\ 064 \vdots 11$;
б) $110\ 238\ 072 \vdots 7$;
в) $102\ 257\ 246 \vdots 13$;
г) $1\ 235\ 234 \vdots 1001$.

Прочитайте п. 1 в § 46 учебника. 257

46.12 Не производя вычислений, докажите, что $a \vdots b$, если:
а) $a = 213 \cdot 488 \cdot 204 \cdot 315$, $b = 120$;
б) $a = 276 \cdot 485 \cdot 204 \cdot 315$, $b = 300$;
в) $a = 215 \cdot 497 \cdot 241 \cdot 335$, $b = 175$;
г) $a = 549 \cdot 495 \cdot 204 \cdot 315$, $b = 900$.

46.13 Докажите, что следующее утверждение верно для любого натурального значения n:
а) $(3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}) \vdots 13$;
б) $(7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2}) \vdots 19$;
в) $(5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2}) \vdots 155$;
г) $(2^{2n} + 2^{2n+1} + 2^{2n+2}) \vdots 28$.

46.14 Докажите, что:
а) $(53^3 + 63^3)$ делится на 116;
б) $(18^3 + 26^3)$ делится на 176;
в) $(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 181^3 + 182^3)$ делится на 183;
г) $(2^3 + 3^3 + ... + 196^3 + 197^3)$ делится на 199.

46.15 а) Произведение двух идущих подряд натуральных чисел делится на 2;
б) произведение трёх идущих подряд натуральных чисел делится на 3 и на 6;
в) произведение четырёх идущих подряд натуральных чисел делится на 4, 12 и 24;
г) произведение пяти идущих подряд натуральных чисел делится на 5, 20 и 120.

46.16 а) Докажите, что произведение любых 100 последовательных натуральных чисел делится на 10 000.
б) Докажите, что произведение любых n ($n > 1$) последовательных натуральных чисел делится на n.

Докажите, что:

46.17 а) $ad + bc + ac + bd$ делится на $a + b$;
б) $ab + bc - ad - cd$ делится на $b - d$.

46.18 а) Если $ad + bc$ делится на $a + b$, то и $ac + bd$ делится на $a + b$;
б) если $ad + bc$ не делится на $a + b$, то и $ac + bd$ не делится на $a + b$.

46.19 а) $\left(\overline{ab} + \overline{ba}\right) \vdots 11$; в) $\left(\overline{ab} - \overline{ba}\right) \vdots 9$;
б) $\left(\overline{abcd} + \overline{dcba}\right) \vdots 11$; г) $\left(\overline{abc} - \overline{cba}\right) \vdots 99$.

46.20 а) Число $2a + 7b$ не делится на 13. Докажите, что и $11a + 6b$ не делится на 13.
б) Число $37a + 11b$ не делится на 19. Докажите, что число $a + 8b$ не делится на 19.

Найдите все такие натуральные числа n, при которых является натуральным числом выражение:

46.21 а) $\dfrac{3n + 7}{n}$; в) $\dfrac{7n + 27}{n}$;
б) $\dfrac{3n + 14}{n + 2}$; г) $\dfrac{8n + 77}{2n + 1}$.

46.22 а) $\frac{5n^2 + 7n - 12}{n}$; в) $\frac{6n^2 - 8n + 90}{2n}$;

б) $\frac{n^7 + 3n^2 + 36}{n^2}$; г) $\frac{n^5 + n^3 + 1000}{n^3}$.

46.23 а) На графике функции $y = \frac{5x + 17}{x + 7}$ найдите все точки, обе координаты которых целые числа.

б) При каком наименьшем натуральном значении параметра a на графике функции $y = \frac{a}{x + 113}$ есть ровно одна точка, координатами которой являются натуральные числа? Найдите координаты этой точки.

46.24 Найдите все значения числа a, при которых числа:

а) $\frac{3}{a} - 1$ и $\frac{3}{a} + a$ — целые;

б) $\frac{4}{a} + 3$ и $\frac{8}{a} + a$ — натуральные.

46.25 Докажите, что при любых целых значениях n число $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ делится:

а) на 4; б) на 8; в) на 12; г) на 24.

46.26 Докажите, что для любого натурального значения n верно утверждение:

а) $(2n^3 + 3n^2 + n) \vdots 6$; б) $(n^3 + 3n^2 + 2n)(n + 7) \vdots 24$.

46.27 а) Докажите, что если $a + \frac{18}{a}$ — натуральное число, делящееся на 6, то $a^2 + \frac{324}{a^2}$ — также натуральное число, делящееся на 36.

б) Докажите, что если $a + \frac{450}{a}$ — натуральное число, делящееся на 15, то $a^2 + \frac{202500}{a^2}$ — натуральное число, делящееся на 225.

46.28 Используя обобщённую формулу сокращённого умножения $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$, докажите, что:

а) $7^n - 2^n$ делится на 5; в) $15^n - 1$ делится на 7;

б) $17^{2n} - 9^n$ делится на 140; г) $2^{4n} - 1$ делится на 15.

46.29 Используя обобщённую формулу сокращённого умножения $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - ... - ab^{2n-1} + b^{2n})$, докажите, что:

а) $7^{33} + 2^{33}$ делится на 9;
б) $17 \cdot 17^{2n} + 3 \cdot 9^n$ делится на 20;
в) $13^{21} + 1$ делится на 7;
г) $49^n \cdot 7 + 5 \cdot 25^n$ делится на 12.

46.30 Используя формулу из **46.28**, докажите, что:

а) $235^7 - 1$ делится на 234;
б) $2001^{2007} - 1$ делится на 2000;
в) $343^{246} - 1$ делится на 344;
г) $111^{346} - 1$ делится на 12 320.

Докажите, что:

46.31 а) $13^n + 7 \cdot 5^n$ делится на 8;
б) $31^n - 27 \cdot 5^n$ делится на 26;
в) $85^n + 44 \cdot 40^n$ делится на 45;
г) $85^n + 45 \cdot 3^n$ делится на 22 при $n = 2k + 1$.

46.32 а) $(7 \cdot 11^6 - 7) \vdots 84$; б) $(156 \cdot 13^5 - 12^7) \vdots 75$.

ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

47.1 а) Назовите двузначные числа, которые являются простыми.
б) Приведите примеры составных двузначных чисел.

47.2 Докажите, что только одно число, состоящее из чётного количества одинаковых цифр, простое. Найдите это число.

47.3 а) Сумма двух чисел равна 149, а разность их квадратов — простое число. Найдите эти числа.
б) Сумма двух чисел равна 101, а разность их квадратов — простое число. Найдите эти числа.

47.4 Найдите (если возможно) два трёхзначных числа таких, что:
а) они взаимно просты;
б) каждое из них — простое число;
в) их сумма и их разность — простые числа;
г) разность их квадратов — простое число.

47.5 Докажите, что являются составными числа:
а) 34 765; в) 975 312;
б) 10 101; г) 87 654 321.

47.6 Докажите, что число $237^{231} + 732^{132}$ — составное.

47.7 Разложите на простые множители числа:
а) 95 256; б) 968 000; в) 444 528; г) 178 200.

47.8 Сколько существует натуральных чисел, меньших 100, делящихся:
а) на 2; б) на 3; в) на 5; г) на 6?

47.9 Может ли из 101 идущих подряд натуральных чисел быть ровно одно, делящееся:
а) на 50; б) на 51; в) на 101; г) на 100?

47.10 Может ли произведение 101 идущих подряд натуральных чисел не делиться:
а) на 51; б) на 101; в) на 606; г) на 103?

47.11 Докажите, что если натуральное число p ($p > 1$) не делится на все натуральные числа n такие, что $n^2 \leqslant p$, то p — простое число.

47.12 Докажите, что при любом натуральном n числа вида $6n + 2$; $6n + 3$ и $6n + 4$ являются составными.

47.13 Докажите, что если p — простое число больше 3, то $p^2 - 1$ делится на 24.

47.14 Докажите, что любое простое число больше 3 даёт при делении на 6 в остатке либо 1, либо 5, т. е. может быть представлено в виде $6n + 1$ или $6n - 1$, где n — некоторое натуральное число. Представьте в данном виде простые числа 5; 13; 149; 259; 983. Подберите такие значения n, чтобы числа вида $6n + 1$ и $6n - 1$ не были простыми.

47.15 Найдите все такие простые числа p, при каждом из которых является простым каждое из чисел:
а) p, $p + 10$ и $p + 14$;
б) $p - 2$, $p + 24$, $p + 26$.

47.16 Существуют ли такие значения p, при которых числа:
а) p и $8p^2 + 1$ — простые;
б) p и $2p + 1$ — простые ($p > 3$).

47.17 Докажите, что четвёртая степень любого натурального числа, большего единицы, увеличенная на 4, не может быть простым числом.

47.18 Найдите все простые числа p и q такие, что:
а) $5p + 17q = 140$; б) $7p + 3q = 86$.

47.19 Определите, является ли простым число $2^{110} + 7^{52}$.

47.20 Докажите, что натуральное число, следующее за произведением четырёх последовательных натуральных чисел, не может быть простым.

ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

48.1 Найдите остаток от деления числа:
а) 43 215 436 на 10; в) 1 234 567 на 9;
б) 1 234 321 на 3; г) 3 456 785 на 6.

48.2 Назовите все остатки, которые могут получиться при делении на число: а) 5; б) 7; в) 4; г) 10.

48.3 Составьте формулу натурального числа, которое:
а) при делении на 5 даёт остаток 4;
б) при делении на 7 даёт остаток 3;
в) при делении на 11 даёт остаток 7;
г) при делении на 6 даёт остаток 1.

48.4 Составьте формулу натурального числа a, которое при делении на n даёт неполное частное b и остаток r. Используя эту формулу, заполните таблицу:

a	n	b	r
2469	11		
3528		15	
	53	106	15
	28	47	19

48.5 Число x при делении на 12 даёт остаток 7. Чему может быть равен остаток от деления числа x:
а) на 2; б) на 3; в) на 6; г) на 8?

48.6 а) Докажите, что остаток от деления натурального числа на 5 равен остатку от деления его последней цифры на 5.
б) Докажите, что остаток от деления натурального числа на 3 равен остатку от деления суммы всех его цифр на 3.

48.7 а) Докажите, что остаток от деления натурального числа на 4 равен остатку от деления числа, образованного двумя его последними цифрами, на 4.
б) Докажите, что остаток от деления натурального числа на 25 равен остатку от деления числа, образованного двумя его последними цифрами, на 25.

48.8 Найдите остатки от деления:
а) на 5 чисел 123; 167; 205; 20 009;
б) на 4 чисел 2345; 678; 3457; 2 323 232.

48.9 Найдите остатки от деления:
а) на 3 чисел 232 332; 768 900 001; $\underbrace{777\ldots777}_{\text{всего 856 семёрок}}$;
б) на 9 чисел 1372; 232 332; 5632; $\underbrace{111\ldots111}_{\text{всего 256 единиц}}$.

48.10 а) Докажите, что остаток от деления числа (не меньшего 1000) на 8 равен остатку от деления на 8 числа, соответствующего трём последним цифрам данного числа.
б) Найдите остатки от деления на 8 чисел 454 548; 1 234 567; $\underbrace{777\ldots777}_{\text{всего 8226 семёрок}}$.

48.11 В числе 23□47 заполните пропуск такой цифрой, чтобы число:
а) делилось на 3;
б) делилось на 9.

48.12 В числе 233□4 заполните пропуск такой цифрой, чтобы число:
а) делилось на 4;
б) делилось на 11.

48.13 В числе 3423□ заполните пропуск такой цифрой, чтобы число:
а) делилось на 3 и на 2;
б) делилось на 3 и на 4.

48.14 В числе 735□4 заполните пропуск такой цифрой, чтобы число:
а) при делении на 3 давало в остатке 2;
б) при делении на 4 давало в остатке 2.

48.15 В числе 7345□ заполните пропуск такой цифрой, чтобы число:
а) при делении на 9 давало в остатке 2;
б) при делении на 5 давало в остатке 3;
в) при делении на 25 давало в остатке 7;
г) при делении на 11 давало в остатке 10.

48.16 Докажите, что найти остаток от деления числа на 11 можно следующим образом:
1) вычислить сумму всех его цифр в разрядах единиц, сотен, десятков тысяч и т. д.;
2) вычесть из неё сумму цифр в разрядах десятков, тысяч и т. д.;
3) если полученная разность положительна, то остаток от её деления на 11 равен искомому остатку;
4) если полученная разность отрицательна, то остаток от деления её модуля на 11 равен разности числа 11 и искомого остатка.

48.17 Найдите остатки от деления на 11 чисел 3718; 7381; 1937; 9281; $\underbrace{777\ldots777}_{\text{всего 856 семёрок}}$; $\underbrace{333\ldots333}_{\text{всего 3333 троек}}$.

Найдите последнюю цифру числа:

48.18 а) 2^{1707}; б) 3^{1918}; в) 7^{1812}; г) 9^{1941}.

48.19 а) $2001^{2002^{2003}}$; в) $1345^{6789^{12345}}$;

б) $1999^{2002^{1333}}$; г) $23\,456^{78\,901^{2345}}$.

48.20 а) $221^{132} + 255^{243} + 236^{637} - 359^{346}$;
б) $435^{435} + 616^{616} - 2337^{4}$.

48.21 Докажите, что сумма всех остатков, которые могут получиться при делении:

а) на 2015, делится на 2015;
б) на 2016, не делится на 2016.

48.22 а) Докажите, что произведение любых 97 последовательных натуральных чисел делится на 97.

б) Можно ли утверждать, что произведение любых 97 последовательных натуральных чисел делится на 97^2?

48.23 Укажите какое-либо трёхзначное число n, при котором число:

а) $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ не делится на 5;
б) $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ не делится на 24.

48.24 Пусть числа n_1 и n_2 дают при делении на число m остатки соответственно r_1 и r_2. Докажите, что остаток от деления суммы чисел n_1 и n_2 на число m равен остатку от деления суммы r_1 и r_2 на число m.

48.25 Пусть числа n_1 и n_2 дают при делении на число m остатки соответственно r_1 и r_2. Докажите, что остаток от деления произведения чисел n_1 и n_2 на число m равен остатку от деления произведения r_1 и r_2 на число m.

48.26 Пусть числа $n_1 > n_2$ дают при делении на число m остатки соответственно r_1 и r_2. Докажите, что остаток от деления разности $n_1 - n_2$ на число m равен $r_1 - r_2$, если $r_1 \geqslant r_2$, и $m + r_1 - r_2$, если $r_1 < r_2$.

48.27 Остаток от деления числа n на 24 равен 7. Каким может быть остаток от деления этого числа:

а) на 12; б) на 48; в) на 8; г) на 72?

48.28 Остаток от деления числа n на 50 равен 17. Каким может быть остаток от деления этого числа:

а) на 25; б) на 100; в) на 10; г) на 125?

48.29 Заполните таблицу:

Число	Остаток от деления на 3		
n	0	1	2
$9n$			
$7n$			
$2n$			
n^2			
n^3			
$n^3 + n^2 + 201n$			

48.30 Докажите, что если a и b не делятся на 3, то и $a^2 + b^2$ не делится на 3.

48.31 Заполните таблицу:

Число	Остаток от деления на 5				
n	0	1	2	3	4
$5n$					
$3n$					
$7n$					
n^2					
n^3					
$n^3 + n^2 + 2000n$					

48.32 Рассмотрите три утверждения:

а) сумма квадратов двух чисел делится на 3 тогда и только тогда, когда оба эти числа делятся на 3;

б) сумма квадратов двух чисел делится на 5 тогда и только тогда, когда оба эти числа делятся на 5;

в) сумма квадратов двух чисел делится на 7 тогда и только тогда, когда оба эти числа делятся на 7.

Два из них являются верными, а одно нет. Докажите верные утверждения и опровергните примером неверное утверждение.

48.33 а) Докажите, что дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами либо делится на 4, либо при делении на 4 даёт в остатке 1.

б) Может ли дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами равняться 2003?

48.34 а) Найдите остаток при делении на 4 суммы всех различных чисел, в записи каждого из которых есть 127 раз цифра 4 и один раз цифра 1.

б) Найдите остаток при делении на 9 суммы всех разных десятизначных чисел, в записи каждого из которых любая из 10 цифр есть ровно по одному разу.

48.35 а) Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 7. Найдите это число.

б) Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 6, а в остатке 4. Найдите это число.

48.36 а) Докажите, что сумма квадратов двух последовательных целых чисел при делении на 4 даёт остаток 1.

б) Докажите, что если число a — чётное, но не кратное 4, то число a^2 при делении на 32 даёт остаток 4.

в) Докажите, что квадрат нечётного числа при делении на 8 даёт остаток 1.

г) Докажите, что если число a — чётное, но не кратное 6, то число a^2 при делении на 12 даёт остаток 4.

48.37 а) Известно, что число a при делении на 5 даёт остаток 1, а при делении на 3 даёт остаток 2. Найдите остаток от деления числа a на 15.

б) Известно, что число a при делении на 4 даёт остаток 3, а при делении на 3 даёт остаток 1. Найдите остаток от деления числа a на 12.

НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ И НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ

49.1 Из отрезка натурального ряда чисел от 1 до 20 выпишите:

а) пары взаимно простых составных чисел;

б) пары составных чисел, в которых одно число кратно другому;

в) пары чисел, общим делителем которых является составное число;

г) пары простых чисел, наименьшее общее кратное которых принадлежит данному ряду чисел.

49.2 Представьте данные дроби как сумму или разность дробей, знаменателями которых служат простые числа. Например:

$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; $\frac{3}{14} = \frac{5}{7} - \frac{1}{2}$ или $\frac{71}{105} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$.

а) $\frac{8}{15}$; в) $\frac{3}{35}$; д) $\frac{7}{30}$;

б) $\frac{7}{22}$; г) $\frac{20}{143}$; е) $\frac{13}{70}$.

49.3 Найдите наибольший общий делитель (НОД) чисел:
а) 154 и 210; в) 105 и 165;
б) 240, 360 и 900; г) 144, 216 и 324.

49.4 Найдите наименьшее общее кратное (НОК) чисел:
а) 120 и 144; в) 132 и 242;
б) 255, 510 и 153; г) 156, 195 и 390.

49.5 Найдите НОД и НОК чисел:
а) 84 и 56; в) 96 и 144;
б) 66, 99 и 132; г) 39, 65 и 156.

49.6 а) Найдите два натуральных числа, сумма которых равна 35, а наименьшее общее кратное равно 42.
б) Найдите два натуральных числа, разность которых равна 66, а наименьшее общее кратное равно 360.

Найдите НОД и НОК чисел:

49.7 а) $2^{14} \cdot 3^7$ и $2^{11} \cdot 3^{15}$;
б) $2^{20} \cdot 5^{13} \cdot 7^7$ и $2^{11} \cdot 5^{14} \cdot 7^6$;
в) $2^{124} \cdot 3^7$ и $2^{111} \cdot 5^5$;
г) $2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{16}$; $2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{26}$ и $2^{11} \cdot 3^7 \cdot 5^{20}$.

49.8 а) $4^{12} \cdot 6^{14} \cdot 9^{10}$ и $8^8 \cdot 12^6 \cdot 10^{10}$;
б) $15^5 \cdot 10^8 \cdot 6^7$ и $25^8 \cdot 40^4 \cdot 27^6$.

49.9 а) 5^n и 5^{n+2}; в) 7^{n^2} и 7^n;
б) 6^{3n+2} и 5^{n+3}; г) 13^{5n} и 13^7.

Существуют ли такие числа a и b, что:

49.10 а) НОК $(a; b) = a$;
б) НОД $(a; b) = b$;
в) НОД $(a; b)$ = НОК $(a; b)$;
г) НОК $(a; b)$ не делится на НОД $(a; b)$?

49.11 а) НОК $(a; b) \cdot$ НОД $(a; b) > a \cdot b$;
б) НОК $(a; b) \cdot$ НОД $(a; b) < a \cdot b$?

Для каждого натурального n найдите НОД и НОК следующих чисел:

49.12 а) n и $n + 1$;
б) n и $n + 5$;
в) $n + 170$ и $n + 171$;
г) n и $n + 6$.

49.13 а) $n^2 + n$ и $n + 1$;
б) $n^3 + 1$ и $n + 1$;
в) $n^3 + 1$ и n;
г) $n^2 + 1$ и $2n$.

49.14 Найдите НОД чисел:
а) $2n$ и $4n + 2$;
б) $30n + 25$ и $20n + 15$;
в) $6n + 3$ и $3n$;
г) $14n + 35$ и $7n + 21$.

49.15 Докажите, что НОД $(n; n + k)$ = НОД $(n; k)$.

§50 ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

50.1 Разложите число на простые множители:
а) 24 500; б) 10 368; в) 24 200; г) 97 344.

Представьте данное число в виде произведения степеней различных простых чисел:

50.2 а) 680; б) 2012; в) 946; г) 3125.

50.3 а) $6^3 \cdot 10^{11} \cdot 15^{27}$; б) $20^3 \cdot 250^{13} \cdot 75^{28}$.

Найдите количество различных натуральных делителей числа:

50.4 а) 12; б) 80; в) 45; г) 120.

50.5 а) $2^{13} \cdot 5$; б) $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^6$; в) $2^{99} \cdot 3^{99}$; г) $2^5 \cdot 6^7 \cdot 12^{11}$.

50.6 а) 4^{17}; б) 1001^{99}; в) 80^{23}; г) 120^{11}.

50.7 Произведение натуральных чисел $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$ обозначают $n!$. Символ $n!$ читают n-факториал; $1! = 1$. Представьте в виде произведения и вычислите:
а) 3!; б) 4!; в) 5!; г) 6!.

50.8 С каким показателем входит число 2 в разложение на простые множители числа:
а) 10!; б) 20!; в) 40!; г) 100!?

50.9 С каким показателем входит число 5 в разложение на простые множители числа:
а) 10!; б) 20!; в) 40!; г) 100!?

50.10 Сколькими нулями оканчивается число:
а) 10!; б) 20!; в) 40!; г) 100!?

Найдите НОД и НОК чисел:

50.11 а) 2^{14} и 25!; в) 3^{71} и 1891!;
б) 2^{100} и 100!; г) 5^{207} и 676!.

50.12 а) 6^{14} и 75!; б) 21^{100} и 1000!.

50.13 а) 134! – 1 и 133; б) 255! – 9 и 9009.

50.14 Найдите (можно использовать микрокалькулятор) наименьший простой делитель числа:
а) 5! + 1; б) 8! + 1; в) 7! + 1; г) 13! + 1.

50.15 Докажите, что число $p! + 1$ не делится ни на одно простое число, не превосходящее простое число p, а значит, либо делится на какое-либо простое число, большее p, но меньшее $p! + 1$, либо само является простым.

50.16 Докажите, что среди ста чисел 101! + 2; 101! + 3; 101! + 4; ...; 101! + 101 нет ни одного простого.

ОТВЕТЫ

Глава 1

§ 1

1.18. а) $f(0) = -0{,}4$; $f(1) = -\frac{1}{3}$; $f(-3) = 5$; б) $f(a) = \frac{a^2 - a - 2}{a + 5}$; $f(3a) = \frac{9a^2 - 3a - 2}{3a + 5}$; $f(a - 3) = \frac{a^2 - 7a + 10}{a + 2}$; в) $f(x^2) = \frac{x^4 - x^2 - 2}{x^2 + 5}$; $f(x + 1) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 6}$; $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1 - x - 2x^2}{x + 5x^2}$; г) $f(ab) = \frac{a^2b^2 - ab - 2}{ab + 5}$; $f(a + b) = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a - b - 2}{a + b + 5}$; $f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^2 - ab - 2b^2}{ab + 5b^2}$. **1.20.** 2 км/ч. **1.21.** 40 км/ч. **1.23.** а) $a = -3$; б) $a = 0$; в) $a = \pm 2$; г) $a = \pm 1$. **1.24.** а) $a < 0$; б) $a \in \boldsymbol{R}$; в) ни при каких значениях a; г) $a = 0$. **1.25.** а) $\frac{1}{3}$; б) 18; в) $-\frac{4}{15}$; г) $\frac{1}{3}$. **1.26.** а) -3; б) $\frac{1}{3}$; в) 4; г) $2\frac{1}{3}$. **1.27.** а) 0,1; б) 6; в) 2,5; г) $-0{,}8$. **1.28.** а) 6; б) $-6{,}8$. **1.29.** а) 5; б) 4,5; в) 13; г) $-0{,}1$. **1.30.** а) 15; б) $10\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{15}$; г) $1\frac{7}{15}$. **1.31.** а) 1; 3; б) 1; 5; в) 1; 2; 3; г) 1; 3; 5. **1.32.** 1. **1.34.** а) $y = \frac{23 - 4x}{x - 2}$; б) $k = \frac{x + 4}{x^2 - x}$; в) $x = \frac{5 + yz - 2y^2}{2y - z + 1}$; г) $z = \frac{1 - x}{1 + yx - y}$. **1.36.** а) $\frac{c - d}{f - d}$; б) $\frac{a - b + c}{b - a + c}$; в) $\frac{2 - x - y}{xy(x - y)}$; г) $\frac{c - b}{b - a}$. **1.38.** а) 1; б) 2. **1.39.** а) 1,5; б) -4; в) -2; г) $-4{,}5$. **1.40.** а) $\frac{x}{a}$; не изменилось; б) $\frac{x - 1}{x + 1}$; не изменилось; в) $\frac{1}{5x}$; не изменилось; г) $\frac{2}{x}$; не изменилось. **1.41.** а) $\frac{1}{x}$; изменилось; б) $\frac{x - 2y}{2}$; изменилось; в) $\frac{4n - d}{3}$; изменилось; г) $\frac{y - 1}{y + 1}$; изменилось. **1.42.** а) $x \neq 1$; б) $x \neq 2$; в) $x \neq -1$; 1; г) $x \neq 0$; 1. **1.43.** а) При $a = 3$ значение дроби равно 1 при всех $t \neq 3$; б) при $a = -3$ значение дроби

$a = -4$. **44.53.** При $a = -7$; сумма и произведение корней равны 0. **44.54.** При $a = 2$ или $a = -6$; сумма и произведение корней равны 0. **44.55.** $a = 0$. **44.56.** $a = 1$; $b = 0$.

§ 45

45.1. б) 0,9; в) 0,5; г) 0,6. **45.2.** а) 6; б) 2; в) 6; г) 10. **45.3.** а) 5; б) 4; в) 9; г) 14. **45.4.** а) 0; б) 0; в) 0,1; г) 0,5. **45.5.** а) 480; б) 320; в) 192; г) 384. **45.6.** а) 248; б) 366; в) 1712; г) 2124.

Глава 7

§ 46

46.21. а) 1; 7; б) 2; 6; в) 1; 3; 9; 27; г) 36. **46.22.** а) 2; 3; 4; 6; 12; б) 1; 2; 3; 6; в) 1; 3; 5; 9; 15; 45; г) 1; 2; 5; 10. **46.23.** а) (−6; −13); (−5; −4); (−4; −1); (−1; 2); (2; 3); (11; 4); (−8; 23); (−9; 14); (−10; 11); (−13; 8); (−16; 7); (−25; 6); б) $a = 114$; $A(1; 1)$. **46.24.** а) ±1; ±3; б) 1; 2; 4.

§ 47

47.3. а) 75; 74; б) 51; 50. **47.6.** 237 ⋮ 3 и 732 ⋮ 3. **47.15.** а) 3; б) 5. **47.16.** а) 3; б) да, например, 5, 11. **47.18.** а) $p = 11$; $q = 5$; б) $p = 5$; $q = 17$ или $p = 11$; $q = 3$.

§ 48

48.8. а) 3; 2; 0; 4; б) 1; 2; 1; 0. **48.9.** а) 0; 1; 1; б) 4; 6; 7; 4. **48.11.** а) 2; 5; 8; б) 2. **48.12.** а) 0; 2; 4; 6; 8; б) 6. **48.17.** 0; 0; 1; 8; 0; 3. **48.18.** а) 8; б) 9; в) 1; г) 9. **48.19.** а) 1; б) 9; в) 5; г) 6. **48.20.** а) 1; б) 0. **48.27.** а) 7; б) 7 или 31; в) 7; г) 7; 31; 55. **48.28.** а) 17; б) 17; 67; в) 7; г) 17; 42; 67; 92; 117. **48.34.** а) 3; б) 0. **48.35.** а) 37; б) 64. **48.37.** а) 11; б) 7.

§ 49

49.6. а) 14 и 21; б) 90 и 24. **49.12.** а) НОД = 1; НОК = $n(n + 1)$; б) если n делится на 5, то НОД = 5; НОК = $\frac{n(n+5)}{5}$; если n не делится на 5, то НОД = 1; НОК = $n(n + 5)$; в) НОД = 1; НОК = $(n + 170)(n + 171)$; г) если n не делится ни на 2, ни на 3, то НОД = 1; НОК = $n(n + 6)$; если n делится на 2, но не делится на 3, то НОД = 2, НОК = $\frac{n(n+6)}{2}$; если n делится на 3, но не де-

лится на 2, то НОД = 3, НОК = $\frac{n(n+6)}{3}$; если n делится на 6, то НОД = 6, НОК = $\frac{n(n+6)}{6}$. **49.13.** а) НОД = $n + 1$; НОК = $n(n + 1)$; б) НОД = $n + 1$; НОК = $n^3 + 1$; в) НОД = 1; НОК = $n^4 + n$; г) НОД = 1 при $n = 2k$; НОД = 2 при $n = 2k + 1$; НОК = $(n^2 + 1)2n$ или НОК = $n(n^2 + 1)$. **49.14.** а) 2; б) 5; в) 3; г) 7.

§ 50

50.8. а) 8; б) 18; в) 38; г) 97. **50.9.** а) 2; б) 4; в) 9; г) 24. **50.10.** а) 2; б) 4; в) 9; г) 24. **50.11.** а) НОД = 2^{14}; НОК = 25!; б) НОД = 2^{97}; НОК = $8 \cdot 100!$; в) НОД = 3^{71}; НОК = 1891!; г) НОД = 5^{168}; НОК = $5^{39} \cdot 676!$. **50.12.** а) НОД = 6^{14}; НОК = 75!; б) НОД = 21^{100}; НОК = 1000!. **50.13.** а) НОД = 1; НОК = $133 \cdot (134! - 1)$; б) НОД = 9; НОК = $1001 \cdot (255! - 9)$.

§ 51

51.1. а) 6; б) 3; в) 1; г) 8. **51.2.** а) 6; б) 4; в) 5; г) 3. **51.3.** б) 9; в) 6; г) $\frac{1}{3}$. **51.5.** а) 0,0625; б) 0,25; в) 0,25; г) 0,375. **51.6.** а) $\frac{81}{24336} \approx 0{,}003$; б) $\frac{361}{6084} \approx 0{,}06$. **51.7.** а) 240; б) 348; в) 1632; г) 1980.

Итоговое повторение

10. а) $a = -1$; б) $a = 3$. **11.** а) $b = -8$; $c = 0$; б) $b = -24$; $c = -45$. **17.** а) $y_{наим} = -8$ при $x = -1$; $y_{наиб} = 0$ при $x = -3$; б) $y_{наим} = -3$ при $x = -7$; $y_{наиб} = 0$ при $x = -4$; в) $y_{наим} = -6$ при $x = 0$; $y_{наиб}$ не существует; г) $y_{наим}$ не существует; $y_{наиб} = 8$ при $x = 2$. **19.** а) $x < -7$; $x > 1$; б) $-1 \leqslant x \leqslant 3$; в) $-3 \leqslant x \leqslant 5$; г) $x < -4$; $x > 1$. **20.** а) $x < -2$; $x > -2$; б) $-\infty < x < +\infty$; в) $x = 3$; г) нет решений. **21.** а) Один корень при $m = -3$; два корня при $m > -3$; не имеет корней при $m < -3$; б) один корень при $k = 5$; два корня при $k < 5$; не имеет корней при $k > 5$. **27.** а) $y = \frac{-3}{x}$; б) $y = \frac{4}{x}$; в) $y = -\frac{1}{2x}$; г) $y = \frac{3}{x}$. **28.** а), б) Да; в), г) нет. **29.** а) $y_{наим} = -6$ при $x = 1$; $y_{наиб}$ не существует; б) $y_{наим} = 1$ при $x = 3$; $y_{наиб} = 4$ при $x = 0$; в) $y_{наим} = -10$ при $x = -1$; $y_{наиб} = -4$ при $x = -4$; г) $y_{наим}$ не существует; $y_{наиб} = 0$ при $x = 7$. **39.** а) $y_{наим} = 2$ при $x = 4$; $y_{наиб}$ не существует; б) $y_{наим} = -\sqrt{5}$ при $x = 3$;